

Quantenoptik

Claus Zimmermann

September 9, 2015

Contents

1	Feldquantisierung	3
	Quantisierung einer einzelnen Mode	3
	Schwarzkörperstrahlung	15
	Kohärente Zustände	19
	Nachweis und Herstellung quadraturgequetschter Zustände	27
	Homodyndetektion	27
	Experiment von Breitenbach, Schiller und Mlynek (Nature 387, 471 (1998)) .	30
2	Hohlraum QED	32
	Jaynes-Cummings-Modell	32
	Der Mikromaser	43
	Rabioszillation und Revival	47
	Quantum Nondemolition Messungen	48
	Verschränkte Zustände	52
	Schrödinger Katze	55
3	Quanten-Messprozess	58
	Quantensprünge und Mastergleichung	58
	Dichtematrix	59
	Quantensprünge und Quanten Monte Carlo Methode	67
	Beispiele	69
	Wigner Funktion.	72
4	Korrelationen und Kohärenz	76
	Kohärenzgrad 1. Ordnung	77
	Kohärenzgrad klassischer Felder	77
	Wiener Khintchine Theorem	79
	Beispiel: Spektrum einer thermischen Lichtquelle	81
	Kohärenzgrad quantisierter Felder	83
	Kohärenzgrad 2. Ordnung.	85
	Klassische Beschreibung	85
	Beispiel: Bestimmung von Sterndurchmesser nach Hanburry-Brown und Twiss	89
	Korrelation 2ter Ordnung mit Photonen.	90

5	Strahlteiler und Interferometer	93
	Strahlteiler	93
	Mach-Zender-Interferometer	104
6	Photonenpaare	107
	Lineare Optik und Brechungsindex	107
	Nichtlineare Optik	110
	Erzeugung von Katzenzuständen mit Hilfe des Kerr-Effekts	112
	Quelle für Photonenpaare.	116
	Hong-Ou-Mandel-Interferometer	119
7	Optische Tests der Quantenmechanik	121
	Strahlteiler mit Moden unterschiedlicher Polarisation	121
	Quanteneraser	123
	Induzierte Kohärenz	124
	Überlichtschnelles Tunneln	126
	Photonentransport im Resonator	127
	Fransons Experiment	128
	Test lokal realistischer Theorien	
	(Bellsche Ungleichung)	131
	Quantenkryptographie	135
	BB84 Protokol.	135
	Symmetrischer Schlüssel	136
	Asymmetrischer Schlüssel	136

Chapter 1

Feldquantisierung

Quantisierung einer einzelnen Mode

- Maxwell-Gleichungen

Die quantenmechanische Beschreibung von Licht benutzt zunächst das klassische Lichtfeld. Ausgangspunkt sind also Lösungen der Maxwell-Gleichungen im strom- und ladungsfreien Raum:

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 0\end{aligned}$$

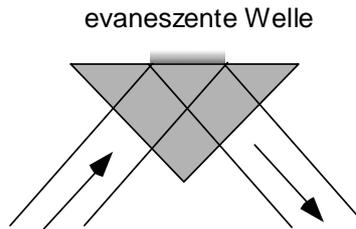
- Moden

Die Lösungen der Maxwell-Gleichungen hängen von den Randbedingungen ab. Einige (willkürliche) Beispiele sind:

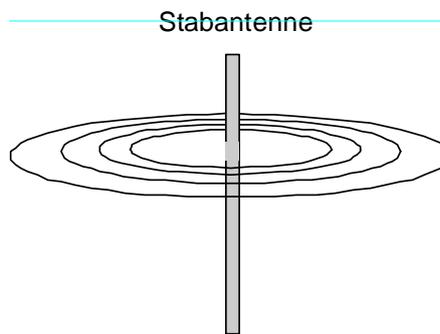
Laserresonator: Gaußmode mit Gaußförmigem Profil



Totale interne Reflexion am Prisma. Reflektierter Gaußstrahl mit exponentiell abfallendem oszillierendem Feld außerhalb des Prismas (evaneszente Welle).



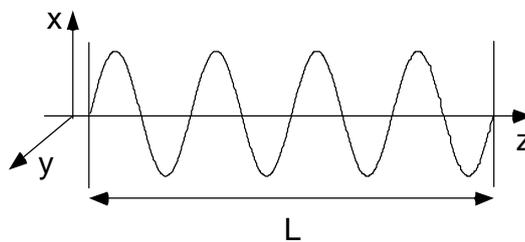
Stabantenne mit Dipolcharakteristik:



Eine solche durch die Randbedingungen bestimmte Form des Lichtfeldes nennt man Mode. Aufgrund der Linearität der Maxwell-Gleichungen kann man aus Überlagerungen von Moden neue Moden konstruieren oder eine gegebene Mode in eine Linearkombination anderer Moden zerlegen.

- Stehwellen

Zur Quantisierung betrachten wir als einfachstes Beispiel die Lichtmoden für ein durch unendlich gut leitende parallel Platten abgeschlossenes Volumen. Das Licht hat eine Ausbreitungsrichtung entlang z und einer Polarisation parallel zur x -Achse. Auf den Platten im Abstand L muß das Feld verschwinden.



Das Feld lässt sich schreiben als

$$E_x(z, t) = \sqrt{\frac{2\omega_m^2}{V\varepsilon_0}} \cdot q(t) \sin(k \cdot z)$$

mit den Randbedingungen

$$n \cdot \frac{\lambda_m}{2} = L.$$

Die möglichen Wellenvektoren sind also

$$k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}.$$

Für die Frequenz ergeben die Maxwell-Gleichungen

$$\omega_m = c \cdot k_m = c \cdot m \cdot \frac{\pi}{L}.$$

V ist das Volumen des Hohlraums. Die die Amplitude $q(t)$ hat aufgrund des gewählten Vorfaktor die Dimension $m\sqrt{kg}$. Die Amplitude kann sich zeitlich ändern. Das zum elektrischen Feld gehörige Magnetfeld erhält man aus der 4. Maxwell-Gleichung

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\right) \sqrt{\frac{2\omega_m^2}{V\varepsilon_0}} \dot{q}(t) \cos(k \cdot z).$$

Warum die Amplituden so merkwürdig geschrieben sind, erklärt sich im nächsten Schritt:

- Energie

Die klassische elektromagnetische Energie einer ebenen Welle in einem Volumen V ist

$$H = \frac{1}{2} \int dV \left(\varepsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right),$$

was sich schreiben lässt als (Übung)

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_m^2 q^2)$$

mit

$$p := \dot{q}.$$

Diese einfache Form der Energie entsteht durch die obige Definition von q . Diese Energie ist formal identisch mit der eines harmonischen Oszillators für ein Teilchen der Masse $m = 1kg$:

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

mit der Zuordnung

$$\begin{aligned} v &\rightarrow p/m \\ r &\rightarrow q. \end{aligned}$$

Damit bekommt q formal die Einheit einer Länge und p die Einheit der Geschwindigkeit.

- Kanonische Quantisierung

Die klassischen Größen p und q werden als Operatoren \hat{q} und \hat{p} interpretiert. Für diese Operatoren muß man allerdings noch die Vertauschungsrelation festlegen. Man wählt

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

- Hamilton Operator und Feld-Operatoren

Dadurch werden folgende klassischen Größen ebenfalls zu Operatoren:

$$\begin{aligned} H &\rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \\ E &\rightarrow \hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right)^{1/2} \hat{q}(t) \sin(k \cdot z) \\ B &\rightarrow \hat{B}_y(z, t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{k} \left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right)^{1/2} \hat{p}(t) \cos(k \cdot z) \end{aligned}$$

\hat{p} und \hat{q} sind hermitesch und damit Observable.

- Erzeuger und Vernichter

Analog zum quantisierten harmonischen Operator löst man den Hamilton durch die Einführung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Sie sind definiert als:

$$\begin{aligned} a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}) \\ a &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_0(a + a^+) \sin(k \cdot z) \\ B_y(z, t) &= -iB_0(a - a^+) \cos(k \cdot z) \end{aligned}$$

mit

$$E_0 := \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}, \quad B_0 := \frac{\mu_0}{k} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \hbar \omega^3}{V}}.$$

- Hamilton-Operator

Der Ansatz wurde von Anfang an so gewählt, dass die Erzeuger und Vernichter dimensionslos sind. Sie beschreiben die zeitabhängige Stärke des Feldes in den Grundeinheiten E_0 und B_0 . Es gilt (wie man leicht nachrechnet):

$$\begin{aligned} [a, a^+] &= 1 \\ \hat{H} &= \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

- Hilbertraum

Die Erzeuger/Vernichter wirken in einem abstrakten Zustandsraum mit zeitunabhängigen Zuständen. Es gilt das Heisenberg-Bild mit einer intrinsischen Zeitabhängigkeit der Operatoren gemäß der Heisenberg-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, a] \\ &= \frac{i}{\hbar}[\hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2}), a] \\ &= i\omega(a^+aa - aa^+a) \\ &= -i\omega[a, a^+]a \\ &= -i\omega a \end{aligned}$$

mit der Lösung:

$$a(t) = a(0) \cdot e^{-i\omega t}$$

und ganz analog:

$$a^+(t) = a^+(0) \cdot e^{i\omega t}$$

- Energie-Eigenzustände

Die Energie-Eigenzustände erfüllen die Eigengleichung des Hamiltons:

$$\hat{H}|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle.$$

Dies ist die Definitionsgleichung für die Zustände $|n\rangle$. Sie bilden ein Basissystem d.h. sie sind orthonormal. Um die Energie der Zustände zu berechnen benötigen wir die

- Energie von $a^+|n\rangle$

Aus

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle,$$

erhält man durch Multiplikation mit a^+ (von links)

$$\hbar\omega(a^+a^+a + \frac{1}{2}a^+)|n\rangle = a^+\varepsilon_n|n\rangle.$$

Unter Verwendung des Vertauschers

$$[a, a^+] = 1 \Rightarrow a^+a = aa^+ - 1$$

erhält man

$$\begin{aligned}\hbar\omega(a^+aa^+ - a^+ + \frac{1}{2}a^+)|n\rangle &= \varepsilon_n a^+|n\rangle \\ \hbar\omega(a^+a - 1 + \frac{1}{2})a^+|n\rangle &= \varepsilon_n a^+|n\rangle \\ \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})a^+|n\rangle &= (\varepsilon_n + \hbar\omega)a^+|n\rangle\end{aligned}$$

also

$$Ha^+|n\rangle = (\varepsilon_n + \hbar\omega)a^+|n\rangle$$

Der Zustand $a^+|n\rangle$ ist also auch ein Eigenzustand zu \hat{H} mit dem Eigenwert $(\varepsilon_n + \hbar\omega)$. Der Erzeuger führt zu einem Zustand mit einer um $\hbar\omega$ erhöhten Energie.

- Energie von $a|n\rangle$

Entsprechend gilt:

$$Ha|n\rangle = (\varepsilon_n - \hbar\omega)a|n\rangle.$$

Der Vernichter führt zu neuem Zustand mit um $\hbar\omega$ verringerter Energie.

- Grundzustand

Es muss einen Zustand kleinster positiver Energie geben. Er sei $|0\rangle$. Der Vernichter kann aus diesem Zustand keinen neuen Eigenzustand machen. Man muss also fordern:

$$a|0\rangle = 0.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}H|0\rangle &= \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})|0\rangle = \hbar\omega a^+ \overbrace{a|0\rangle}^0 + \hbar\omega \frac{1}{2}|0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle\end{aligned}$$

Damit hat der Grundzustand die Energie $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

- Energiespektrum

Durch wiederholtes Anwenden des Erzeugers auf den Grundzustand erhält man die Eigenzustände mit ihren Energien

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Fock-Zustände

Das Photon ist die Energieeinheit, mit der die Mode besetzt werden kann. Der Zustand $|1\rangle$ ist der Zustand in dem die Mode mit einem Photon besetzt ist, der Zustand $|2\rangle$ ist der Zustand in dem die Mode mit zwei Photonen besetzt ist. Die Zustände $|n\rangle$ heißen Nummernzustände oder Fock-Zustände der Mode. Das Photon ist in diesem Bild kein an einem Punkt lokalisiertes Teilchen, das den Raum entlang einer Bahn durchläuft, sondern die Grundeinheit der Energie eines Lichtfeldes. Die Energie einer Mode ist in Einheiten $\hbar\omega$ gequantelt. Diese Energie ist delokalisiert und die Eigenschaft eines globalen Objekts nämlich der Mode. Eine Mode ist unteilbar und kann beliebig groß sein.

- Photonenzahloperator

Aus

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= \varepsilon_n|n\rangle \\ \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})|n\rangle &= \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \hbar\omega a^+ a|n\rangle &= \hbar\omega n \cdot |n\rangle \\ a^+ a|n\rangle &= n \cdot |n\rangle \\ \hat{n}|n\rangle &= n \cdot |n\rangle \end{aligned}$$

Man kann also den Operator $\hat{n} := a^+a$ als Photonenzahloperator interpretieren. Die Energieeigenzustände $|n\rangle$ heißen Nummernzustände. Ein Energiequant heißt Photon.

- Wirkung der Operatoren a und a^+ auf die Nummernzustände

Durch Vergleich von

$$\hat{H}a|n\rangle = (\varepsilon_n - \hbar\omega)a|n\rangle$$

und

$$\hat{H}|n-1\rangle = \varepsilon_{n-1}|n-1\rangle = (\varepsilon_n - \hbar\omega)|n-1\rangle$$

folgt

$$a|n\rangle \sim |n-1\rangle$$

oder

$$a|n\rangle = C_n|n-1\rangle$$

Mit noch unbekannter Proportionalitätskonstante C_n . Man erhält sie durch :

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{n}|n\rangle &= n \\ \langle n|a^+a|n\rangle &= n \\ \langle an|an\rangle &= n \\ C_n^* \langle n-1|n-1\rangle C_n &= n \\ |C_n|^2 &= n \quad \text{oder} \quad C_n = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Also:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

und entsprechend

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Erzeugung beliebiger Nummernzustände ist möglich durch wiederholte Anwendung des Erzeugers auf den Grundzustand:

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

- Fockbasis

Die Nummernzustände bilden eine vollständige Basis

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{nn'}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1$$

- Erzeuger und Vernichter als Matrix

Matrixelemente der Erzeuger und Vernichter in der Energiedarstellung:

$$\begin{aligned} \langle n-1|a|n\rangle &= \sqrt{n} \\ \langle n+1|a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

alle anderen Elemente verschwinden.

- Erwartungswerte des elektrischen Feldes von Nummernzuständen

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle &= E_0 \sin(k \cdot z)(\langle n|a|n\rangle + \langle n|a^+|n\rangle) \\ &= E_0 \sin(k \cdot z)(C_n \langle n|n-1\rangle + C_n^* \langle n-1|n\rangle) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für das Magnetfeld erhält man ebenfalls Null:

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{B}_x(z,t)|n\rangle &= \langle n|-iB_0(a - a^+) \cos(k \cdot z)|n\rangle \\ &= -iB_0 \cos(k \cdot z)(\langle C_n \langle n|n-1\rangle - C_n^* \langle n-1|n\rangle) = 0 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert des elektromagnetischen Feldes verschwindet für Nummernzustände!

- Feldfluktuation

Für das Quadrat des elektrischen Feldes erhält man

$$\langle n | \hat{E}_x^2 | n \rangle = E_0^2 \sin^2(k \cdot z) \langle n | (a + a^+)^2 | n \rangle$$

Mit

$$\begin{aligned} \langle n | (a + a^+)^2 | n \rangle &= \langle n | a^+ a^+ + a a + a^+ a + a a^+ | n \rangle \\ &= \langle n | a^+ a^+ | n \rangle + \langle n | a a | n \rangle + \langle n | a^+ a | n \rangle + \langle n | a a^+ | n \rangle \\ &= \langle n | a^+ a | n \rangle + \langle n | ([a, a^+] + a^+ a) | n \rangle \\ &= 2 \langle n | \hat{n} | n \rangle + \langle n | 1 | n \rangle \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

erhält man

$$\langle n | \hat{E}_x^2 | n \rangle = 2E_0^2 \sin^2(k \cdot z) \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

und für die Fluktuationen

$$\langle (\Delta \hat{E}_x(z, t))^2 \rangle = \langle \hat{E}_x^2(z, t) \rangle - \langle \hat{E}_x(z, t) \rangle^2.$$

Mit der Definition der Standardabweichung

$$\Delta E := \sqrt{\langle (\Delta \hat{E}_x(z, t))^2 \rangle}$$

erhält man also

$$\Delta E = \sqrt{\langle \Delta \hat{E}_x^2 \rangle} = \sqrt{2} E_0 \sqrt{n + \frac{1}{2}} \cdot |\sin(k \cdot z)|$$

Die Fluktuationen gehen mit \sqrt{n} (für $n \gg 1$). Die Energie des Feldes steckt in den Fluktuationen.

Auch das magnetische Feld fluktuiert:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{B}_x^2 | n \rangle &= \langle n | (-iB_0(a - a^+) \cos(k \cdot z))^2 | n \rangle \\ &= -B_0 \cos^2(k \cdot z) \langle n | (a - a^+)^2 | n \rangle \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \langle n | (a - a^+)^2 | n \rangle &= \langle n | a^+ a^+ + a a - a^+ a - a a^+ | n \rangle \\ &= \langle n | a^+ a^+ | n \rangle + \langle n | a a | n \rangle - \langle n | a^+ a | n \rangle - \langle n | a a^+ | n \rangle \\ &= -\langle n | a^+ a | n \rangle - \langle n | ([a, a^+] + a^+ a) | n \rangle \\ &= -2 \langle n | \hat{n} | n \rangle - \langle n | 1 | n \rangle \\ &= -(2n + 1) \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{B}_x^2 | n \rangle &= \langle n | (-iB_0(a - a^+) \cos(k \cdot z))^2 | n \rangle \\
&= B_0^2 \cos^2(k \cdot z) (2n + 1) \\
&= 2B_0^2 \cos^2(k \cdot z) \left(n + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

und für die Fluktuationen

$$\langle (\Delta \hat{B}_x(z, t))^2 \rangle = \langle \hat{B}_x^2(z, t) \rangle - \langle \hat{B}_x(z, t) \rangle^2.$$

Mit der Definition der Standardabweichung

$$\Delta B := \sqrt{\langle (\Delta \hat{B}_x(z, t))^2 \rangle}$$

erhält man also

$$\Delta B = \sqrt{\langle \Delta \hat{B}_x \rangle} = \sqrt{2} B_0 \sqrt{n + \frac{1}{2}} \cdot |\cos(k \cdot z)|$$

- **Energiedichte**

Die elektrische Energiedichte hat den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\langle \hat{U} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \hat{B}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \langle \hat{E}^2 \rangle + \frac{1}{\mu_0} \langle \hat{B}^2 \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \cdot 2E_0^2 \sin^2(k \cdot z) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} 2B_0^2 \cos^2(k \cdot z) \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\varepsilon_0 \cdot \frac{\hbar \omega}{\varepsilon_0 V} \sin^2(k \cdot z) + \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0^2}{k^2} \cdot \frac{\varepsilon_0 \hbar \omega^3}{V} \cos^2(k \cdot z) \right) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{V} (\sin^2(k \cdot z) + \cos^2(k \cdot z)) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{V}
\end{aligned}$$

Die Energie

$$\langle \hat{U} \rangle V = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

ist also gerade der Erwartungswert des Hamiltonoperators wie es sein sollte.

- **Vakuumfluktuationen.**

Diese Überlegungen erlauben folgende Interpretation: Für das Vakuum mit $n = 0$ entspricht die Rauschenergie der Mode gerade einem halben Photon. Das Vakuum ist also nicht leer sondern rauscht. Dieses Rauschen hat physikalische Konsequenzen. Es erzeugt die van der Waals Kraft und ist verantwortlich für den spontanen Zerfall atomarer Anregungen sowie einer entsprechenden Energieverschiebung, der so genannten Lamb-Shift.

- Quantisierung von Laufwellen

Für eine laufende Welle schwingen das elektrische und das magnetische Feld räumlich und zeitlich synchron. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned}\hat{E}_x(\vec{r}, t) &= iE_r (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)}) \\ \hat{B}_y(\vec{r}, t) &= iB_r (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)})\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}E_r &: = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \\ B_r &: = \frac{\mu_0}{k} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \hbar \omega^3}{2V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0.\end{aligned}$$

(Der Index r steht für "für running wave"). Für den Hamiltonoperator erhalten wir dann

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \int dV \left(\varepsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dV \left(\varepsilon_0 \left(iE_r (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)}) \right)^2 + \frac{1}{\mu_0} \left(iB_r (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)}) \right)^2 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_r^2 - \frac{1}{2} \frac{B_r^2}{\mu_0} \right) \int dV \left((ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)})^2 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_r^2 - \frac{1}{2} \frac{B_r^2}{\mu_0} \right) \int dV (aae^{2i(kr-\omega t)} + a^+ a^+ e^{-2i(kr-\omega t)} - aa^+ - a^+ a) \\ &= \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_r^2 + \frac{1}{2} \frac{B_r^2}{\mu_0} \right) (aa^+ + a^+ a) V \\ &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E_r^2 + \frac{B_r^2}{\mu_0} \right) V (a^+ a + a^+ a + aa^+ - a^+ a) \\ &= \left(\varepsilon_0 E_r^2 + \frac{B_r^2}{\mu_0} \right) V \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

Der Vorfaktor lautet

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_0 E_r^2 + \frac{B_r^2}{\mu_0} \right) V &= \left(\varepsilon_0 \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} + \frac{\left(\frac{\mu_0}{k}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \hbar \omega^3}{V}}{2\mu_0} \right) V \\ &= \frac{1}{2} \hbar\omega \left(1 + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{k^2} \right) \\ &= \hbar\omega\end{aligned}$$

Mit dieser Feldnormierung lautet der Hamilton wie der einer Stehwelle:

$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right)$$

Für die Fluktuationen des elektrischen Feldes erhält man

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{E}_x^2 | n \rangle &= \langle n | (iE_r (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)}))^2 | n \rangle \\
&= -E_r^2 \langle n | (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)})^2 | n \rangle \\
&= -E_r^2 \langle n | aae^{2i(kr-\omega t)} - aa^+ - a^+ a + a^+ a^+ e^{-2i(kr-\omega t)} | n \rangle \\
&= E_r^2 \langle n | aa^+ + a^+ a | n \rangle \\
&= 2E_r^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Die Standardabweichung ist dann

$$\Delta E = \sqrt{\langle \Delta \hat{E}_x^2 \rangle} = \sqrt{2} E_r \sqrt{n + \frac{1}{2}}.$$

Das magnetische Feld fluktuiert ebenso:

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{B}_x^2 | n \rangle &= \langle n | (iB_r (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)}))^2 | n \rangle \\
&= -B_r^2 \langle n | (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)})^2 | n \rangle \\
&= 2B_r^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

und

$$\Delta B = \sqrt{\langle \Delta \hat{B}_x^2 \rangle} = \sqrt{2} B_r \sqrt{n + \frac{1}{2}}.$$

Die Felder einer Laufwelle rauschen also um $1/\sqrt{2}$ weniger als im Bauch einer Stehwelle. Für Fockzustände steckt die Energie wie bei Stehwellen in den Fluktuationen: Die Energiedichte ist

$$\begin{aligned}
\langle \hat{U} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \hat{B}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \langle \hat{E}^2 \rangle + \frac{1}{\mu_0} \langle \hat{B}^2 \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 2E_r^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} 2B_r^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \left(\varepsilon_0 E_r^2 + \frac{1}{\mu_0} B_r^2 \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) \\
&= \left(\varepsilon_0 \frac{\hbar \omega}{2\varepsilon_0 V} + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{k} \right)^2 \frac{\varepsilon_0 \hbar \omega^3}{2V} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{V} \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Zusammenfassung: Die Amplitude der Laufwellen muss man anders normieren als die der Stehwellen um den selben Hamilton-Operator zu bekommen:

$$\begin{aligned}
\hat{E}_x(\vec{r}, t) &= iE_r (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)}) \\
\hat{B}_y(\vec{r}, t) &= iB_r (ae^{i(kr-\omega t)} - a^+ e^{-i(kr-\omega t)})
\end{aligned}$$

$$E_r : = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0$$

$$B_r : = \frac{\mu_0}{k} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \hbar \omega^3}{2V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0.$$

Schwarzkörperstrahlung

- Problem: Wie lautet das Spektrum und die abgestrahlte Leistung einer perfekt absorbierenden Fläche im thermischen Gleichgewicht mit einem Reservoir der Temperatur T . Ende 19. Jahrhundert ungelöstes Problem. Technische Motivation: thermische Quelle als Strahlungsreferenz. Lösung durch Planck. Beginn der Quantenphysik.

- Schwarzer Strahler

Perfekt absorbierende Fläche: Loch einer Kiste. Jeder Lichtstrahl, der rein geht wird nicht wieder herausreflektiert, sondern bleibt drin. Die dem Loch entweichende Strahlung stammt nur von den thermisch schwingenden Ladungsträgern in den Wänden.

- Vereinfachtes Modell mit einer Mode

Wir nehmen an, der Strahler lässt sich durch eine Mode beschreiben mit dem Energiespektrum

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Kanonisches Ensemble: Die Mode sei als "kleines System" an ein viel größeres Wärmebad angekopelt. Die Wahrscheinlichkeit für die Mode eine Energie E zu messen ist

$$P(E) = \underbrace{e^{-E/k_B T}}_{\text{Boltzmann-Faktor}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sum_E e^{-E/k_B T}}}_{\text{Normierung}}$$

also

$$P_n := P(E_n) = \frac{e^{-\varepsilon_n/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/k_B T}}$$

Der Nenner ist die Zustandsumme

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/k_B T} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega(n+1/2)/k_B T} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega/k_B T} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega n/k_B T} \end{aligned}$$

- Mittlere Photonenzahl

Wieviel Photonen befinden sich im Mittel in der Mode?

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega/k_B T} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\hbar\omega n/k_B T}$$

Zuerst berechnen wir Z: Die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega n/k_B T}$$

ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\hbar\omega/k_B T})^n$$

für $e^{-\hbar\omega/k_B T} < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\hbar\omega/k_B T})^n = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}}$$

damit erhält man:

$$Z = \frac{e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}}$$

Berechnung des Zählers

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-\hbar\omega n/k_B T} &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-n \cdot x} \\ &= -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \\ &= -\frac{d}{dx} \frac{1}{1 - e^{-x}} \\ &= \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \end{aligned}$$

wobei $x := \frac{\hbar\omega}{k_B T}$. Damit gilt:

$$\bar{n} = \frac{e^{-\hbar\omega/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

Bei Raumtemperatur und Strahlung im sichtbaren Bereich gilt $k_B T \ll \hbar\omega$ und

$$\bar{n} \simeq e^{-\hbar\omega/k_B T} \simeq 10^{-4}$$

Für Mikrowellen gilt $k_B T \gg \hbar \omega$ und damit

$$\bar{n} \simeq \frac{k_B T}{\hbar \omega} \gg 1$$

Bei Raumtemperatur emittiert der Schwarze Strahler praktisch kein Licht sondern hauptsächlich niederfrequente Strahlung.

Sonnenoberfläche hat eine Temperatur von $6000K$, die Emission ist jetzt im sichtbaren Bereich und die mittlere Besetzungszahl beträgt $\bar{n} \sim 10^{-2}$

- Anwendung des Modells des Schwarzen Strahlers

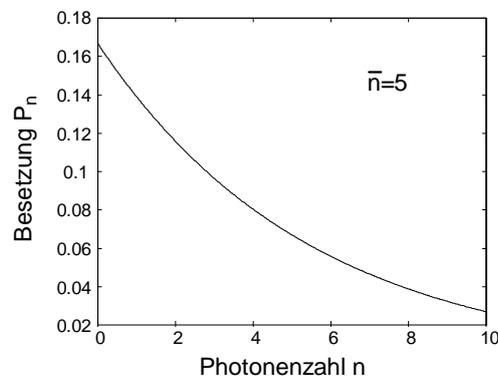
Näherungsweise kann man alles als Schwarze Strahler auffassen, z.B. Glühfäden, glühendes Metall, Flammen, Lebewesen, Kosmische Hintergrundstrahlung (perfektes Schwarzkörperspektrum) etc. . Dem Spektrum des Schwarzen Strahlers sind dabei meist noch charakteristische Linien überlagert, die auf atomare oder molekulare Resonanzen zurückzuführen sind (z.B. in Flammen).

- Besetzungswahrscheinlichkeit

Die Besetzung kann man auch als Funktion von \bar{n} angeben:

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}$$

Größte Wahrscheinlichkeit erhält man für $n = 0$



- Fluktuationen

Zu berechnen ist

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 .$$

Mit

$$\langle n \rangle^2 = \bar{n}^2$$

und

$$\langle n^2 \rangle = \bar{n} + 2\bar{n}^2 \quad (\text{Übung})$$

folgt

$$\begin{aligned} \langle (\Delta n)^2 \rangle &= \bar{n} + \bar{n}^2 \\ \Delta n &= \sqrt{\bar{n} + \bar{n}^2} \end{aligned}$$

mit $\bar{n} \gg 1 \Rightarrow$

$$\Delta n \sim \bar{n} + \frac{1}{2}.$$

Die Fluktuationen sind etwa so groß wie die mittlere Photonenzahl.

- Modendichte

Um die gesamte Energie des Strahlungsfeldes zu bestimmen, muss man wissen, wie viele Moden im Kasten existieren. Wir sortieren die Moden nach Frequenzen und fragen, wie viele Moden im Frequenzintervall $d\omega$ zu finden sind. Die spektrale Modendichte ist:

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

(siehe Experimentalphysik VI).

- Spektrale Energiedichte

(mittlere Energie pro Frequenzintervall) ist

$$\begin{aligned} \bar{U}(\omega) &= \hbar\omega\bar{n}\rho(\omega) \\ \bar{U}(\omega) &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \end{aligned}$$

Dies ist die Plancksche Strahlungsformel. Die Gesamtenergie ist integrierbar:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \int_0^\infty \bar{U}(\omega) d\omega \\ &= \frac{\hbar^2}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} d\omega \\ \bar{U} &= \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{15 c^3 \hbar^3} \quad \text{Stefan-Boltzmann-Gesetz} \end{aligned}$$

Kohärente Zustände

Für Nummernzustände verschwindet der Erwartungswert des elektrischen Feldes. Wie baut man eine Brücke zur klassischen Feldvorstellung, oder: Für welche Zustände ist der Feld-Erwartungswert einem klassischen Feld am ähnlichsten?

- kohärenten Zustände,

Die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ und $\langle\alpha|$ werden definiert sind als Eigenzustände des Vernichters \hat{a} :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

- Dirac-Notation (siehe auch: Nolting, Quantenmechanik I: Grundlagen. Kap. 3).

– Bra-Ket

$$|\alpha\rangle : Ket \quad \langle\alpha| : Bra$$

– Skalarprodukt

$$\langle\alpha|\beta\rangle : \text{Skalarprodukt}$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$

$$\langle\alpha|c\beta\rangle = c\langle\alpha|\beta\rangle = \langle c^*\alpha|\beta\rangle$$

– Adjungierte Operatoren

$$A^+ = (A^t)^* \text{ adjungierter Operator}$$

$$\langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\beta|A^+|\alpha\rangle^*$$

- Eigenwertgleichung für den Erzeuger

Aus

$$\langle\alpha|a|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha|\alpha\rangle = \alpha$$

und

$$\langle\alpha|a|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^+|\alpha\rangle^*$$

folgt

$$\langle\alpha|a^+|\alpha\rangle = \alpha^*$$

und schließlich

$$\langle\alpha|a^+ = \alpha^*\langle\alpha|.$$

- Darstellung von $|\alpha\rangle$ in der Fockbasis

Die $|\alpha\rangle$ sind Linearkombinationen von Nummernzuständen:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

Die c_n berechnen sich folgendermaßen. Zunächst soll die Eigengleichung gelten:

$$a \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

Die rechte Seite kann man umformen:

$$\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} |n-1\rangle = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} |n-1\rangle.$$

Andererseits kann man den Vernichter auch direkt ausführen:

$$a \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle$$

Vergleich beider Summen ergibt:

$$c_n \sqrt{n} = \alpha \cdot c_{n-1}$$

oder

$$c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} c_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

also

$$|\alpha\rangle = c_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Die Konstante c_0 erhält man aus der Normierungsbedingung

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= 1 = |c_0|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{\alpha^{*n} \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'}} \underbrace{\langle n | n' \rangle}_{\delta_{nn'}} \\ &= |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 \cdot e^{|\alpha|^2} \\ \Rightarrow c_0 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \end{aligned}$$

Eine mögliche Phase von c_0 haben wir Null gesetzt, da ein quantenmechanischer Zustand sowieso nur bis auf einen Phasenfaktor definiert ist. Die Eigenzustände zu α lauten also:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \cdot |n\rangle$$

- Laufende Wellen

Um laufende Wellen zu beschreiben, kann man zwei Stehwellen überlagern, deren Ortsschwingung und Zeitschwingung um 90° verschoben sind.

$$\begin{aligned}
 \hat{E}_x(t) &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left((a^+ e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t}) \sin(kz) + \frac{1}{i} (a^+ e^{i\omega t} - a e^{-i\omega t}) \cos(kz) \right) \\
 &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left((a^+ e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t}) \frac{1}{i} (e^{ikz} - e^{-ikz}) + \frac{1}{i} (a^+ e^{i\omega t} - a e^{-i\omega t}) (e^{ikz} + e^{-ikz}) \right) \\
 &= i \frac{E_0}{\sqrt{2}} (a e^{-(i\omega t + kz)} - a^+ e^{i(\omega t + kz)}) \\
 &= i E_r (a e^{-(i\omega t + kz)} - a^+ e^{i(\omega t + kz)})
 \end{aligned}$$

- Der Erwartungswert des elektrischen Feldes einer Stehwelle

Wir betrachten den Operator für eine Stehwelle

$$\hat{E}_x(\vec{r}, t) = E_r (a^+ e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t}) \sin(kz)$$

Hier haben wir die Zeitabhängigkeit der Erzeuger und Vernichter explizit angegeben

$$\begin{aligned}
 a^+(t) &= a^+ e^{i\omega t} \\
 a(t) &= a e^{-i\omega t}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 a^+ &: = a^+(t=0) \\
 a &: = a(t=0).
 \end{aligned}$$

Wir berechnen den Erwartungswert

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(r, t) | \alpha \rangle = E_r (\alpha^* e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t}) \sin(kz)$$

mit der komplexen Zahl $\alpha = |\alpha| \cdot e^{i\theta}$ gilt dann

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(r, t) | \alpha \rangle = E_r (|\alpha| \cdot e^{-i\theta} e^{i\omega t} + |\alpha| \cdot e^{i\theta} e^{-i\omega t}) \sin(kz) = 2E_r |\alpha| \cos(\omega t - \theta) \sin(kz).$$

Dies entspricht dem klassischen Feld mit einer Amplitude proportional zu $|\alpha|$ und einer Phase θ zur Zeit $t = 0$ und am Ort $z = 0$.

- Der Erwartungswert des elektrischen Feldes einer laufenden Welle

Wir betrachten den Operator für eine laufende Welle

$$\hat{E}_x(\vec{r}, t) = i E_r (a e^{i(kr - \omega t)} - a^+ e^{-i(kr - \omega t)})$$

und berechnen den Erwartungswert

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(r, t) | \alpha \rangle = i E_r (\alpha e^{i(kr - \omega t)} - \alpha^* e^{-i(kr - \omega t)})$$

mit der komplexen Zahl $\alpha = |\alpha| \cdot e^{i\theta}$ gilt dann

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(r, t) | \alpha \rangle = 2|\alpha| E_r \sin(\omega t - kr - \theta).$$

Dies entspricht dem klassischen Feld mit einer Amplitude proportional zu $|\alpha|$ und einer Phase θ zur Zeit $t = 0$ und am Ort $z = 0$.

- **Feldfluktuationen**

Wie groß sind die Feldfluktuationen einer laufenden Welle um den Erwartungswert?
Wir berechnen die Varianz

$$\langle \Delta \hat{E}^2 \rangle = \langle \hat{E}^2 \rangle - \langle \hat{E} \rangle^2.$$

Dazu benötigt man

$$\langle \alpha | \hat{E}^2(r, t) | \alpha \rangle = E_r^2 (1 + 4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - kr - \theta))$$

Einsetzen liefert

$$\langle \Delta \hat{E}^2 \rangle = E_r^2 (1 + 4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - kr - \theta)) - 4|\alpha|^2 E_r^2 \sin^2(\omega t - kr - \theta) = E_r^2$$

Für die Standardabweichung erhält man

$$\Delta E = \sqrt{\langle \Delta \hat{E}^2 \rangle} = E_r = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0.$$

- **Erwartungswert des Photonenzahloperators für kohärente Zustände**

$$\begin{aligned} \langle \alpha | n | \alpha \rangle &= \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle = \alpha^* \langle \alpha | \alpha \rangle \\ &= |\alpha|^2 \langle \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2 =: \bar{n} \end{aligned}$$

$|\alpha|^2$ ist die mittlere Photonenzahl in einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$.

- **Photonenzahlfluktuationen**

$$\begin{aligned} \langle \alpha | n^2 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | a^+ a a^+ a | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | a^+ a^+ a a + a^+ a | \alpha \rangle \\ &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n} \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \sqrt{\bar{n}^2 + \bar{n} - \bar{n}^2} = \sqrt{\bar{n}}$$

- Poisson-Verteilung

Misst man für einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ die Photonenzahl mit einem geeigneten Detektor, so ist die Wahrscheinlichkeit, die Zahl n zu messen durch die Projektion auf den Zustand $|n\rangle$ gegeben.

$$\begin{aligned}
 P_n &= |\langle n|\alpha\rangle|^2 = |\langle n|e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n'}}{\sqrt{n'!}}|n'\rangle|^2 \\
 &= \left|\sum_{n'=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n'}}{\sqrt{n'!}}\underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}}\right|^2 \\
 &= \left|e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\
 &= e^{-\bar{n}}\frac{\bar{n}^n}{n!} = P_{\bar{n}}(n).
 \end{aligned}$$

Dies ist die Poisson-Verteilung zum Mittelwert \bar{n} . Die relative Breite lautet:

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{\bar{n}}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}.$$

Die Poisson-Verteilung beschreibt die Verteilung unabhängiger Ereignisse. Ein anschauliches Beispiel für das die Poisson-Verteilung gilt sind Töpfe im Regen: Wartet man so lange bis im Mittelwert über alle Töpfe \bar{n} Tropfen in einen Topf gefallen sind, so ist die relative Anzahl von Töpfen mit n Tropfen gerade durch die Poisson-Verteilung gegeben: $P_{\bar{n}}(n)$. Ein kohärenter Zustand entspricht einer "Überlagerung" aller Töpfe. Eine Photonenzahlmessung entspricht dem zufälligen Herausgreifen eines Topfs. Läßt man die Töpfe sehr lang im Regen, sind alle Töpfe fast gleich voll. Befindet sich am Anfang nur ein Tropfen in einem Topf, so ist die Abweichung etwa so groß wie der Mittelwert.

- Schrotrauschen

Die Genauigkeit einer Intensitätsmessung an einem Laserstrahl hängt von der Länge der Messung ab. Werden während der Messung insgesamt n Photonen eingesammelt, so ist die Unsicherheit \sqrt{n} . Zahlen: 1 mW $\sim 10^{16}$ Photonen/s. Atom: Lebensdauer $\tau \sim 20 = 2 \cdot 10^{-8}$ s entspricht, bei Sättigungsintensität, $2 \cdot 10^8$ Photonen

$$\frac{\Delta n}{n} \approx 10^{-4} = 0.01\%.$$

Die Photonenzahl ist also für typische atomare Vorgänge sehr genau bestimmt. Kurze Messungen bei kleinen Lichtintensitäten sind prinzipiell schrotrauschbegrenzt.

- Quadratur-Komponenten

Manchmal zerlegt man das Feld in ihre Quadraturkomponenten, also zwei Komponenten, die zeitlich mit dem Sinus bzw. dem Cosinus schwingen. Die Operatoren für die beiden Quadraturamplituden sind

$$\begin{aligned}x_1 & : = \frac{1}{2}(a + a^+) \\x_2 & : = \frac{1}{2i}(a - a^+).\end{aligned}$$

Einsetzen in das Feld einer Stehwelle

$$\hat{E}_x(t) = E_0(a e^{-i\omega t} + a^+ e^{i\omega t}) \sin(kz)$$

ergibt:

$$\hat{E}_x(t) = 2E_0 \sin(kz) (x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t)$$

x_1 und x_2 sind offenbar die Amplituden der Sinus bzw. dem Kosinusschwingung.

- Eigenschaften der Quadraturkomponenten

Sie haben folgende Eigenschaften

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] & = \frac{i}{2} \\ \langle (\Delta x_1)^2 \rangle \langle (\Delta x_2)^2 \rangle & \geq \frac{1}{16} \\ \langle n | x_1^2 | n \rangle & = \frac{1}{4}(2n + 1) \\ \langle n | x_2^2 | n \rangle & = \frac{1}{4}(2n + 1) \\ \langle (\Delta x_1)^2 \rangle_{vac} & = \frac{1}{4} = \langle (\Delta x_2)^2 \rangle_{vac}\end{aligned}$$

Der Grundzustand minimiert das Unschärfeprodukt beider Komponenten.

- Rauschen der Quadratur-Komponenten von kohärente Zuständen

Die Erwartungswerte der Quadraturkomponenten lauten:

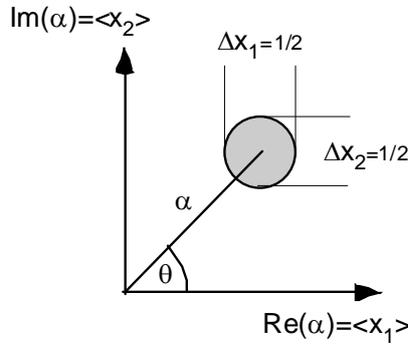
$$\begin{aligned}\langle \alpha | x_1 | \alpha \rangle & = \frac{1}{2} \langle \alpha | \hat{a} + \hat{a}^+ | \alpha \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) = \text{Re}(\alpha) \\ \langle \alpha | x_2 | \alpha \rangle & = \frac{1}{2i} \langle \alpha | \hat{a} - \hat{a}^+ | \alpha \rangle = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*) = \text{Im}(\alpha)\end{aligned}$$

Für die Fluktuationen der Quadratur-Komponenten erhält man:

$$\begin{aligned}\langle (\Delta x_1)^2 \rangle_\alpha & = \langle (\Delta x_2)^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{4} \\ \Delta x_1 & = \frac{1}{2} = \Delta x_2\end{aligned}$$

- Phasenraum-Darstellung kohärenter Zustände

Man trägt die Erwartungswerte der beiden Quadraturkomponenten des Feldes in einem 2D-kartesischen Koordinatensystem auf.



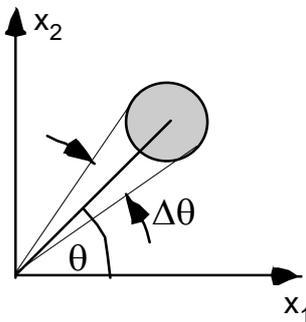
Die Darstellung der Quadraturkomponenten entspricht für einen kohärenten Zustand der Darstellung von α in der komplexen Ebene. Der Kreis markiert die Standardabweichung und hat die selbe Größe wie die Fluktuationen des Vakuumszustands. Bei endlicher Photonenzahl bleiben die Fluktuationen der Quadraturkomponenten unverändert.

- Phasenunschärfe von kohärenten Zuständen

In diesem Bild kann man die Phasenunsicherheit von kohärenten Zuständen ablesen. Wir haben oben gesehen, dass die Phase θ , wie sie die Definition von α festlegt, die Phase des elektrischen Feldes ist für $t = 0$ und $x = 0$.

$$\langle \hat{E}_x(r, t) \rangle = \langle \alpha | \hat{E}_x(r, t) | \alpha \rangle = 2|\alpha|E_r \sin(\omega t - kr - \theta).$$

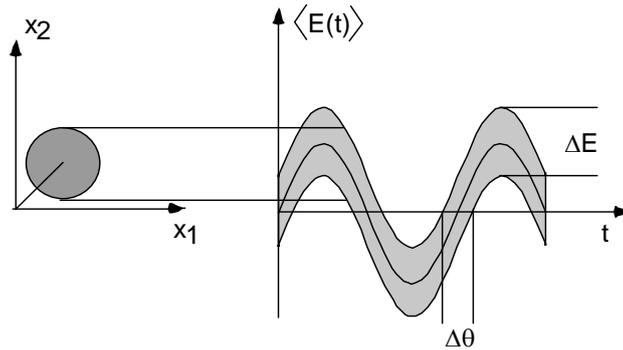
Die Unschärfe der Phase entspricht dem Winkel zwischen den beiden Ursprungstangenten des Kreises.



Anders als die Amplitudenunschärfe nimmt die absolute Phasenunschärfe mit wachsender Photonenzahl ab.

- Zeitliche Entwicklung

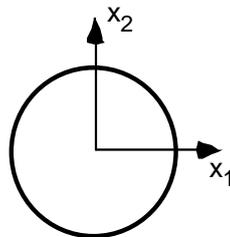
Für die Mittelwerte und damit für den Ursprung des Kreises gilt $\langle \hat{x}_1 \rangle = \alpha \cos \omega t$ und $\langle \hat{x}_2 \rangle = \alpha \sin \omega t$. Der Kreis bewegt sich also selber auf einer Kreisbahn um den Ursprung. Der Mittelwert des Feldes ergibt sich aus der Projektion auf eine der beiden Achsen.



Das graue Band markiert die Feld- und Phasenunsicherheit.

- Nummernzustand

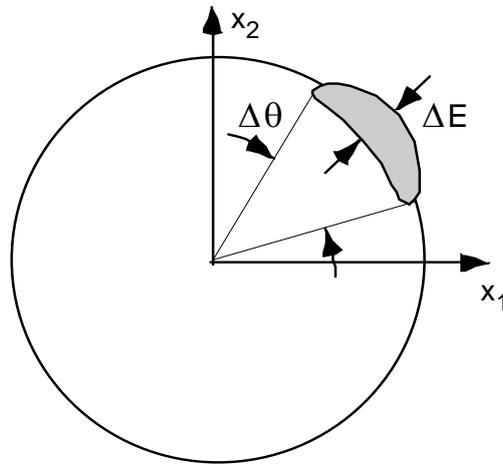
Ein Nummernzustand ist in diesem Bild eine Kreislinie. Es gibt keine Radius-Fluktuationen, d.h. Amplituden-Fluktuationen.



Die Amplitude ist scharf weil die Teilchenzahl scharf ist. Die Phase ist über 2π verschmiert und damit völlig unscharf. Der Feldmittelwert ist Null.

- Gequetschter Zustand

Mit Hilfe mit Methoden der nichtlinearen Optik kann man auch sogenannte gequetschte Zustände herstellen, deren Unschärfe nicht kreisförmig ist. Im Prinzip kann er beliebige Formen annehmen.



Allerdings kann die Unschärfe­fläche nicht beliebig klein werden. Sie ist durch eine Unschärfe-Beziehung begrenzt:

$$\Delta n \cdot \Delta \theta \geq 1$$

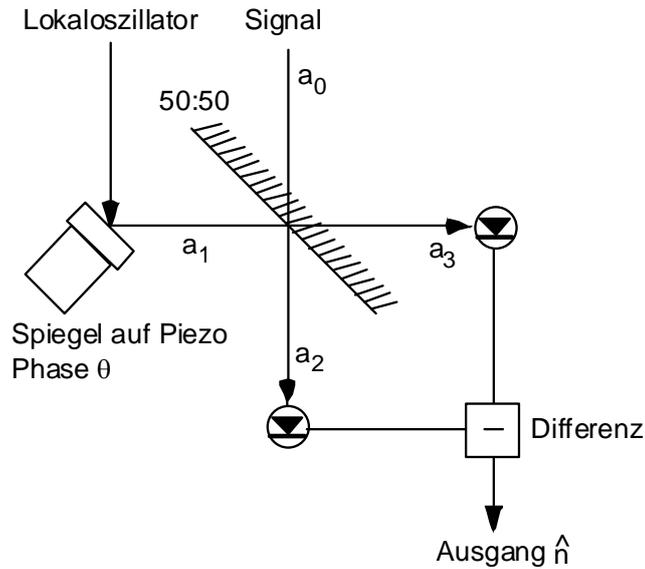
Photonenzahl und Feld-Phase können nicht gleichzeitig scharf sein. Ein Nummernzustand ist demnach ein maximal amplitudengequetschter Zustand. Ein maximal phasengequetschter Zustand wäre eine Ursprungsgerade. Zur ausführlichen Beschreibung benötigt man eine Theorie des Phasenoperators (siehe Gerry and Knight, Kap. 2.7).

Nachweis und Herstellung quadraturgequetschter Zustände

Homodyndetektion

- Aufbau

Das zu untersuchende Signal wird mit einem Referenzlaserstrahl, dem so genannten Lokaloszillator auf einem 50:50 Strahlteiler überlagert. Lokaloszillator und Signal schwingen mit derselben Frequenz. Der Lokaloszillator ist ein kohärenter Zustand, dessen Phase θ mit einem beweglichen Spiegel relativ zum Signal verschoben werden kann. Die beiden Ausgangsstrahlen werden mit zwei Photodioden gemessen und die Photoströme elektronisch voneinander abgezogen. Gemessen wird diese Differenz in Abhängigkeit der Phase θ .



- Observable

Durch welchen Operator \hat{n} wird der Ausgang beschrieben? In Kapitel 5 werden wir sehen, dass die Operatoren für die beiden Ausgänge des Strahlteilers mit denen der Eingänge über folgende Gleichungen zusammenhängen.

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_0 + ia_1)$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + ia_0)$$

Die Photodioden messen die Intensität des Lichts. Die Differenz der beiden Photodiodensignale ist proportional zur Differenz der Teilchenzahloperatoren

$$\begin{aligned} \hat{n} &= I_2 - I_3 = a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_0^\dagger - ia_1^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2}} (a_0 + ia_1) - \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger - ia_0^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + ia_0) \\ &= \frac{1}{2} (a_0^\dagger a_0 + ia_0^\dagger a_1 - ia_1^\dagger a_0 + a_1^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_1 - ia_1^\dagger a_0 + ia_0^\dagger a_1 - a_0^\dagger a_0) \\ &= i (a_0^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_0) \end{aligned}$$

Die Terme proportional zur Intensität auf den beiden Eingängen heben sich bei einem 50:50 Teiler gerade weg. Technisches Rauschen kann damit sehr gut unterdrückt werden. Es bleiben nur die gemischten Terme.

- Kohärenter Lokaloszillator

Wir bilden den Erwartungswert des Operators \hat{n} mit einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ am Eingang des Lokaloszillators.

$$\begin{aligned}\langle \hat{n} \rangle &= \langle \alpha | i (a_0^+ a_1 - a_1^+ a_0) | \alpha \rangle \\ &= i \langle \alpha | a_1 | \alpha \rangle a_0^+ - i \langle \alpha | a_1^+ | \alpha \rangle a_0 \\ &= i \alpha a_0^+ - i \alpha^* a_0\end{aligned}$$

Mit

$$\alpha = |\alpha| e^{-i\phi}$$

und

$$\theta := \phi + \frac{\pi}{2}$$

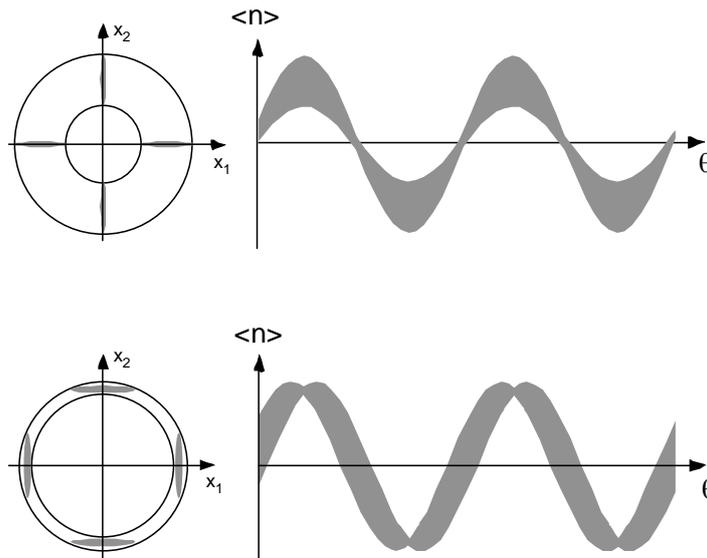
erhält man

$$\begin{aligned}\langle \hat{n} \rangle &= i |\alpha| e^{i\phi} a_0^+ - i |\alpha| e^{-i\phi} a_0 \\ &= |\alpha| (e^{-i\theta} a_0 + e^{i\theta} a_0^+) \\ &= |\alpha| (\cos \theta (a_0 + a_0^+) - i \sin \theta (a_0 - a_0^+)) \\ &= 2 |\alpha| (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)\end{aligned}$$

Der Ausgang ist proportional zum Feld des Lokaloszillators $|\alpha|$ und abhängig von dessen Phase. Abhängig vom Winkel θ projiziert man den Zustand auf die x_1 - bzw. x_2 -Quadraturkomponente

- Tomographie

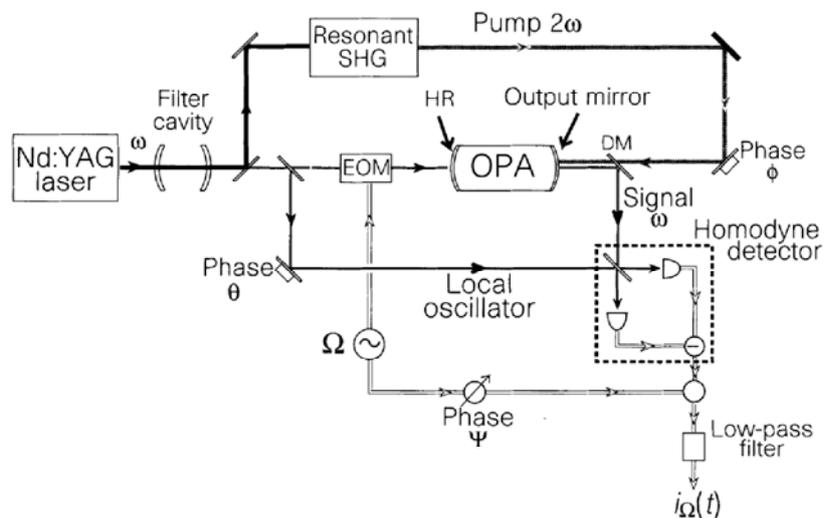
Durch Variation des Winkels θ kann man auch entlang aller anderen Achsen projizieren und daraus den Zustand am Eingang rekonstruieren. Wegen der Analogie zur Röntgentomographie spricht man hier auch von Zustandstomographie.



Experiment von Breitenbach, Schiller und Mlynek (Nature 387, 471 (1998))

- Aufbau

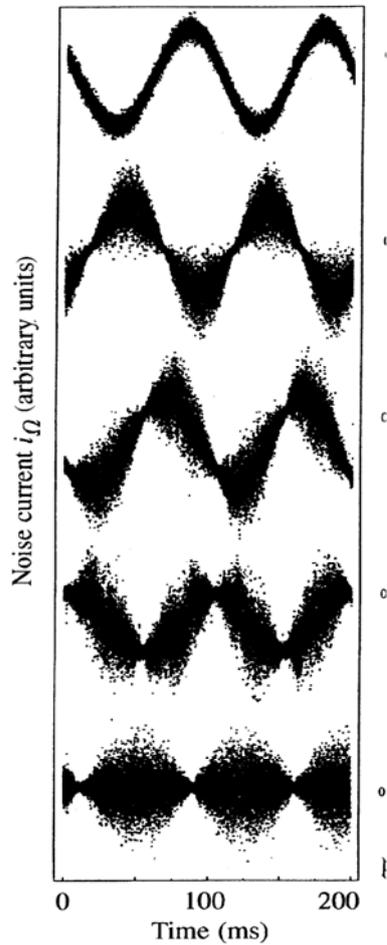
Kernstück ist ein monolithischer optischer parametrischer Oszillator (OPO). Das ist ein nichtlinearer Kristall, dessen Endflächen verspiegelt sind und damit einen optischen Resonator bilden. Der Resonator enthält zwei Moden, eine Pumpmode bei der Frequenz 2ω und eine Signalmode bei der halben Frequenz. Von rechts werden Photonen der Frequenz 2ω in die Pumpmode eingekoppelt. Von links wird etwas Seed-Licht in die Signalmode eingekoppelt. Das Pumpphoton wird in einem zusätzlichen nichtlinearen Kristall durch Frequenzverdopplung (SHG) des Lichts eines Neodym:YAG Lasers bei der Frequenz ω erzeugt. Damit wird sichergestellt, dass Pump- und Seed-Licht eine feste Phasenbeziehung zueinander haben. Ein Teil des YAG-Laserlichts wird abgezweigt und dient als Lokaloszillator. Wird die Phase ϕ des Seedlichts relativ zu der des Pumplichts verändert, erhält man in der Signalmode verschiedene Formen gequetschten Lichts. Das Seedlicht erzeugt zusammen mit dem Pumplicht eine elektrische Polarisation im Kristall, die mit der Differenzfrequenz von Pump und Seedlicht schwingt. Das Seedlicht kann Energie aus dieser Polarisationswelle gewinnen oder verlieren, je nach Phasenlage ϕ . Dabei werden aber auch die Intensitätsfluktuationen verstärkt oder gedämpft. Entsprechend wachsen oder schrumpfen die Phasenfluktuationen. Blockt man das Seedlicht so hat man immer noch die Vakuumsfluktuationen der Signalmode, die ebenfalls gequetscht werden können.



- Beobachtungen

Die folgenden Kurven wurden aufgenommen für einen (von oben nach unten) kohärenten Zustand, phasengequetschten Zustand, gequetschter Zustand mit $\phi = 48^\circ$,

nummerngequetscher Zustand und ganz unten gequetschtes Vakuum). Die Phase θ des Lokaloszillators wurde linear mit der Zeit variiert.



Der kohärente Zustand wurde durch blocken des Pumpstrahls gemessen. Man beobachtet dann nur den Seedlaser, der durch den OPO hindurchläuft. Gequetschtes Vakuum lässt sich beobachten, wenn man den Seedlaser blockt.

Chapter 2

Hohlraum QED

Jaynes-Cummings-Modell

Es beschreibt die Wechselwirkung eines Zweiniveausystems (z.B. Atom) mit einer einzelnen Mode des elektromagnetischen Feldes.

- Wechselwirkungsoperator

Die Wechselwirkung zwischen Mode und Atom wird durch den Operator

$$\hat{H}_I = \vec{\hat{d}} \cdot \vec{\hat{E}}$$

beschrieben. Der Feldoperator mit Polarisation in Richtung des Einheitsvektors \vec{e} lautet

$$\vec{\hat{E}} = \vec{e} \cdot \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} (a + a^+) \sin kz.$$

Einsetzen ergibt

$$\hat{H}'_I = -\hat{d} \cdot E_0(z) \cdot (a + a^+),$$

mit dem Dipoloperator

$$\hat{d} = \vec{\hat{d}} \cdot \vec{e}$$

und

$$E_0(z) := \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \sin kz.$$

- Dipoloperator

Welche Form hat der Dipoloperator \hat{d} ? Dazu betrachten wir eine Zweiniveausystem mit Zuständen $|g\rangle$ und $|e\rangle$. Der Dipoloperator hat die Matrixelemente

$$\begin{aligned} \langle g | \hat{d} | e \rangle & : = d \\ \langle e | \hat{d} | g \rangle & : = d^* \\ \langle e | \hat{d} | e \rangle & : = 0 \\ \langle g | \hat{d} | g \rangle & : = 0 \end{aligned}$$

Aus Paritätsgründen hat ein atomarer Energieeigenzustand kein Dipolmoment. Daher verschwinden die Diagonalelemente. Der Dipoloperator wird also nur durch eine einzige komplexe Zahl d bestimmt. Man kann sie aber, ohne Verlust der Allgemeinheit, reell setzen. Dadurch vernachlässigt man einen möglichen Phasenfaktor von d . Eine solche Phase würde aber im Produkt $\vec{d} \cdot \vec{E}$ einer entsprechenden Phasenverschiebung von E entsprechen, die ja auch keine Rolle spielt.

- Erzeuger und Vernichter für die atomare Anregung

Als nächstes führen wir die "Übergangsoperatoren"

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+ &= |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \\ \hat{\sigma}_- &= |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und den "Inversionsoperator"

$$\hat{\sigma}_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ein. Der Operator $\hat{\sigma}_+$ erzeugt eine atomare Anregung indem er den Grundzustand in einen angeregten Zustand überführt. Entsprechend vernichtet $\hat{\sigma}_-$ die Anregung. Die Operatoren sind also die atomaren Gegenspieler zu den Erzeugern und Vernichtern a^+ bzw. a . Die Operatoren genügen interessanterweise der Pauli Spin-Algebra:

$$\begin{aligned}[\sigma_+, \sigma_-] &= \sigma_3 \\ [\sigma_3, \sigma_\pm] &= 2\sigma_\pm\end{aligned}$$

Man kann den Dipoloperator jetzt schreiben als:

$$\begin{aligned}\hat{d} &= d|g\rangle\langle e| + d^+|e\rangle\langle g| = d\hat{\sigma}_- + d^*\hat{\sigma}_+ \\ &= d(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)\end{aligned}$$

Der Vorfaktor d ist eine komplexe Zahl die die Stärke des Dipols angibt. Er hat die analoge Form zum elektrische Feld ($a + a^+$).

- Hamiltonoperator

Der Hamilton wird damit:

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega_0(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^+)$$

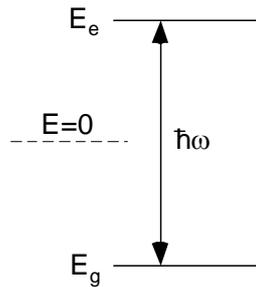
wobei

$$\Omega_0 = d \cdot E_0(z)/\hbar$$

die Frequenz der Wechselwirkungsenergie für ein Photon in der Mode ist. Je nach Lage des Atoms variiert diese Kopplung mit dem Ort des Atoms proportional zu $\sin(kz)$. Das Maximum dieser Einphotonen-Rabifrequenz wird manchmal auch Kopplungskonstante g_0 genannt.

$$g_0 := d \cdot E_{0,\max}/\hbar = \sqrt{\frac{d^2\omega}{\hbar\epsilon_0 V}}$$

Die Energieskala wird so gesetzt, dass die Energie auf der Hälfte zwischen den beiden Zuständen verschwindet.



Dadurch läßt sich der atomare Hamilton schreiben als:

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}(E_e - E_g) \cdot \hat{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_3.$$

Der Gesamthamilton

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}'$$

wird damit

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2}) + \hbar\Omega_0(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(a + a^+).$$

Zunächst kann man den Term $\frac{1}{2}\hbar\omega$ streichen. Er verschiebt lediglich die Energieskala. Die Energie der Vakuumsfluktuationen spielt keine Rolle. Die Vakuumsfluktuationen des Feldes bleiben jedoch wichtig!

- Rotating Wave Approximation

Zeitabhängigkeiten und "rotating wave approximation". Die Feldoperatoren haben die Zeitabhängigkeit (siehe oben):

$$a(t) = a(0) \cdot e^{-i\omega t} \quad a^+(t) = a^+(0) \cdot e^{i\omega t}$$

Für das Atom ohne Feld ergibt die Schrödingergleichung:

$$\hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0) \cdot e^{\pm i\omega_0 t}$$

Die Produkte im Hamilton haben also folgende Zeitabhängigkeiten:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+ a &\sim e^{i(\omega_0 - \omega)t} \\ \hat{\sigma}_- a^+ &\sim e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \\ \hat{\sigma}_+ a^+ &\sim e^{i(\omega_0 + \omega)t} \\ \hat{\sigma}_- a &\sim e^{-i(\omega_0 + \omega)t}\end{aligned}$$

In der Nähe der Resonanz, also für $\omega_0 \approx \omega$ oszillieren die beiden letzten Terme schneller als die beiden ersten. Wie im Bloch-Modell können wir in der entsprechenden Schrödinger-Gleichung eine Zeitskalen-Trennung machen und im zeitlichen Mittel die beiden letzten Terme vernachlässigen. Die beiden vernachlässigten Terme entsprechen einer Anregung des Atoms bei gleichzeitiger Erzeugung eines Photons ($\hat{\sigma}_+ \cdot a^+$) oder einer Abregung des Atoms bei gleichzeitiger Vernichtung eines Photons ($\hat{\sigma}_- \cdot a$). Beide Vorgänge verletzen die Energieerhaltung und sind nur im Rahmen der Unschärferelation also nur für sehr kurze Zeiten möglich. Für längere Zeiten sind sie vernachlässigbar. Damit erhalten wir den Hamilton des Jaynes-Cummings-Modells:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega a^+ a + \hbar\Omega_0(\hat{\sigma}_+ a + \hat{\sigma}_- a^+)$$

Neuerdings gibt es Arbeiten an der Universität Augsburg von Daniel Braak, dem es 2012 gelungen ist das Zweiniveaumodell ohne rotating wave Näherung exakt zu lösen. Die Details führen hier zu weit sind aber unter <http://de.arxiv.org/abs/1203.6039v1> nachzulesen.

- Konstanten der Bewegung

Es gibt zwei Operatoren, die zwei zeitlich konstanten Observablen entsprechen. Sie sind Konstanten der Bewegung und vertauschen mit H :

1. Der "Elektronenzahloperator"

$$\begin{aligned}P_E &= |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\end{aligned}$$

Wie für die Einheitsmatrix gilt $[P_E, H] = 0$.

2. Der "Anregungszahloperator"

$$N_e = a^+ a + |e\rangle\langle e|$$

Im abgeschlossenen System ist die Zahl der Photonen und angeregten Elektronen konstant. Wenn das Atom vom angeregten Zustand in den Grundzustand übergeht, muss ein Photon entstehen und umgekehrt. Man kann auch direkt ausrechnen, dass gilt $[N_e, H] = 0$.

- Reduktion des Hamilton

Welcher Teil des Hamiltons enthält die interessante Dynamik, also den Energieaustausch zwischen Atom und Mode? Dazu zerlegen wir den Hamilton in zwei Teile, die miteinander vertauschen:

$$\begin{aligned} H &= H_I + H_{II} \\ H_I &= \hbar\omega N_e + \hbar\left(\frac{\omega_0}{2} - \omega\right)P_E \\ H_{II} &= -\hbar\Delta + \hbar\Omega_0(\sigma_+ a + \sigma_- a^+), \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta := (\omega_0 - \omega) \cdot |g\rangle\langle g|.$$

Es gilt offenbar (selber nachprüfen)

$$[H_I, H_{II}] = 0.$$

Beide Operatoren haben daher ein gemeinsames Eigensystem. Die Wechselwirkung und damit die interessante Dynamik steckt in H_{II} . Wir müssen daher nur die Eigen Gleichung von H_{II} diskutieren.

$$H_{II}\Psi_{II} = E_{II}\Psi_{II}$$

Die Eigenzustände Ψ_{II} sind automatisch auch Eigenzustände von H_I und damit von H , wobei H_I zum Energieeigenwert des Gesamthamiltons nur eine Konstante E_I beisteuert.

- Resonante Wechselwirkung

Wir betrachten den Spezialfall $\omega_0 = \omega$, d.h. $\Delta = 0$. Das Licht ist also in Resonanz mit dem Atom. Außerdem befindet sich das Atom anfänglich im angeregten Zustand und n Photonen in der Mode. Es werden dann genau zwei Zustände gekoppelt: Der Anfangszustand

$$|i\rangle := |e\rangle|n\rangle$$

er hat die Energie

$$E_i = \frac{1}{2}\hbar\omega + n\hbar\omega$$

und der Endzustand

$$|f\rangle := |g\rangle|n+1\rangle$$

mit der Energie

$$E_f = -\frac{1}{2}\hbar\omega + (n+1)\hbar\omega.$$

Die Energien beider Zustände sind gleich $E_i = E_f$. (Die Zustände sind genau die beiden des "dressed state models".)

- Rabioszillation

Die allgemeine Lösung von H_{II} ist also eine sich zeitlich ändernde Überlagerung:

$$|\Psi(t)\rangle = C_i(t)|i\rangle + C_f(t)|f\rangle.$$

Eingesetzt in die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = H_{II} |\Psi\rangle,$$

ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{C}_i &= -i\Omega_0 \sqrt{n+1} C_f \\ \dot{C}_f &= -i\Omega_0 \sqrt{n+1} C_i \end{aligned}$$

oder:

$$\ddot{C}_i + \Omega_0^2 (n+1) C_i = 0$$

Für die Anfangsbedingungen $C_i(0) = 1$ und $C_f(0) = 0$ hat diese Gleichung die Lösung:

$$C_i(t) = \cos(\Omega_0 \sqrt{n+1} \cdot t)$$

und

$$C_f(t) = -i \sin(\Omega_0 \sqrt{n+1} \cdot t).$$

Für die Besetzungswahrscheinlichkeiten und die Inversion erhält man:

$$\begin{aligned} P_i(t) &= |C_i(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\ P_f(t) &= |C_f(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\ W(t) &= \langle \sigma_3 \rangle = P_i(t) - P_f(t) = \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

wobei die quantenelektrodynamische "Rabi-Frequenz" lautet:

$$\Omega(n) := 2\Omega_0 \sqrt{n+1}.$$

Die Rabi-Frequenz ist proportional zu \sqrt{n} (für $n \gg 1$), d. h. zur Wurzel der Energie, also zum Feld. Dies entspricht der klassischen Erwartung, obwohl das Feld des Jaynes Cummings Modells ein höchst unklassischer Nummernzustand ist.

Für $n = 0$ ist $\Omega = 2\Omega_0 > 0$, d. h. das Vakuum treibt eine Rabi-Oszillation. Es gibt eine Vakuums-Rabi-Oszillation! Sie ist experimentell beobachtbar.

- Dynamik von Überlagerungen

Wie ist die Dynamik für Linearkombinationen von Nummernzuständen?

Atom:

$$|\Psi(t=0)\rangle_{Atom} = C_g|g\rangle + C_e|e\rangle$$

Feld:

$$|\Psi(t=0)\rangle_{Feld} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

Zustand des Gesamtsystems:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi(t=0)\rangle_{Atom} \otimes |\Psi(t=0)\rangle_{Feld}$$

Mit diesem Ansatz kann man die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = H_{II} |\Psi\rangle,$$

lösen und man erhält (selber rechnen):

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a(t)|e\rangle|n\rangle + b(t)|g\rangle|n\rangle$$

mit

$$\begin{aligned} a & : = C_e C_n \cos\left(\frac{\Omega_n}{2} \cdot t\right) - i C_g C_{n+1} \sin\left(\frac{\Omega_n}{2} \cdot t\right) \\ b & : = -i C_e C_n \sin\left(\frac{\Omega_n}{2} \cdot t\right) + C_g C_n \cos\left(\frac{\Omega_n}{2} \cdot t\right). \end{aligned}$$

wobei wie oben

$$\Omega_n = 2\Omega_0 \sqrt{n+1}$$

Die Lösung ist eine Linearkombination von Produktzuständen, d. h. die atomaren und die Feldfreiheitsgrade sind verschränkt.

- Spezielle Anfangsbedingung

Atom ist bei $t=0$ im angeregten Zustand $|e\rangle$, also $C_e = 1$ und $C_g = 0$, und man kann schreiben:

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_g(t)\rangle|g\rangle + |\Psi_e(t)\rangle|e\rangle$$

mit

$$\begin{aligned} |\Psi_g(t)\rangle & = -i \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\Omega_n}{2} \cdot t\right) \cdot |n+1\rangle \\ |\Psi_e(t)\rangle & = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{\Omega_n}{2} \cdot t\right) \cdot |n\rangle. \end{aligned}$$

Als Observable betrachten wir z. B. die Inversion:

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle \Psi | \sigma_3 | \Psi \rangle = \langle \Psi_e(t) | \Psi_e(t) \rangle - \langle \Psi_g(t) | \Psi_g(t) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos(\Omega_n t) \end{aligned}$$

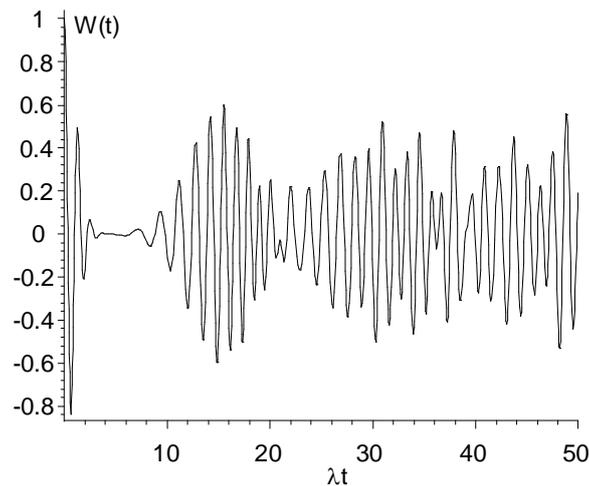
Sie setzt sich aus Frequenzen zusammen, die kein Vielfaches voneinander sind. Dies führt zu einer kuriosen Dynamik.

- Kohärenter Zustand

Für einen kohärenter Zustand, also mit $C_n = e^{-|\alpha|^2/2} \cdot \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ erhält man

$$W_{coh}(t) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos\left(2\Omega_0 t \sqrt{n+1}\right).$$

Für $\bar{n} = 5$ sieht das so aus:



Durch Schwebung zwischen den verschiedenen Komponenten verschwindet die Rabi-Oszillation, um dann wieder aufzutauchen ("revival").

- Revival

Die revival-Zeit T_r läßt sich als die Zeit abschätzen, in der die Phase der benachbarten Komponenten um 2π auseinandergelaufen ist:

$$\Omega(n+1) \cdot T_r - \Omega(n)T_r = 2\pi.$$

Entwicklung der Wurzeln ergibt für eine typische mittlere Photonenzahl \bar{n}

$$T_r = 2\pi \cdot \frac{1}{\Omega_0} \cdot \sqrt{\bar{n}}.$$

Diese Zeit kann man mit der Vakuums-Rabiperiode T_0 vergleichen, die zur Vakuum-Rabioszillation gehört.

$$\frac{2\pi}{T_0} = \Omega(n=0) = 2\Omega_0,$$

also:

$$T_r = 2 \cdot T_0 \cdot \sqrt{\bar{n}}.$$

Für eine große mittlere Photonenzahl \bar{n} ist die revival-Zeit viel größer als die Vakuums-Rabiperiode T_0 .

- Thermischer Zustand

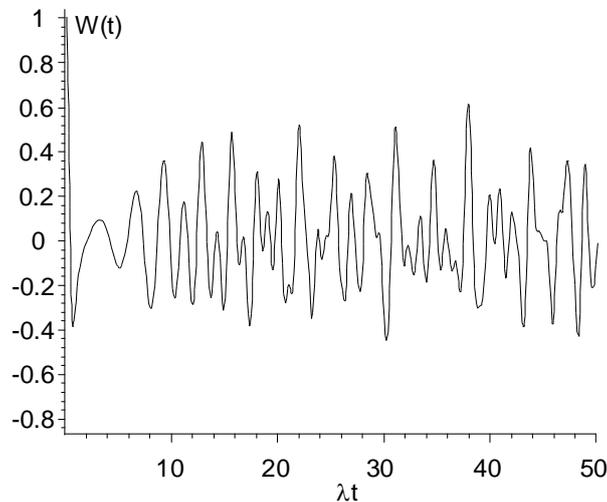
Genauso kann man die Dynamik eines Atoms unter Einfluss eines thermischen Zustands berechnen. Man erhält

$$W_{th}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos\left(2\Omega_0 t \sqrt{n+1}\right),$$

mit der thermischen Verteilung

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}.$$

Für $\bar{n} = 5$ sieht das so aus:



Es gibt klare Unterschiede zum kohärenten Zustand! Die Photonenzahlen haben also einen großen Einfluss auf die Dynamik, mit der die Energie ausgetauscht wird. Diese Effekte können klassisch nicht erklärt werden!

- Dressed States

Wir betrachten das Gesamtsystems aus Lichtmode und Atom. Als abgeschlossenes System hat es Energie-Eigenzustände, die wir jetzt bestimmen. Übergänge können nur zwischen den Zuständen

$$|e\rangle|n\rangle \Leftrightarrow |g\rangle|n+1\rangle$$

stattfinden. Der Hamilton lautet gemäß oben

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 + \hbar\omega a^+a + \hbar\Omega_0(a\sigma_+ + a^+\sigma_-),$$

In der Basis der Produktzustände

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= |e\rangle|n\rangle \\ |\Psi_2\rangle &= |g\rangle|n+1\rangle, \end{aligned}$$

lauten die Matrixelemente:

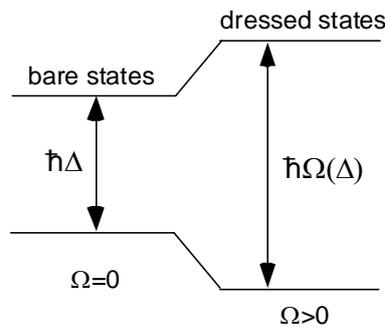
$$\langle\Psi_i|H|\Psi_j\rangle = H_{ij}.$$

Also

$$H = \hbar \begin{pmatrix} n\omega + \frac{\omega_0}{2} & \Omega_0\sqrt{n+1} \\ \Omega_0\sqrt{n+1} & (n+1)\omega - \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix}$$

mit den Energieeigenwerten

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \pm \frac{1}{2}\hbar\Omega(\Delta) \\ \Omega(\Delta) &:= \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_0^2(n+1)} \quad \Delta := \omega_0 - \omega \end{aligned}$$



Die Eigenzustände ("dressed states") lauten:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \cos\frac{\phi}{2}|\Psi_1\rangle + \sin\frac{\phi}{2}|\Psi_2\rangle \\ |-\rangle &= -\sin\frac{\phi}{2}|\Psi_1\rangle + \cos\frac{\phi}{2}|\Psi_2\rangle \end{aligned}$$

mit dem "Mischungswinkel"

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan\left(\frac{\Omega(0)}{\Delta}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{2\Omega_0\sqrt{n+1}}{\Delta}\right)\end{aligned}$$

Für kleine Photonenzahl ist ϕ klein und

$$\begin{aligned}|+\rangle &\rightarrow |\Psi_1\rangle && \text{angeregter Atomzustand} \\ |-\rangle &\rightarrow |\Psi_2\rangle && \text{Grundzustand}\end{aligned}$$

Für $\Delta > 0$ (rote Verstimmung) gilt dann: Durch die Kopplung an das Licht wird der Grundzustand energetisch abgesenkt und der angeregte Zustand angehoben. Dies ist der "AC-Stark-Effekt" oder "Lichtverschiebung". Die Atome suchen den Bereich niedrigster Energie und werden daher in das Lichtfeld hineingezogen. Das Lichtfeld bildet ein konservatives Potential für Atome. Atome können in Laserstrahlen gefangen werden (optische Diplofalle).

- Erweiterung auf beliebige Lichtzustände

Der Lichtzustand $|\Psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$ kommt in Kontakt mit einem angeregten Atom:

$$|\Psi\rangle_{tot} = |\Psi\rangle|e\rangle = \sum_n C_n |n\rangle|e\rangle$$

Den Zustand $|n\rangle|e\rangle$ kann man als Linearkombination der entsprechenden dressed states ausdrücken:

$$|n\rangle|e\rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right)|+\rangle_n - \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right)|-\rangle_n,$$

so dass

$$|\Psi\rangle_{tot} = \sum_n C_n |n\rangle|e\rangle = \sum_n C_n \cos\frac{\phi_n}{2}|+\rangle_n - \sin\frac{\phi_n}{2}|-\rangle_n$$

Die zeitliche Bewegung des Vektors erhält man durch den Zeitpropagation-Operator:

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_{tot}(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\Psi\rangle_{tot} \\ &= \sum_n C_n \left(\cos\frac{\phi_n}{2}|+\rangle_n \cdot e^{-iE_+(n)t/\hbar} - \sin\frac{\phi_n}{2}|-\rangle_n \cdot e^{-iE_-(n)t/\hbar} \right),\end{aligned}$$

was man leicht numerisch auswerten kann.

Der Mikromaser

Die Gruppe von Serge Haroche an der Ecole Normale Supérieure (ENS) in Paris hat in den letzten 20 Jahren eine Apparatur entwickelt, mit der eine Vielzahl von Quanteneffekten der Wechselwirkung von Photonen mit atomaren Zweiniveausystemen mit großer Genauigkeit und in vielen Details untersucht werden kann. Dafür erhielt Serge Haroche 2012 den Nobelpreis (siehe auch Material HQED). Wir diskutieren hier die grundlegenden Ideen auf der die Anlage beruht.

- Lineare Rydberg-Zustände

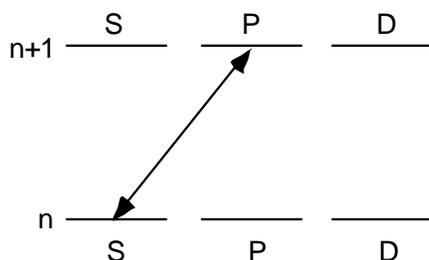
Rydberg-Atome sind Atome mit einem Elektron in einem Zustand hoher Quantenzahl n . Im Prinzip eignen sich alle Alkaliatome. Sie haben ein Valenzelektron mit einer hohen Hauptquantenzahl n . Ein experimentell leicht zu handhabendes Atom ist ^{87}Rb . Das Energiespektrum ist wasserstoffähnlich wie bei allen Rydbergatomen,

$$E_n \simeq \frac{1}{2} m c^2 \frac{\alpha^2}{n^2}.$$

Der Energieabstand benachbarter Zustände ist

$$\omega_0 = \frac{2Ry}{\hbar n^3}$$

wobei $Ry = 13,6\text{eV}$ (Rydberg).



Übergänge zwischen Rydbergatomen haben ein ungewöhnlich großes Dipolmatrixelement

$$d \simeq n^2 \cdot q \cdot a_0$$

mit der Elementarladung q und dem Bohrradius a_0 . Die Zustände haben eine lange Lebensdauer. Die spontane Zerfallsrate zwischen zwei Zuständen beträgt:

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}.$$

Da

$$d^2 \sim n^4$$

und

$$\omega_0^3 \sim \frac{1}{n^9}$$

gilt

$$\Gamma \sim \Gamma_0 \cdot n^{-5},$$

wobei

$$\Gamma_0 = \frac{c\alpha^4}{a_0} \sim 10^9 \frac{1}{s}$$

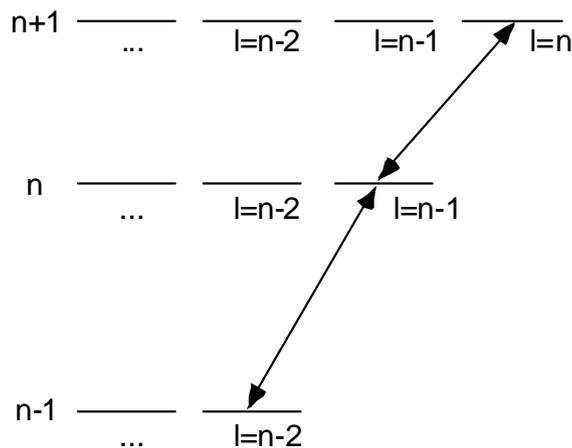
(α ist die Feinstrukturkonstante). Bei typischerweise $n = 50$ ist die Lebensdauer

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \sim 0.1s.$$

Lineare Rydbergzustände mit $l \ll n$ können in viel Endzustände zerfallen und leben tatsächlich deutlich kürzer. Besser sind zirkulare Rydbergzustände.

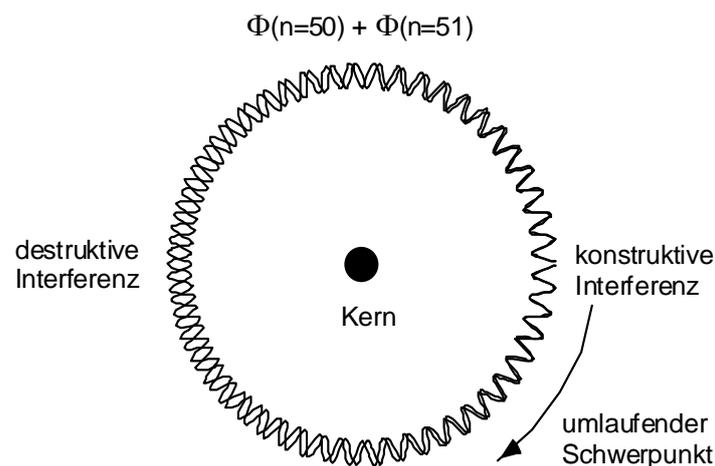
- Zirkulare Rydbergzustände

Zu jeder Hauptquantenzahl n gibt es n Zustände mit dem Drehimpuls $l = 0, 1, 2, \dots, l_{\max}$ mit $l_{\max} = n - 1$. Im Mikromaser verwendet man die so genannten zirkularen Rydbergzustände mit $l = l_{\max}$. Zwei benachbarte Rydberg-Zustände bilden dann ein Zweiniveausystem: Wegen der Auswahlregel $\Delta l = 0, \pm 1$ kann der obere Zustand $|n+1, l=n\rangle$ nur an den Zustand $|n, l=n-1\rangle$ koppeln. Zirkulare Rydbergzustände leben länger als linear Zustände, da der Zustand nur in einen Zustand mit um eins veringert Hauptquantenzahl zerfallen kann. Die Drehimpulsquantenzahl kann sich auch nur um eins verringern, so dass es nur einen Zustand gibt, in den der Startzustand zerfallen kann. Für einen linearen Rydbergzustand mit $l \ll n$ gibt es viele Zerfallsmöglichkeiten in Endzustände mit unterschiedlichem n und $\Delta l = 0, \pm 1$.



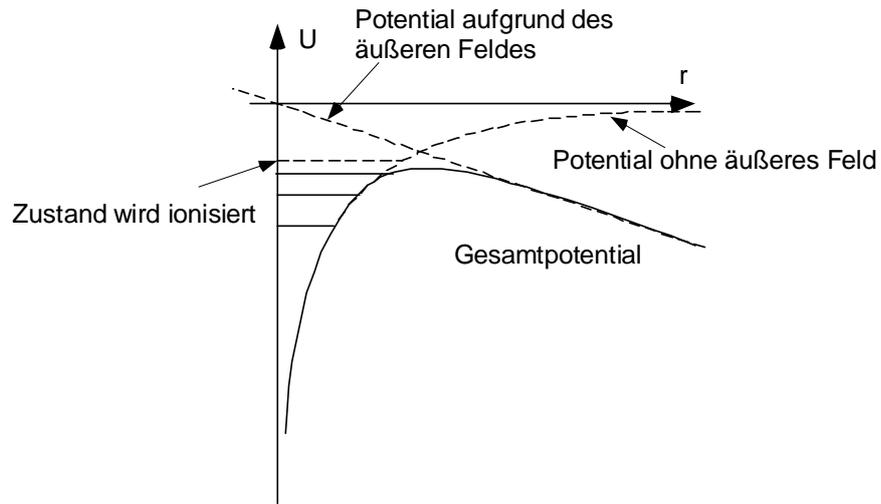
- Überlagerung zirkularer Rydbergzustände

Die Wellenfunktion eines zirkularen Rydbergzustands kann man sich wie eine laufende "ebene" Welle vorstellen, die sich auf einer Kreisbahn um den Kern windet. Die Welle hat dabei l_{\max} Knoten. Befindet sich das Elektron in einer Überlagerung aus zwei Rydbergzuständen, kann man sich den Überlagerungszustand wie die Überlagerung der beiden beteiligten Kreiswellen vorstellen wobei sich die Zahl der Wellenbäuche bei einem Umlauf gerade um eins unterscheidet. Zu einem bestimmten Zeitpunkt erhält man konstruktive Interferenz an einer Stelle auf der Kreisbahn und destruktive Interferenz gerade an der gegenüberliegenden Stelle des Kreises. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion hat also ein Übergewicht an der konstruktiv interferierenden Stelle und das Elektron hält sich dort im Mittel häufiger auf als an der konstruktiv interferierenden Stelle. Berücksichtigt man die zeitliche Schwebung der beiden Wellen, so bewegt sich der Schwerpunkt des Orts des Elektrons auf einer Kreisbahn um den Kern mit einer Kreisfrequenz, die gerade dem Energieabstand der beiden Zustände entspricht. Das Elektron läuft wie ein Zeiger einer Uhr um den Kern.

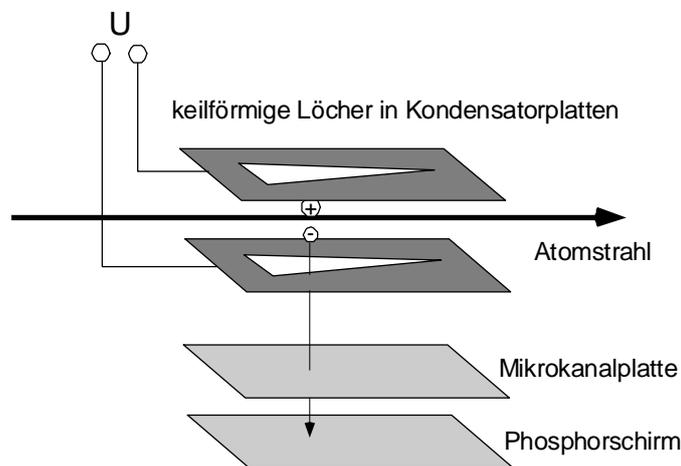


- Nachweis durch Feldionisation

Durch ein äußeres Feld wird die Ionisationsschwelle abgesenkt und das Elektron kann dem Kern entkommen. Bei wachsender Feldstärke wird ein Rydberg-Zustand nach dem anderen ionisiert.



Dies kann man ausnutzen, um die Besetzung der einzelnen Zustände zu messen. Dazu lässt man die Rydberg-Atome durch ein sich räumlich veränderndes elektrisches Feld laufen. Bei einer bestimmten Feldstärke und damit an einem bestimmten Ort wird das Atom ionisiert. Den Ort der Ionisation kann man auf einem Phosphorschirm sichtbar machen. Dies ist möglich, wenn man das Elektron in einer Mikrokanalplatte vervielfacht. Eine solche Platte besitzt ein Raster aus kleinen Röhrcchen, die jedes wie Elektronenvervielfacher wirken.

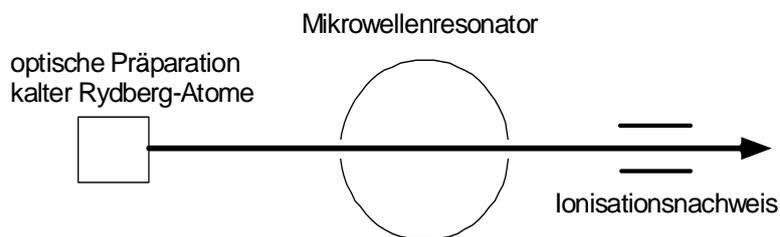


Die Atome werden an der Stelle entlang des Strahls ionisiert, an der das äußere elektrische Feld gerade den besetzten Zustand freisetzt. Je größer die Hauptquantenzahl des besetzten Zustands umso weiter vorne im Strahl wird das Atome ionisiert. Die

Besetzung der Rydbergzustände kann so an der Helligkeitsverteilung auf dem Phosphorschirm abgelesen werden.

- Atom-Photon-Wechselwirkung im Mikromaser

Rubidium wird optisch mit Hilfe von Lasern in den Zustand $n = 50$ angeregt. Auf den Frequenzabstand zum Zustand mit $n = 51$ von $\omega_0 = 2\pi \cdot 51,1 \text{GHz}$ ist ein Mikrowellenresonator abgestimmt. Zusammen mit der großen Polarisierbarkeit der Rydbergatome erhält man eine starke Kopplung zwischen dem Atom und der Resonatormode. Die Atome fliegen einzeln durch den Resonator. Die atomare Geschwindigkeit kann eingestellt werden und damit die Wechselwirkungszeit. Der atomare Anregungszustand wird nach Austritt mit dem Ionisationsdetektor nachgewiesen.



Thermische Schwarzkörperstrahlung macht unerwünschte Übergänge zwischen den Rydberg-Zuständen. Daher muss man den Resonator abkühlen auf unter $1K$.

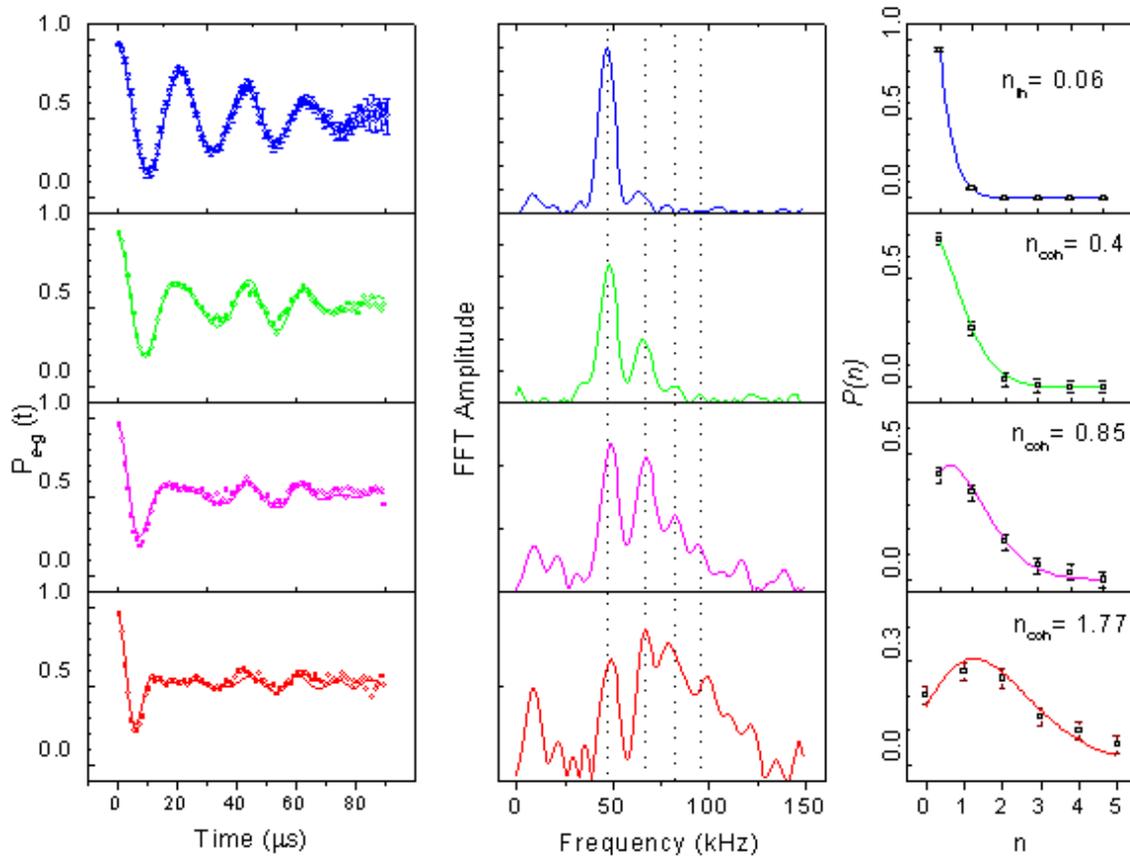
Die gewünschten Photonen sollen möglichst lange im Resonator überleben. Die derzeit erreichte Lebensdauer beträgt etwa 100ms oder 10^9 optische Perioden. Spontane Emission ist bei den niedrigen Frequenzen vernachlässigbar. Man kann den Resonator mit Photonen über einen Mikrowellensender befüllen. Man kann auch angeregte Atome in den Resonator schicken und die Flugzeit auf eine halbe Rabiperiode anpassen. Das Atom emittiert dann ein Photon und verlässt den Resonator im Grundzustand. Wir betrachten jetzt eine Auswahl an Messungen, die mit dem Mikromaser durchgeführt wurden.

Rabioszillation und Revival

- Atomare Dynamik bei zeitlich konstantem Lichtzustand

Die linke Spalte enthält die Besetzung des angeregten Zustands für verschiedene Wechselwirkungszeiten der Atome im Resonator. Bei der oberen Reihe enthält der Resonator thermische Strahlung mit einer mittleren Photonenzahl von $\bar{n} = 0.06$. Bei den drei folgenden Reihen enthält der Resonator kohärente Zustände mit wachsender mittlerer Photonenzahl. Die Dynamik ändert sich und man erhält, wie oben berechnet, eine andere Überlagerung von Schwingungen. In der mittleren Spalte sieht man die Fouriertransformation der linken Spalte und erkennt deutliche Maxima bei den erwarteten

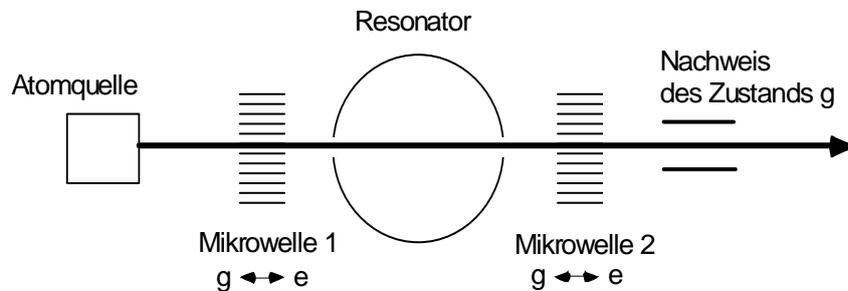
Frequenzen $\Omega_0\sqrt{n+1}$ (gestrichelte Linien). Die rechte Spalte enthält die Besetzung der Fockzustände im Resonator.



Quantum Nondemolition Messungen

- Präparation der Atome in Überlagerungszustände

Mit einem Mikrowellenfeld vor dem Resonator kann das Atom durch einen $\pi/2$ Puls in eine Überlagerung der Zustände $|n = 50\rangle$ und $|n = 51\rangle$ gebracht werden.



Das Atom bekommt dadurch ein Dipolmoment, das um die Achse senkrecht zum Mikrowellenfeld mit einer Frequenz rotiert, die dem Energieabstand der beiden Zustände entspricht (siehe oben). Wir vernachlässigen den Resonator für einen Augenblick und betrachten die zweite Mikrowelle, die in Phase mit der ersten schwingt. Die zweite Mikrowelle hat damit dieselbe Wirkung wie die erste und beide zusammen ergeben einen π -Puls, so dass das Atom am Ende den Zustand gewechselt hat.

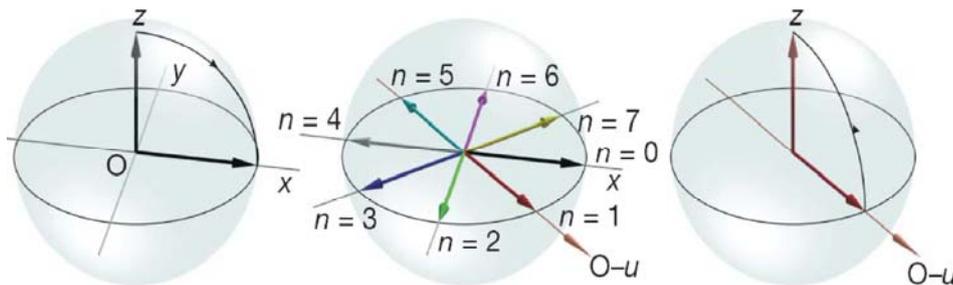
- Zerstörungsfreies Messen des Resonatorfeldes

Der Resonator ist relativ zum Übergang rotverstimmt. Falls sich Licht im Resonator befindet, erhält man dann aufgrund des AC-Starkeffekts eine Absenkung des Grundzustands und eine Anhebung des abgeregten Zustands. Damit rotiert der elektrische Dipol im Resonator schneller. Nach dem Durchflug durch den Resonator hat sich eine größere Phase angesammelt. Die Lichtverschiebung und damit die Phasendrehung ist proportional zu Intensität, also zur Photonenzahl im Resonator. Die Messung der Phase ist damit eine Messung der Energie des Lichtzustands. Beträgt die im Resonator angesammelte Phase eine ungerade Anzahl von π , wird die zweite Mikrowelle den Übergang nicht vervollständigen sondern im Gegenteil die Überlagerung rückgängig machen. Der Zustand wird nicht geändert. Nach dem Durchflug hat man jedoch Information über die Intensität im Resonator erhalten, ohne Energie ausgetauscht zu haben. Man spricht von einer "quantum nondemolition" Messung.

- Messung des Lichtzustands im Resonator durch QND-Messungen

Man stellt die Durchflugszeit auf einen Wert, bei dem ein Nummernzustand mit 8 Photonen einen Phasendrehung von 2π erzeugt. Ein Zustand $|n\rangle$ dreht die Phase dann um

$$\varphi_n = n \cdot \frac{2\pi}{8}$$



Die Phase θ_n der zweiten Mikrowelle relativ zur ersten Mikrowelle wird so eingestellt, dass ein bestimmter Nummernzustand $|n\rangle$ gerade mit der Wahrscheinlichkeit 1 zurück in den Ausgangszustand gedreht wird. Beträgt die Relativphase $\theta_4 = 0$ so wird z.B.

der Zustand mit $n = 4$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 zurück in den Anfangszustand gedreht während der Zustand mit $n = 0$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 den Übergang macht. Der Zustand mit $n = 2$ und $n = 6$ wird durch die zweite Mikrowelle gar nicht beeinflusst und die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang ist 0.5. Beträgt $\theta_1 = \frac{5}{4}\pi$ so wird der Zustand mit $n = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1 zurück in den Ausgangszustand gedreht etc.

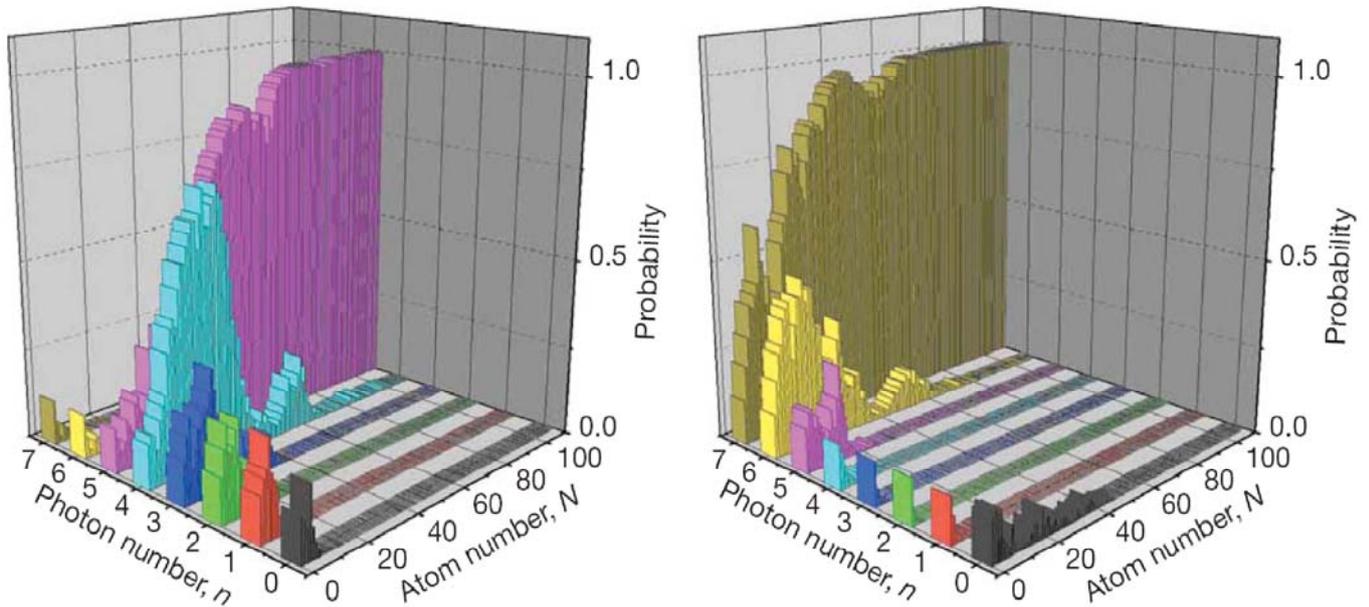
- Projektion auf einen Nummernzustand durch QND-Messungen

Für eine Messung wählt man den Winkel θ_n statistisch aus den Werten $\theta \in \{\theta_0, \theta_1, \theta_6, \theta_7\}$ aus und misst die Besetzung des atomaren Zustands (eine andere Auswahl wäre auch möglich). Die verschiedenen Winkeln werden mit den Buchstaben a,b,c,d bezeichnet. Jede Messung liefert Information über den Zustand.

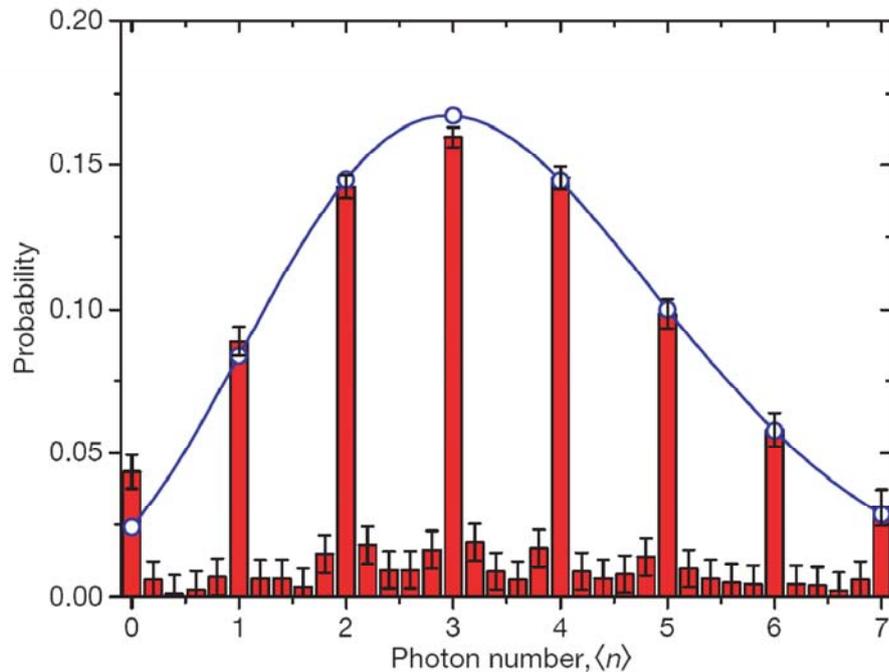
<i>j</i>	1101111111110011101101111
<i>i</i>	ddcbccabcbdaadaabaddbabc
<i>j</i>	0101001101010101101011111
<i>i</i>	dababbaacbccdadccdbaaacc

<i>j</i>	0001000110110000001010110
<i>i</i>	ddcaddabbccdcdbcaabbccab
<i>j</i>	0001010100000100011101101
<i>i</i>	bcdaddaabbbbdbdcdccadaada

Jeder Kasten zeigt eine unabhängig Messung von 50 Einzelmessungen. Wenn man mit einem kohärenten Zustand beginnt, hat die Messung eines Atoms den Lichtzustand geändert. Misst man z.B. bei θ_n für das durchgeflogene Atom keinen Übergang, so weiß man, dass der Zustand $n = 1$ mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit vorkommt. Bei anderen Winkeln werden weiter Nummernzustände bestätigt, so dass sich der Zustand des Lichts im Resonator während der Messung entwickelt. Es zeigt sich, dass sich nach etwa 100 Messungen ein reiner Nummernzustand einstellt. Die Abbildung zeigt zwei solcher Messungen.



In der ersten Messung stellt sich der Zustand $|n = 5\rangle$ ein und bei der zweiten Messung der Zustand $|n = 7\rangle$. Wiederholt man die Messung, kann jetzt eine anderer Nummernzustand herauskommen. Man kann also während der Messung beobachten, wie das System sich durch die Messung in einen Energieeigenzustand entwickelt. Man kann jedoch nicht vorhersagen in welchen. Das Experiment zeigt im Detail, wie bei einer Messung der Anfangszustand kollabiert! Macht man ein ganze Reihe solcher Messungen und erstellt ein Histogramm über die sich einstellenende Nummernzustände, erhält man wieder die Wahrscheinlichkeitsverteilung des kohärenten Anfangszustands.



Verschränkte Zustände

Wir betrachten jetzt zwei Atome. Der Mikromaser kann zwei Atome, die sich nie nahe gekommen sind, miteinander verschränken d.h. in eine Beziehung bringen, die sich nur quantenmechanisch verstehen lässt und keine klassische Analogie besitzt. Einstein hat die Existenz solcher Zustände nie akzeptieren wollen, obwohl er viel zu ihrer Klärung beigetragen hat. Verschränkte Zustände werden heute für die Quantenkryptographie verwendet und sind höchst real. Wir beginnen zunächst mit dem Gegenteil von verschränkten Zuständen, den Produktzuständen.

- Produktzustände.

Zwei völlig unabhängige Teilchen bilden einen Produktzustand, z. B. zwei Teilchen, jedes entweder im Zustand mit der Quantenzahl $q = +$, oder $q = -$.

$$\Psi = \underset{\text{Raum von Teilchen 1}}{|q_1\rangle} \otimes \underset{\text{Raum von Teilchen 2}}{|q_2\rangle}$$

Es gibt also vier Zustände:

$$\begin{array}{ll} |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle & \text{beide Teilchen im Zustand up} \\ |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle & \text{Teilchen 1 in down, Teilchen 2 in up} \\ |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle & \text{Teilchen 2 in down, Teilchen 1 in up} \\ |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle & \text{beide Teilchen im Zustand down} \end{array}$$

Beide Zustände sind unabhängig: Eine Messung an Teilchen 1 beeinflusst den Zustand von Teilchen 2 nicht. Für einen Zustand $|q_1\rangle|q_2\rangle$ ist z.B. die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen 2 im Zustand $|\uparrow\rangle$ anzutreffen unabhängig von Teilchen 1:

$$\begin{aligned} P_{q_2=\uparrow} &= |\langle\uparrow|\langle\uparrow|q_1\rangle|q_2\rangle|^2 + |\langle\uparrow|\langle\downarrow|q_1\rangle|q_2\rangle|^2 \\ &= |\langle\uparrow|q_2\rangle|^2 (|\langle\uparrow|q_1\rangle|^2 + |\langle\downarrow|q_1\rangle|^2) \\ &= |\langle\uparrow|q_2\rangle|^2 \end{aligned}$$

- Verschränkt Zweiteilchenzustände

Ein verschränkter Zustand ist eine Linearkombination von Zuständen die sich nicht als Produktzustand schreiben lässt. Also z.B.

$$|\Psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle$$

Die Wahrscheinlichkeit Teilchen 2 im Zustand \uparrow zu messen berechnet sich jetzt für den ersten Fall so:

$$\begin{aligned} P_{q_2=\uparrow} &= |\langle\uparrow|\langle\uparrow|\Psi\rangle|^2 + |\langle\uparrow|\langle\downarrow|\Psi\rangle|^2 \\ &= |\langle\uparrow|\langle\uparrow|(\alpha|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle)|^2 + |\langle\uparrow|\langle\downarrow|(\alpha|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle)|^2 \\ &= |\alpha\langle\uparrow|\langle\uparrow|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta\langle\uparrow|\langle\uparrow|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|^2 + |\alpha\langle\uparrow|\langle\downarrow|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta\langle\uparrow|\langle\downarrow|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|^2 \\ &= |\alpha|^2 \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für die Wahrscheinlichkeit Teilchen 1 in Zustand \uparrow anzutreffen ebenfalls $|\alpha|^2$. Zwar sind beide Wahrscheinlichkeiten gleich, was aber noch nicht bedeutet, dass im Einzelfall beide Teilchen denselben Zustand haben. Um das herauszufinden muss man die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen, also die Wahrscheinlichkeit mit der sich beide Teilchen im selben Zustand befinden:

$$\begin{aligned} &P_{q_1=\uparrow, q_2=\uparrow} + P_{q_1=\downarrow, q_2=\downarrow} \\ &= |\langle\uparrow|\langle\uparrow|\Psi\rangle|^2 + |\langle\downarrow|\langle\downarrow|\Psi\rangle|^2 \\ &= |\langle\uparrow|\langle\uparrow|(\alpha|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle)|^2 + |\langle\downarrow|\langle\downarrow|(\alpha|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle)|^2 \\ &= |\alpha\langle\uparrow|\langle\uparrow|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta\langle\uparrow|\langle\uparrow|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|^2 + |\alpha\langle\downarrow|\langle\downarrow|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta\langle\downarrow|\langle\downarrow|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|^2 \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{aligned}$$

Beide Teilchen sind also garantiert im selben Zustand. In welchem der beiden möglichen Zustände weiß man nicht. Man kann lediglich eine Wahrscheinlichkeit angeben ($|\alpha|^2$, bzw. $|\beta|^2$).

Übung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Teilchen im selben Zustand sind für den verschränkten Gesamtzustand

$$|\Psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle?$$

Nicht jede Linearkombination ist verschränkt. Zum Beispiel kann man

$$|\Psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + \beta |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle$$

umformen in:

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle \cdot (\alpha |\downarrow\rangle + \beta |\uparrow\rangle),$$

was ein Produktzustand ist.

- Erzeugung verschränkter Atompaaire mit dem Mikromaser

Ein angeregtes Atom durchläuft den leeren Resonator. Im Resonator entwickelt sich der Gesamtzustand gemäß des obigen Ausdrucks für die allgemeine Lösung unter den speziellen Anfangsbedingungen, d. h. alle $C_n = 0$ bis auf C_0 .

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= -iC_0 \sin\left(\frac{\Omega_{n=0}}{2}t\right) \cdot |1\rangle_c |g\rangle_1 + C_0 \cos\left(\frac{\Omega_{n=0}}{2}t\right) \cdot |0\rangle_c |e\rangle_1 \\ &= C_0 (-i \sin(\Omega_0 t) \cdot |1\rangle_c |g\rangle_1 + \cos(\Omega_0 t) \cdot |0\rangle_c |e\rangle_1). \end{aligned}$$

Die Indizes c und 1 stehen für den Resonator (cavity) und das erste Atom (später kommt noch ein zweites). Stellt man die atomare Geschwindigkeit so ein, dass die Zeit im Resonator t_1 gerade $t_1 \cdot \Omega_0 = \pi/4$ erfüllt, verwandelt sich der Anfangszustand in:

$$|e\rangle_1 |0\rangle_c \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_1 |0\rangle_c - i |g\rangle_1 |1\rangle_c).$$

Schickt man, nachdem Atom 1 den Resonator verlassen hat, ein Grundzustandsatom hinterher (Index 2), erhält man zunächst den Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_c - i |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_c),$$

der sich, während Atom 2 im Resonator ist, zeitlich entwickelt. Der Zustand $|g\rangle_2 |0\rangle_c$ ändert sich dabei nicht (Atom und Resonator beide im Grundzustand), wohl aber

$$|g\rangle_2 |1\rangle_c \rightarrow \cos(\Omega_0 t_2) |g\rangle_2 |1\rangle_c - i \sin(\Omega_0 t_2) |e\rangle_2 |0\rangle_c.$$

Für $\Omega_0 t_2 = \pi/2$ (anders als t_1 !) erhält man schließlich

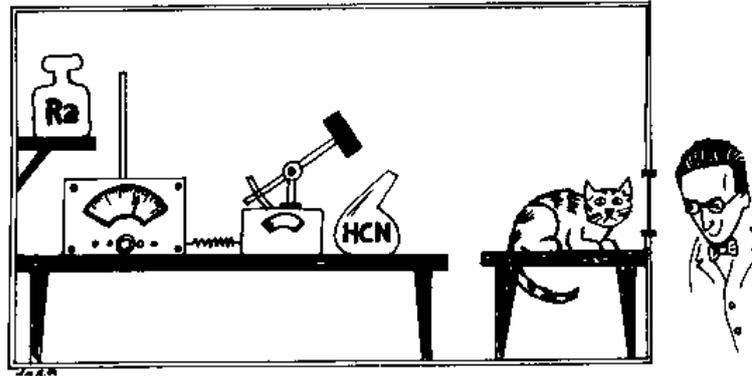
$$|e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_c \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |e\rangle_1 |g\rangle_2 + |g\rangle_1 |e\rangle_2 \right) |0\rangle_c$$

d. h. der Resonator ist wieder leer, aber die Anregung hat sich auf beide Atome verteilt. Man kann nicht sagen welches der beiden Atome angeregt ist, sondern nur, dass eines der beiden angeregt ist das andere aber nicht. Dies ist ein verschränkter Zustand. Die beiden Atome stehen nicht in Kontakt miteinander sondern können räumlich weit getrennt sein (abhängig von der Lebensdauer des Photons im Resonator). Misst man eines der beiden Atome im angeregten Zustand so weiß man instantan, dass sich das andere im Grundzustand befinden muss. Beide Atome zusammen bilden einen räumlich ausgedehnten globalen Zustand, der bei einer Messung als ganzes reduziert wird, (Das ist die von Einsteins nicht akzeptierte "geisterhafte Fernwirkung"). Zwei Atome sind durch einen ausgedehnten gemeinsamen Zustand miteinander verknüpft.

Schrödinger Katze

- Schrödingers Gedankenexperiment

Kann man auch einen verschränkten Zustand zweier klassischer Zustände erzeugen? Eine solche Überlagerung wäre ein sogenannter Katzen-Zustand. Der Ausdruck stammt von einem Gedankenexperiment von Erwin Schrödinger, der damit die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik ad absurdum führen wollte:



Ein radioaktives Isotop befindet sich während des Zerfalls in einer Überlagerung

$$\Psi_{Kern} = \alpha \cdot |Kern\rangle + \beta \cdot |Tochterkern + \alpha\text{-Teilchen}\rangle.$$

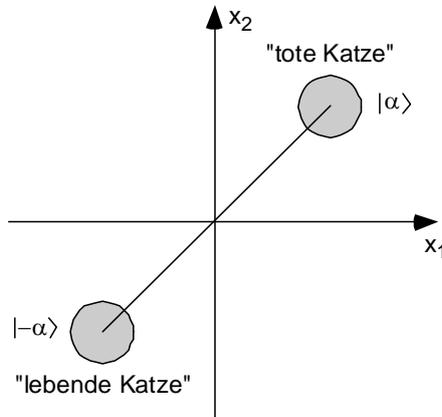
Reduziert sich bei einer Messung der Zustand in seinen ersten Teil so lebt die Katze, findet man das System im zweiten Teil, so ist die Katze tot, da das α -Teilchen einen, durch einen Geigerzähler gesteuerten Giftmechanismus ausgelöst hat. Das Experiment startet im Zustand $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, also mit lebender Katze und nicht zerfallenem Kern. Wie fühlt sich die Katze nach einiger Zeit, in der sich der Zustand des Kerns verändert hat so, dass jetzt $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$? Ist die Katze ebenfalls in eine Überlagerungszustand übergegangen

$$\Psi_{Katze} = \alpha \cdot |lebendig\rangle + \beta \cdot |tot\rangle ?$$

Da noch niemand eine Katze gesehen hat, die sowohl tot als auch lebendig ist war Schrödinger davon überzeugt, dass ein solcher Zustand nicht möglich ist und damit die Kopenhagener Deutung etwas übersieht. Heute ist allgemeine Lehrmeinung, dass es einen solchen Katzenzustand sehr wohl geben kann und dass die Kopenhagener Deutung stimmt. Natürlich sind Katzenzustände keine trivialen Objekte und daher nach wie vor ein spannendes Forschungsthema. Uns werden solche Zustände noch ausführlich in Kapitel 5 begegnen. Die Schwierigkeit Katzenzustände herzustellen liegt in ihrer enormen Empfindlichkeit auf Störungen durch die Umgebung. Unter normalen Umständen zerfällt daher ein Katzenzustand fast sofort.

- Schrödingerkatze mit kohärenten Zuständen

Der Katzenzustand mit Photonen entspricht einer Überlagerung zweier kohärenter Zustände mit entgegengesetzter Phase:

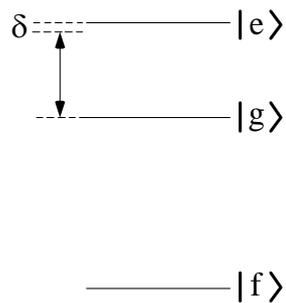


$$|\Psi\rangle = |\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$$

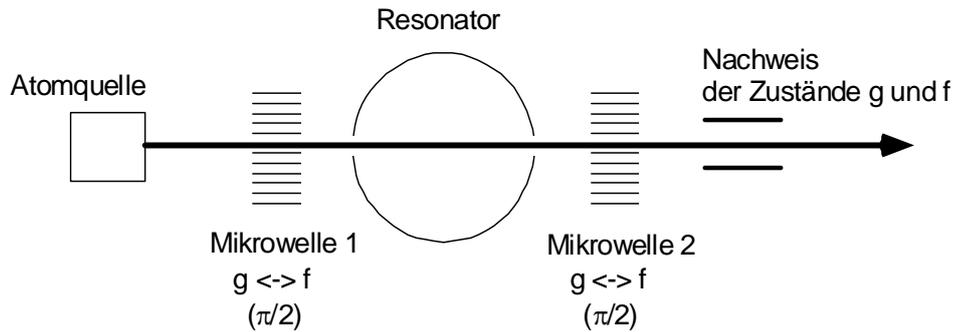
Dies entspricht einer klassischen elektromagnetischen Welle mit einer Phase, die um π unbestimmt ist.

- Herstellung eines Katzenzustands mit dem Mikromaser

Zwei Niveaus ($|e\rangle$ und $|g\rangle$) werden durch die Mikrowelle im Resonator gekoppelt. Die Mikrowelle ist leicht verstimmt. Ein drittes Niveau ($|f\rangle$) sieht die Mikrowelle im Resonator aufgrund der großen Verstimmung nicht.



Außerhalb des Resonators gibt es zwei zusätzliche Mikrowellen, die die Zustände $|g\rangle$ und $|f\rangle$ koppeln.



Das Atom wird in Überlagerung aus $|g\rangle$ und $|f\rangle$ gebracht. Im Resonator befindet sich ein klassischer Feldzustand $|\alpha\rangle$. Das Atom durchläuft den Resonator. Im Zustand $|f\rangle$ hat es keinen Einfluss auf das Feld. Im Zustand $|g\rangle$ wirkt es dort wie ein Medium mit Brechungsindex. Die Resonatorfrequenz verringert sich und damit die Energie des Zustands $|\alpha\rangle$. Das Feld propagiert langsamer und sammelt, bei richtig gewählter Durchflugzeit des Atoms, um π weniger Phase auf als ohne Atom. Das Atom enthält nach Durchflug die Information über die Phase von $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} \text{Atom in } |g\rangle &\rightarrow |-\alpha\rangle \\ \text{Atom in } |f\rangle &\rightarrow |\alpha\rangle \end{aligned}$$

Diese Information wird durch zweite Mikrowelle vernichtet.

$$\begin{aligned} \text{Atom in } |g\rangle &\rightarrow |g\rangle + |f\rangle \\ \text{Atom in } |f\rangle &\rightarrow |g\rangle - |f\rangle. \end{aligned}$$

Misst man im Detektor das Atom im Zustand $|f\rangle$, so weiss man nicht, ob das Atom vorher in $|g\rangle$ oder $|f\rangle$ war, bzw. ob der Resonator in $|\alpha\rangle$ oder $|-\alpha\rangle$ ist. Resultat einer ausführlichen Rechnung (siehe Knight) ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Atom in } |f\rangle &\quad \text{Resonator in } |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle \\ \text{Atom in } |g\rangle &\quad \text{Resonator in } |\alpha\rangle - |-\alpha\rangle \end{aligned}$$

oder für den Gesamtzustand:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} (|g\rangle (|-\alpha\rangle - |\alpha\rangle) + |f\rangle (|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle)).$$

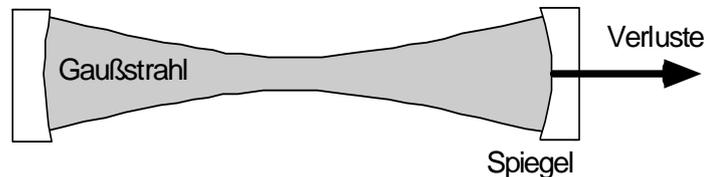
Die beiden Resonatorzustände sind Katzenzustände. Der Gesamtzustand ist eine Verschränkung der beiden Atomzuständen mit den beiden Katzenzuständen.

Chapter 3

Quanten-Messprozess

Quantensprünge und Mastergleichung

Zur Untersuchung von physikalischen Vorgängen muss man diese zunächst vom Rest der Welt trennen, damit man weiß, wovon man eigentlich redet. Dies ist ein unmittelbar einleuchtendes wissenschaftliches Prinzip, dass sich allerdings streng praktisch nicht verwirklichen lässt. Für eine vollständige Beschreibung ist es also nötig, sich Klarheit über den Einfluss der Umwelt zu verschaffen. Für Quantensysteme gilt das ganz besonders. Sie sind wesentlich empfindlicher auf Störungen als klassische Systeme und es ist weniger die Frage ob, sondern mehr in welchem Maße man überhaupt die Umwelteinflüsse heraushalten kann.



Eine Lichtmode endet immer irgendwo, z.B. oft auf einem Detektor oder einfach nur an einer Wand (jedes Labor ist endlich). Hier tritt also die Umwelt bereits in drastischer Form in Erscheinung. Eine besser isolierte Mode wäre die eines Resonators hoher Güte. Die Kopplung an die Umwelt tritt allerdings auch bei den besten Spiegeln durch kleinste Störungen an den Spiegeloberflächen auf. Bei jeder Reflektion wird ein Photon mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit aus der Resonatormode gestreut. Besteht unser Quantensystem aus einem Photon im Resonator so zerfällt die photonische Anregung mit einer gewissen Rate durch Ankopplung an ein "Reservoir", das aus allen Moden besteht, die außerhalb des Resonators liegen. Die zeitliche Entwicklung solcher kleinen Quantensysteme, die an ein äußeres, großes Reservoir angekopplt sind, wird allgemein durch eine sogenannte "Master-Gleichung" beschrieben. Wir wollen hier aber keine Reservoirtheorie betreiben, sondern die Master-Gleichung mit Hilfe von Quantensprüngen zumindest motivieren. Diese Überlegungen bilden auch die Grundlage der "Quanten Monte Carlo Methode" mit der sich vor allem

Quantensysteme, die aus vielen Teilchen bestehen, numerisch sehr effizient behandeln lassen. In diesem Kapitel wird die Dichtematrix eingeführt und deren Zerfall durch die Mastergleichung. An einigen Beispielen wird die Gleichung illustriert. Wir sparen uns eine stringente Theorie sondern schöpfen hier nur die wissenschaftliche Sahne ab. Ziel ist es, ein Gefühl für die Begriffe zu bekommen und dafür, wie sie funktionieren.

Dichtematrix

Um den Einfluss eines Reservoirs zu beschreiben wird das System zweckmäßigerweise im Dichtematrixformalismus beschrieben. Wir betrachten zunächst so genannte

- Reine Zustände.

Statt mit Hilfe eines Zustands $|\Psi\rangle$ beschreibt man das System mit der so genannten Dichtematrix

$$\rho := |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

Den Erwartungswert eines beliebigen Operators O erhält man dann durch

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho \cdot O),$$

wobei man zur konkreten Berechnung der Spur eine Basis $|\varphi_n\rangle$ benötigt.

$$\text{Tr}(O) := \sum_n \langle \varphi_n | O | \varphi_n \rangle.$$

Der Zusammenhang zwischen Spur und Erwartungswert ergibt sich dann direkt:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho \cdot O) &= \sum_n \langle \varphi_n | \rho \cdot O | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \langle \varphi_n | \Psi \rangle \langle \Psi | O | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \langle \Psi | O | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | O | \Psi \rangle = \langle O \rangle. \end{aligned}$$

Die zeitliche Entwicklung des Dichteoperators ist durch die sogenannte Von Neumann Gleichung gegeben, die bis auf ein Vorzeichen der Heisenberggleichung für den Dichtematrixoperator entspricht:

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H].$$

Dass dem so ist lässt sich leicht zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\Psi\rangle\langle\Psi| &= |\dot{\Psi}\rangle\langle\Psi| + |\Psi\rangle\langle\dot{\Psi}| \\ &= \frac{1}{i\hbar} H |\Psi\rangle\langle\Psi| + |\Psi\rangle \frac{1}{-i\hbar} \langle\Psi| H \\ &= -i \frac{1}{\hbar} H \rho + i \frac{1}{\hbar} \rho H = \frac{i}{\hbar} [\rho, H]. \end{aligned}$$

- Darstellung

Die Dichtematrix wird zur Matrix, wenn man sie in einer bestimmten Darstellung schreibt, also die Matrixelemente zu einer bestimmten Basis $|\varphi_i\rangle$ berechnet

$$\begin{aligned}\rho_{jk} &= \langle \varphi_j | \rho | \varphi_k \rangle = \langle \varphi_j | \Psi \rangle \langle \Psi | \varphi_k \rangle \\ &= c_j \cdot c_k^*\end{aligned}$$

wobei $c_n := \langle \varphi_n | \Psi \rangle$ die Zustände Ψ in der Darstellung φ_n sind.

- Eigenschaften der Spur

Die Spur hat einige interessante Eigenschaften, die man verwenden kann um Erwartungswerte zu berechnen.

1. Sie ist linear

$$Tr(\lambda a + \mu b) = \lambda Tr(a) + \mu Tr(b)$$

2. Sie vertauscht mit der Ableitung

$$\frac{d}{dt} Tr(a) = Tr\left(\frac{d}{dt} a\right)$$

3. Sie ist invariant gegenüber Permutationen

$$Tr(abc) = Tr(bca) = Tr(cab),$$

insbesondere dann auch gegen Vertauschungen

$$Tr(ab) = Tr(ba).$$

4. Sie ist unabhängig von der Basis, in der man sie bildet.

Das sieht man mit folgender Argumentation. Die Spur eines Operators O lautet in einer Basis ψ_i :

$$Tr(O) = \sum \langle \psi_i | O | \psi_i \rangle$$

Die Basis wird jetzt durch eine unitäre Operation U in eine andere Basis transformiert

$$\varphi_i = U\psi_i.$$

Auflösen nach ψ_i

$$\psi_i = U^{-1}\varphi_i$$

und einsetzen liefert

$$Tr(O) = \sum \langle U^{-1}\varphi_i | O | U^{-1}\varphi_i \rangle = \sum \langle \varphi_i | (U^{-1})^+ O U^{-1} | \varphi_i \rangle.$$

Unter Verwendung der Invarianz gegenüber Permutationen erhält man

$$\text{Tr}(O) = \sum \langle \varphi_i | U^{-1} (U^{-1})^+ O | \varphi_i \rangle = \sum \langle \varphi_i | O | \varphi_i \rangle.$$

Im letzten Schritt wurde die Eigenschaft unitärer Operatoren verwendet, dass

$$U^{-1} = U^+$$

Die Spur ist also eine Eigenschaft des abstrakten Operators und unabhängig von dessen Darstellung.

- **Eigenzustände des Hamiltons**

Die Dichtematrix eines Eigenzustands $|\Psi\rangle$ des Hamiltons mit

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

vertauscht mit dem Hamilton

$$\begin{aligned} [\rho, H] &= H|\Psi\rangle\langle\Psi| - |\Psi\rangle\langle\Psi|H \\ &= E|\Psi\rangle\langle\Psi| - |\Psi\rangle\langle\Psi|E \\ &= E|\Psi\rangle\langle\Psi| - E|\Psi\rangle\langle\Psi| = 0. \end{aligned}$$

Die von Neumann-Gleichung liefert für diese Eigenzustände also keine Zeitentwicklung was man für Energieeigenzustände auch erwartet.

Mit der Dichtematrix hat man zwar eine alternative Beschreibung von Quantensystemen, mit der allerdings noch nichts Neues gewonnen ist. Der Witz erschließt sich erst durch den Begriff des Gemischs.

- **Gemische**

Es lassen sich mit dem Dichtematrixformalismus Quantensysteme beschreiben, die aus vielen Untersystemen bestehen, z. B. ein Photonengas oder ein atomares Ensemble. Die Dichtematrix eines Gemisches ist definiert als:

$$\rho = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|,$$

mit den Wahrscheinlichkeiten P_i für die vernünftigerweise die drei Bedingungen gelten sollen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_i \leq 1 \\ \sum_i P_i &= 1 \end{aligned}$$

Das Gemisch ist also eine Überlagerung von Dichtematrizen reiner Zustände mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i . Für den Erwartungswert eines Operators gilt

$$\begin{aligned}
 \langle O \rangle &= \text{Tr}(\rho \cdot O) \\
 &= \sum_n \langle \varphi_n | \rho \cdot O | \varphi_n \rangle \\
 &= \sum_n \sum_i P_i \langle \varphi_n | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | O | \varphi_n \rangle \\
 &= \sum_i P_i \sum_n \langle \Psi_i | O | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \Psi_i \rangle \\
 &= \sum_i P_i \langle \Psi | O | \Psi \rangle.
 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Erwartungswerte reiner Zustände. Die zeitliche Entwicklung gehorcht ebenfalls der Von Neuman Gleichung:

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H].$$

(kann man sich leicht selbst klarmachen; gute Übung).

- Statistische Gemische

Es gibt reine Gemische und statistische Gemische. Sie unterscheiden sich durch die Spur von ρ^2 :

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\rho^2) &= \sum_n \langle \varphi_n | \rho^2 | \varphi_n \rangle \\
 &= \sum_n \sum_i \sum_j P_i P_j \langle \varphi_n | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \varphi_n \rangle \\
 &= \sum_i \sum_j P_i P_j |\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle|^2 \\
 &\leq \left(\sum_i P_i \right)^2 = 1
 \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt, wenn für alle i und j gilt $|\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle|^2 = 1$, d.h., alle Ψ_i des Ensembles gleich sind. Solche Gemische heißen "reine Gemische". Gemische mit $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ sind "statistische Gemische". Manchmal spricht man auch von "reinen Zuständen" des Gesamtsystems (=reine Gemische) und "gemischten Zuständen" des Gesamtsystems oder einfach nur "Gemischen" (=statistische Gemische). In einer bestimmten Darstellung φ_j lautet die Matrix jetzt

$$\begin{aligned}
 \rho_{jk} &= \langle \varphi_j | \rho | \varphi_k \rangle = \sum_i \langle \varphi_j | \Psi_i \rangle P_i \langle \Psi_i | \varphi_k \rangle \\
 &= \sum_i P_i \cdot c_j^{(i)} \cdot c_k^{(i)*},
 \end{aligned}$$

wobei die $c_j^{(i)} = \langle \varphi_j | \Psi_i \rangle$ die Zustände Ψ_i des Gemischs in der Darstellung der Basis φ_j sind.

- Zeitliche Entwicklung von der Spur von ρ^2

Mit der Dichtematrix

$$\rho = \sum_i P_i \rho_i$$

und einem Hamilton, der sich als Summe von Hamiltonoperatoren der Einzelsysteme schreiben lässt

$$H = \sum_j H_j$$

erhält man zunächst

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= [\rho, H] = \left[\sum_i P_i \rho_i, \sum_j H_j \right] = \sum_i \sum_j P_i [\rho_i, H_j] = \sum_i \sum_j P_i [\rho_i, H_j] \delta_{ij} \\ &= \sum_i P_i [\rho_i, H_i]. \end{aligned}$$

Für die Zeitableitung der Spur ergibt sich ($i\hbar = 1$).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Tr}(\rho^2) &= \text{Tr} \left(\frac{d}{dt} (\rho^2) \right) = 2 \text{Tr}(\rho \dot{\rho}) = 2 \text{Tr} \left(\sum_i P_i \rho_i \sum_j P_j [\rho_j, H_j] \right) \\ &= 2 \text{Tr} \left(\sum_{ij} P_i P_j \rho_i [\rho_j, H_j] \right) = 2 \text{Tr} \left(\sum_{ij} P_i P_j (\rho_i \rho_j H_j - \rho_i H_j \rho_j) \right) \\ &= 2 \sum_{ij} P_i P_j (\text{Tr}(\rho_i \rho_j H_j) - \text{Tr}(\rho_i H_j \rho_j)) = 2 \sum_{ij} P_i P_j (\text{Tr}(\rho_i \rho_j H_j) - \text{Tr}(\rho_j \rho_i H_j)) \end{aligned}$$

Beim letzten Ausdruck wurde verwendet, dass die Spur invariant gegenüber Permutationen der Matrizen ist. Für $i = j$ verschwinden offenbar die Ableitung. Für $i \neq j$ bleibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Tr}(\rho^2) &= 2 \sum_{ij} (1 - \delta_{ij}) P_i P_j (\text{Tr}(\rho_i \rho_j H_j) - \text{Tr}(\rho_j \rho_i H_j)) \\ &= 2 \sum_{ij} (1 - \delta_{ij}) P_i P_j (\text{Tr}(\rho_j H_j \rho_i) - \text{Tr}(\rho_j \rho_i H_j)) \\ &= 2 \sum_{ij} (1 - \delta_{ij}) P_i P_j \text{Tr}(\rho_j (H_j \rho_i - \rho_i H_j)) \\ &= 2 \sum_{ij} (1 - \delta_{ij}) P_i P_j \text{Tr}(\rho_j [H_j, \rho_i]) = 0 \end{aligned}$$

Der Kommutator $[H_j, \rho_i]$ verschwindet wenn jedes Atom in seinem eigenen Hilbertraum lebt und den Hamiltonoperator des anderen Systems nicht spürt. Für ein statistisches

Gemisch aus unabhängigen Einzelsystemen ohne direkte Wechselwirkung ist $Tr(\rho^2)$ eine Erhaltungsgröße!

- Beispiel 1: Zweiniveausystem

Für ein 2-Niveau-Atom mit einem Grundzustand $|g\rangle$ und einem angeregten Zustand $|e\rangle$ lautet der allgemeine Zustand

$$|\Psi\rangle = c_1|g\rangle + c_2|e\rangle.$$

Die Dichtematrix für ein einzelnes Atom in dieser Energiebasis geschrieben lautet dann :

$$\begin{aligned} \rho &= |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= \begin{pmatrix} \langle g|\Psi\rangle\langle\Psi|g\rangle & \langle g|\Psi\rangle\langle\Psi|e\rangle \\ \langle e|\Psi\rangle\langle\Psi|g\rangle & \langle e|\Psi\rangle\langle\Psi|e\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1c_2^* \\ c_2c_1^* & |c_2|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In der Diagonalen stehen also die Besetzungswahrscheinlichkeiten für die beiden Zustände. Die Nebendiagonalen enthalten zwei zueinander komplex konjugierte Zahlen. Für Atome ist der Realteil dieser Zahl proportional zum Dipolmoment $d \sim \text{Re}(c_1c_2^*)$. Es verschwindet, wenn sich das Atom vollständig in einem der beiden Energiezustände befindet (c_1 oder c_2 verschwindet) und wird maximal bei maximaler Mischung, d.h. $|c_2| = |c_1|$

- Beispiel 2: Wann ist ein Gemisch von 2-Niveausystemen rein?

Wir betrachten ein Gemisch aus 2-Niveau-Atomen, deren Besetzung des angeregten Zustand für alle Atome gleich ist. Wann ist das Gemisch ein reines Gemisch? Dazu benötigen wir den Ausdruck $|\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle|^2$. Zunächst berechnen wir das Skalarprodukt der Wellenfunktion des Atoms i und des Atoms j .

$$\begin{aligned} \langle\Psi_i|\Psi_j\rangle &= \left(\langle g|c_1^{*(i)} + \langle e|c_2^{*(i)} \right) \left(c_1^{(j)}|g\rangle + c_2^{(j)}|e\rangle \right) \\ &= c_1^{*(i)}c_1^{(j)} + c_2^{*(i)}c_2^{(j)}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für

$$|\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle|^2 = |c_1^{(i)}|^2|c_1^{(j)}|^2 + |c_2^{(i)}|^2|c_2^{(j)}|^2 + c_1^{*(i)}c_1^{(j)}c_2^{(i)}c_2^{*(j)} + c_1^{(i)}c_1^{*(j)}c_2^{*(i)}c_2^{(j)}.$$

Das Produkt $c_1^{(i)}c_2^{*(i)}$ ist eine komplexe Zahl, die man in Betrag und Phase zerlegen kann: $|c_1^{(i)}||c_2^{(i)}| \cdot e^{i\varphi_i}$. Also:

$$|\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle|^2 = |c_1^{(i)}|^2|c_1^{(j)}|^2 + |c_2^{(i)}|^2|c_2^{(j)}|^2 + |c_1^{(i)}||c_2^{(i)}||c_1^{(j)}||c_2^{(j)}| \cdot (e^{i(\varphi_j-\varphi_i)} + e^{-i(\varphi_j-\varphi_i)}).$$

$|\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle|^2$ wird dann maximal, wenn für alle i und j , $\varphi_j - \varphi_i = 0$.

$$\begin{aligned} |\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle|_{max}^2 &= |c_1^{(i)}|^2 |c_1^{(j)}|^2 + |c_2^{(i)}|^2 |c_2^{(j)}|^2 + 2|c_1^{(i)}| |c_2^{(i)}| |c_1^{(j)}| |c_2^{(j)}| \\ &= \left(|c_1^{(i)}| |c_1^{(j)}| + |c_2^{(i)}| |c_2^{(j)}| \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Für das letzte Gleichheitszeichen benötigt man gleiche Besetzungen für alle Atome. Für $c_{1,2}^{(i)} = c_{1,2}^{(j)}$ erhält man

$$|c_1^{(i)}| |c_1^{(j)}| + |c_2^{(i)}| |c_2^{(j)}| = |c_1^{(i)}| |c_1^{(i)}| + |c_2^{(i)}| |c_2^{(i)}| = |c_1^{(i)}|^2 + |c_2^{(i)}|^2 = 1.$$

Das Gemisch ist also rein, wenn alle Phasen $\varphi_j - \varphi_i$ verschwinden. Da das elektronische Dipolmoment eines Atoms proportional zu $Re(c_1 \cdot c_2^*)$ ist, lässt sich die Phase $\varphi_j - \varphi_i$ als Relativphase interpretieren, mit der die Atome i und j relativ zueinander schwingen. Verschwinden alle Relativphasen, schwingen die Dipole aller Atome paarweise synchron und damit schwingen alle synchron.

Laufen die Dipole außer Phase, mitteln sich die Dipole gegenseitig heraus und es entsteht ein statistisches Gemisch. Bei vollständigem Zerfall der Phasensynchronizität ist die Dichtematrix diagonal:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{\varphi} P_{\varphi} \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 \end{pmatrix}_{\varphi} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\varphi} P_{\varphi} |c_1^{(\varphi)}|^2 & \sum_{\varphi} P_{\varphi} (c_1 \cdot c_2^*)^{(\varphi)} \\ \sum_{\varphi} P_{\varphi} (c_1^* \cdot c_2)^{(\varphi)} & \sum_{\varphi} P_{\varphi} |c_2^{(\varphi)}|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Nichtdiagonalelemente haben die Form $\sum_{\varphi} P_{\varphi} |c_1^{(\varphi)}| |c_2^{(\varphi)}| \cdot e^{i\varphi}$, die für beliebig verteilte Phasen φ verschwinden.

$$\rho_{stat} = \sum_{\varphi} P_{\varphi} \begin{pmatrix} |c_1^{(\varphi)}|^2 & 0 \\ 0 & |c_2^{(\varphi)}|^2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist jetzt reell. Es gibt keine komplexen Zahlen mehr, keine Phase, keine Interferenz, keine Quantenmechanik, alles klassisch!

- Quantenmessprozess

Die Messung eines quantenmechanischen Systems ist mit einer Dephasierung verbunden, die das Ensemble in ein klassisches statistisches Ensemble umwandelt. Das Messgerät ist ein Reservoir, das zunächst alle quantenmechanischen Phasen stört und statistisch verteilt. Übrig bleibt ein statistisches Gemisch mit einer klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilung für die möglichen Messwerte. Welcher der Messwerte dann tatsächlich realisiert wird, bleibt jedoch unbestimmt. Dieser Teil des Quantenmessprozesses wird von der Reservoirtheorie auch nicht weiter erhellt.

- Beispiel 3: Fockzustand.

Die Dichtematrix eines Nummernzustands ist kein Gemisch.

$$\rho = |n\rangle\langle n|$$

Sie lautet in der Energiebasis

$$\langle i|\rho|j\rangle = \langle i|n\rangle\langle n|j\rangle = \delta_{i,n}\delta_{j,n} = \delta_{i=j=n}.$$

und hat nur einen einzigen Eintrag und zwar eine 1 in der Diagonalen an der Stelle n . Es gibt keine phasenbehafteten Kohärenzen (Nebendiagonalelemente), die durch ein Reservoir gestört werden können. Der Zustand ist vollständig determiniert und in diesem Sinn klassisch.

- Beispiel 4: Thermisches Licht

Die Dichtematrix wird durch die Boltzmann-Besetzung der Energiezustände beschrieben:

$$\rho = \sum_n P_n |n\rangle\langle n|$$

mit

$$P_n = P(E_n) = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{\sum_n e^{-E_n/k_B T}}.$$

In der Energiebasis ist diese Dichtematrix diagonal

$$\begin{aligned} \langle i|\rho|j\rangle &= \rho_{ij} = \sum_n P_n \langle i|n\rangle\langle n|j\rangle \\ &= \sum_i P_n \delta_{in}\delta_{nj} \\ &= P_i \cdot \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Es gibt ebenfalls keine Kohärenzen. Thermisches Licht bildet ein statistisches Gemisch.

- Beispiel 5: Kohärenter Zustand. In der Energiebasis lautet die Matrix für

$$\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha| :$$

$$\begin{aligned} \langle i|\rho|j\rangle &= \langle i|\alpha\rangle\langle\alpha|j\rangle = \langle i| \left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n'} \frac{\alpha^{*n'}}{\sqrt{n'!}} \langle n'| \right) |j\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle i|n\rangle \sum_{n'} \frac{\alpha^{*n'}}{\sqrt{n'!}} \langle n'|j\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \cdot \frac{\alpha^i \cdot \alpha^{*j}}{\sqrt{i! \cdot j!}}. \end{aligned}$$

Sie hat überall Einträge. Wie beim Fockzustand ist die Dichtematrix kein Gemisch sondern ein reiner Zustand (was noch zu zeigen wäre). Es treten Kohärenzen auf, die bei einer Messung dephasieren können. Misst man beispielsweise die Photonenzahl, verschwinden zunächst die Nichtdiagonalelemente und der reine Zustand geht in ein Gemisch aus Fockzuständen über. Durch die Messung kollabiert das Gemisch in einen bestimmten Fockzustand.

Quantensprünge und Quanten Monte Carlo Methode

Wir betrachten als Beispiel ein Photon in einer Mode im Resonator. Wir zerlegen die zeitliche Entwicklung in kleine Zeitschritte δt und fragen, was mit dem System in dieser Zeit geschehen ist. Es gibt zwei Möglichkeiten:

- 1. Quantensprung

Das Photon wurde mit einer Wahrscheinlichkeit $P(\delta t)$ aus dem Resonator gestreut. Der Zustand im Resonator geht dabei in den Zustand $|\psi_s\rangle$ über.

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi_s\rangle = \frac{a|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|a^+a|\psi\rangle}}.$$

Der Vernichter hat das Photon aus der Mode entfernt und der Nenner sorgt für die Normierung des neuen Zustands.

- 2. Hamiltonsche Entwicklung

Das Photon ist noch im Resonator vorhanden. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $1 - P(\delta t)$. Der neue Zustand entwickelt sich aus dem Anfangszustand gemäß eines effektiven Hamiltonoperators

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi_{ns}\rangle = \frac{e^{-iH_{eff}/\hbar\delta t}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|e^{iH_{eff}^+/\hbar\delta t}e^{-iH_{eff}/\hbar\delta t}|\psi\rangle}}.$$

Der Nenner dient wieder der Normierung.

- Der effektive Hamiltonoperator

lautet:

$$H_{eff} = H - i\hbar\frac{\gamma}{2}a^+a.$$

Dies ist eine Annahme. Der effektive Hamilton ist nicht hermitisch, er enthält einen komplexen Zerfallsterm der proportional zu einer neu eingeführten Zerfallskonstante γ ist. Wenn also innerhalb von δt kein Zerfall stattfindet entwickelt sich das System nicht einfach ungestört weiter. Die richtige Beschreibung erhält man nur, wenn man dem System erlaubt, mittels des Zerfallsterms, das äußere Reservoir auch ohne Zerfall "zu spüren".

- Für die zeitliche Entwicklung

der Dichtematrix nimmt man an, dass sie in der Zeit δt in ein Gemisch der beiden Möglichkeiten übergeht

$$|\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow |\psi(\delta t)\rangle\langle\psi(\delta t)| = P|\psi_s\rangle\langle\psi_s| + (1 - P)|\psi_{ns}\rangle\langle\psi_{ns}|.$$

Für die Wahrscheinlichkeit P macht man den Ansatz

$$P = \underbrace{\gamma \cdot \underbrace{\langle\psi|a^+a|\psi\rangle}_{\text{Besetzungszahl der Mode}} \cdot \delta t}_{\text{Photonenzerfallsrate}} \cdot \underbrace{\delta t}_{\text{Zerfallswahrscheinlichkeit innerhalb } \delta t}.$$

- Mastergleichung

Für kurze Zeiten kann man entwickeln

$$\begin{aligned} e^{-iH_{eff}/\hbar \cdot \delta t} &= 1 - iH_{eff}/\hbar \cdot \delta t + \dots \\ &= 1 - i/\hbar \cdot H \cdot \delta t - \gamma/2 \cdot a^+a \cdot \delta t + \dots \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Entwicklung und des Ausdrucks für P ergibt unter Vernachlässigung aller höheren Terme in δt :

$$\begin{aligned} |\psi(\delta t)\rangle\langle\psi(\delta t)| &\simeq |\psi\rangle\langle\psi| - i/\hbar \cdot \delta t \cdot [H, |\psi\rangle\langle\psi|] \\ &\quad + \gamma/2 \cdot \delta t \cdot (2a|\psi\rangle\langle\psi|a^+ - a^+a|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|a^+a) \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für ein Einzelsystem, also für eine Mode im Resonator oder für den angeregten Zustand eines Atoms. Ein Ensemble wird durch die Dichtematrix ρ eines Gemischs beschrieben also dem Mittelwert über die Dichtematrizen der Einzelsysteme. Wenn alle Einzelsysteme gleich häufig vorkommen ist die Matrix für das Einzelsystem identisch mit der Matrix für das Ensemble also

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Damit erhält man

$$\rho(t + \delta t) = \rho - i/\hbar \cdot \delta t \cdot [H, \rho] + \gamma/2 \cdot \delta t \cdot (2a\rho a^+ - a^+a\rho - \rho a^+a).$$

Im Grenzwert $\delta t \rightarrow 0$ wird aus dem Differenzenquotient der Differentialquotient $(\rho(t + \delta t) - \rho(t)) / d\rho/dt$:

$$d\rho/dt = -i/\hbar \cdot [H, \rho] + \gamma/2 \cdot (2a\rho a^+ - a^+a\rho - \rho a^+a).$$

Dies ist die Mastergleichung. Man kann sie mit Hilfe einer Reservoirtheorie streng herleiten. Hier dient sie uns als Bestätigung der oben gemachten Annahmen.

- Quanten Monte Carlo Methode

ist eine numerische Methode, mit der sich die Dämpfung von Quantensystemen durch Ankopplung an ein Reservoir berechnen lässt. Die zeitliche Entwicklung eines Quantensystems kann man numerisch folgendermaßen berechnen: Man würfelt mit dem Rechner eine Zahl r zwischen 0 und 1 und vergleicht sie mit P . Ist $r > P$, so ersetzt man $|\psi\rangle$ durch $|\psi_{ns}\rangle$. Ist $r < P$, so ersetzt man $|\psi\rangle$ durch $|\psi_s\rangle$. Für den so bestimmten neuen Zustand berechnet man wiederum P und würfelt ein neues r , etc. Auf diese Weise erhält man eine der möglichen Zeitentwicklungen eines individuellen Systems. Den Erwartungswert für ein Ensemble (z.B. viele Moden im Resonator) ergibt sich durch Mittelung über die Einzelsysteme. Der Rechenaufwand wächst offenbar proportional zur Anzahl der Einzelsysteme. Berechnet man dagegen die Entwicklung der Dichtematrix durch numerische Integration der Heisenberggleichung so wächst der Rechenaufwand mit der Anzahl der Elemente der Dichtematrix also quadratisch mit der Dimension der Dichtematrix. Die Dimension ist aber proportional zur Anzahl der Freiheitsgrade also der Zahl der Einzelsysteme. Damit ist hier der Rechenaufwand quadratisch zur Anzahl der Einzelsysteme.

Beispiele

- 1. Beispiel: Zerfall eines kohärenten Zustands

Zeitliche Entwicklung einer Resonatormode, die mit einem kohärenten Zustand besetzt ist. Physikalisch erwartet man, dass das Feld im Resonator durch die Streuverluste an den Spiegeln exponentiell zerfällt. Wie kann man dieses Verhalten berechnen? Zunächst wird die ungestörte zeitliche Dynamik des kohärenten Zustands, also die zeitliche Feldoszillation, abgespalten. Formal geht man dafür ins Wechselwirkungsbild, in der die zeitliche Entwicklung der Zustände nur von der Wechselwirkung abhängt. Der kohärente Zustand soll nur mit dem Reservoir in Berührung sein. Ohne sonstige Wechselwirkung ist damit $H = 0$, und es bleibt als effektiver Hamilton nur der Dämpfungsterm $H_{eff} = -i\hbar\frac{\gamma}{2}a^+a$. Betrachten wir nun die beiden Möglichkeiten. Falls ein Quantensprung auftritt erhält man:

$$|\alpha\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle}}a|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha^*}}\alpha|\alpha\rangle = |\alpha\rangle.$$

Das Feld bleibt (bis auf einen möglichen Phasenfaktor für komplexe α) unverändert! Der Zerfall steckt also im zweiten Fall, in dem kein Quantensprung geschieht:

$$|\alpha\rangle \rightarrow \frac{e^{-\gamma/2 \cdot a^+ a \cdot \delta t} |\alpha\rangle}{\sqrt{\langle\alpha|e^{-\gamma \cdot a^+ a \cdot \delta t}|\alpha\rangle}} = |\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot \delta t}\rangle.$$

Hier wurde verwendet, dass

$$e^{K \cdot a^+ a} |\alpha\rangle = \exp\left(\frac{e^{2K}}{2}\right) |e^K \cdot \alpha\rangle.$$

(Selber nachrechnen). Das Feld bleibt also in einem kohärenten Zustand mit exponentiell zerfallender mittlerer Photonenzahl.

Die Mastergleichung liefert:

$$d\rho/dt = \gamma/2 \cdot (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a).$$

Sie wird gelöst durch

$$\rho(t) = |\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}\rangle \langle \alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}|,$$

was man durch Einsetzen leicht überprüfen kann. Die mittlere Photonenzahl im Resonator zerfällt damit exponentiell

$$n(t) = |\alpha|^2 \cdot e^{-\gamma \cdot t}.$$

(Selber nachrechnen: Erwartungswert des Teilchenzahloperators durch Spurbildung mit der Dichtematrix berechnen).

- 2. Beispiel: Zerfall einer Schrödingerkatze

Entwicklung eines geraden Katzenzustands:

$$|\psi_g\rangle = N_g (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle).$$

(N_g ist ein Normierungsfaktor).

Quantensprung:

$$a (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) = \alpha (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle).$$

Der gerade Zustand wird also in einen ungeraden Katzenzustand überführt ("jumping cat transition").

$$|\psi_g\rangle \rightarrow |\psi_u\rangle = N_u (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle).$$

Der Zerfall eines Photons ändert die interne Phase des Katzenzustands um π ! Mit jedem Quantensprung springt auch die Phase maximal, so dass die Phase über den vollen Bereich fluktuiert und bald völlig ausgewaschen ist. Die Katze ist damit in eine klassische Wahrscheinlichkeitssumme aus "tot" und "lebendig" übergegangen. Ihr Zustand ist durch eine Messung nicht mehr zu ändern.

Hamiltonsche Entwicklung:

$$e^{-\gamma/2 \cdot a^\dagger a \cdot \delta t} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) = |\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot \delta t}\rangle \pm |-\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot \delta t}\rangle.$$

Die Katze bleibt erhalten, schrumpft aber exponentiell.

Die Mastergleichung liefert für die Katze:

$$\begin{aligned} \rho(t)/N_g &= |\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}\rangle \langle \alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}| + |-\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}\rangle \langle -\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}| \\ &+ \exp(-2|\alpha|^2(1 - e^{-\gamma t})) \cdot [|\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}\rangle \langle -\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}| + |-\alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}\rangle \langle \alpha \cdot e^{-\gamma/2 \cdot t}|]. \end{aligned}$$

Der Exponentialfaktor vor dem dritten Term lässt sich nähern als

$$\exp(-2|\alpha|^2(1 - e^{-\gamma t})) \simeq \exp(-2|\alpha|^2\gamma t).$$

Der Nichtdiagonalteil der Dichtematrix zerfällt also innerhalb einer Dekohärenzzeit

$$T_{decoh} := \frac{1}{2|\alpha|^2\gamma},$$

die um die mittlere Teilchenzahl schneller ist als die Zerfallszeit der Teilchenzahl selber. Je größer der Zustand umso schneller zerfallen seine quantenmechanischen Eigenschaften.

- 3. Beispiel: Laserlicht

Erzeugung kohärenter Zustände in einem optischen Verstärker (optical balance). Ein Atom koppelt an das Lichtfeld in der Dipolnäherung durch den Hamilton:

$$H_i = -\hat{d} \cdot \hat{E}.$$

mit dem Dipoloperator \hat{d} und dem Feldoperator \hat{E} . Uns interessiert hier nicht der vollständige Hamilton, sondern nur der Teil, der auf die Photonen wirkt. Er hat die Form:

$$H_i = \hbar \cdot G \cdot (a + a^+).$$

G enthält, neben einer Konstanten, auch den Teil, der auf das Atom wirkt. Er enthält das Dipolmatrixelement und wirkt im Hilbertraum des Elektrons. Der Operator $a + a^+$ ist proportional zum Feldoperator und wirkt auf die Photonenzustände. Die Mastergleichung lautet

$$d\rho/dt = -iG \cdot [a + a^+, \rho] + \gamma/2 \cdot (2a\rho a^+ - a^+a\rho - \rho a^+a),$$

was man umschreiben kann in

$$d\rho/dt = \gamma/2 \cdot (2b\rho b^+ - b^+b\rho - \rho b^+b),$$

wobei

$$b := a + iG/\gamma.$$

Im Gleichgewicht gilt $d\rho/dt = 0$ und damit $b\rho = 0$ und $\rho b^+ = 0$, bzw.

$$(a + iG/\gamma)\rho = 0 = \rho(a^+ - iG/\gamma).$$

Diese Gleichungen werden gelöst durch:

$$\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

mit

$$\alpha = -iG/\gamma.$$

Ein kohärenter Antrieb durch einen atomaren Dipol führt zusammen mit einer Dämpfung zu einem kohärenten Zustand mit einer Feldstärke, die proportional zum Verhältnis aus Antrieb G und Verlust γ ist. Ein Laser erzeugt kohärentes Licht.

Wigner Funktion.

Gesucht ist eine Funktion $W(p, q)$, die die vollständige Information über das Quantensystem enthält, analog zur klassischen Phasenraumverteilung. Eine solche Funktion kann man finden. Sie kann aber negativ werden und ist daher nicht als Wahrscheinlichkeit interpretierbar. Man spricht von einer Quasiwahrscheinlichkeit. Das wichtigste Beispiel für eine solche Quasiwahrscheinlichkeit ist die Wigner Funktion:

$$W(p, q) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + x/2 | \rho | q - x/2 \rangle e^{ipx/\hbar} dx,$$

wobei $|q \pm x/2\rangle$ Eigenzustände des Ortsoperators sind. Für einen reinen Zustand $|\psi\rangle$ erhält man

$$W(p, q) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q - x/2) \psi(q + x/2) e^{ipx/\hbar} dx,$$

wobei

$$\psi(q \pm x/2) = \langle q \pm x/2 | \psi \rangle.$$

Integriert man $W(p, q)$ über den Impulsraum, so erhält man die Ortsverteilung des Teilchens:

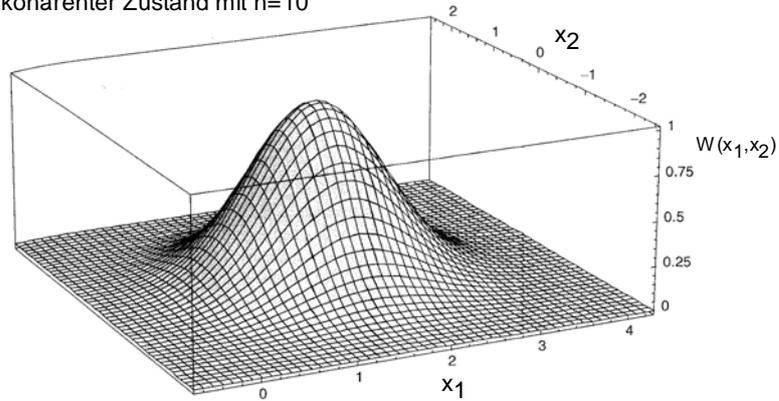
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(p, q) dp &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q - x/2) \psi(q + x/2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} dp dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q - x/2) \psi(q + x/2) \delta(x) dx = |\psi(q)|^2. \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt die Integration über den Ortsraum die Impulsverteilung:

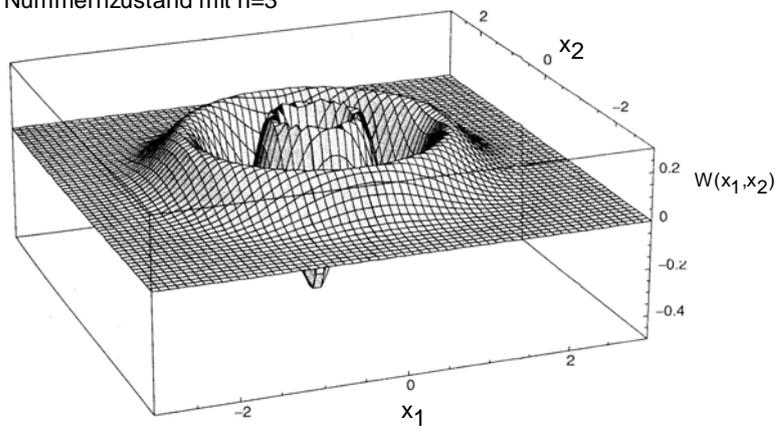
$$\int_{-\infty}^{\infty} W(p, q) dq = |\psi(p)|^2.$$

Die Wigner-Funktion eines Systems ist eine andere Möglichkeit die quantenmechanischen Eigenschaften eines Systems zu visualisieren. Bereiche, in denen die Wigner-Funktion negativ wird markieren das auftreten quantenmechanischer Effekte. Diese Bereiche zerfallen bei Ankopplung an ein Reservoir als erstes, ähnlich wie die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix. Im folgenden Bild sieht man die Wigner-Funktion für einen kohärenten Zustand und für einen Nummernzustand.

kohärenter Zustand mit $n=10$

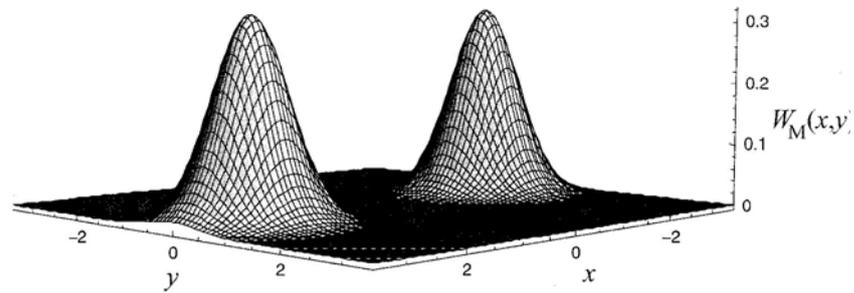


Nummernzustand mit $n=3$

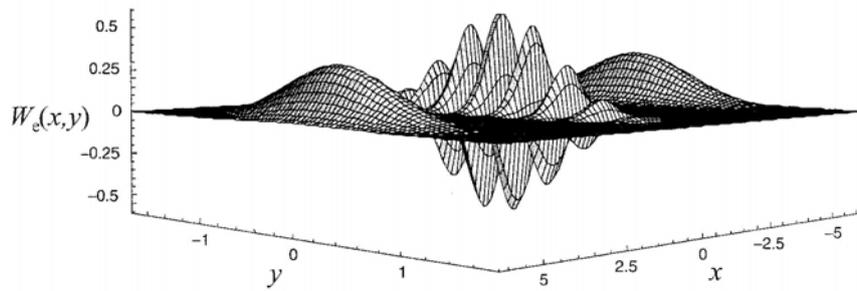


Die Überlagerung zweier kohärenter Zustände kann kohärent sein, was zu Quanteninterferenzen im Überlappbereich führt. Die inkohärente Summe enthält keine Nebendiagonalelemente und entspricht der Summe der klassischen Wahrscheinlichkeiten.

statistisches Gemisch zweier kohärenter Zustände mit je $n=5$

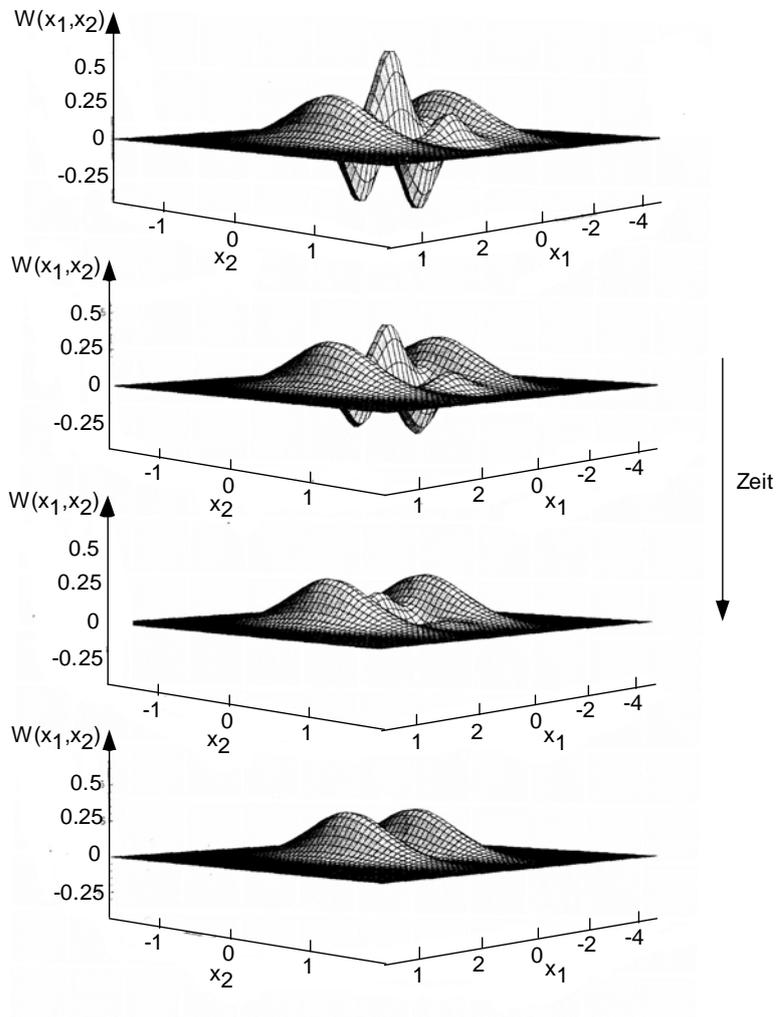


kohärente Überlagerung zweier kohärenter Zustände mit je $n=5$
(gerader Katzenzustand)



Bei einer kohärente Überlagerung zweier kohärenter Zustände (Katze) zerfallen als erstes die Interferenzen.

Zerfall eines geraden Katzenzustands



Chapter 4

Korrelationen und Kohärenz

In diesem Kapitel geht es um die Kohärenz von Licht also seine Interferenzfähigkeit. Sofern das Lichtfeld eine zu jeder Zeit klar definierte Größe ist, die auf eindeutig festgelegte Weise vom Ort und von der Zeit abhängt, ist es auch interferenzfähig, d.h. es kann anderes Licht auslöschen oder mit ihm konstruktiv interferieren. Monochromatisches Licht wie es die Maxwell-Gleichungen beschreiben ist das einfachste Beispiel. Allerdings kommt solches Licht in der Natur praktisch nur in seltenen Ausnahmefällen vor. Feuer, Glühlampen und sonstige schwarze Strahler, Neonlampen etc. sind Beispiele, bei denen man für eine eindeutige Beschreibung des abgestrahlten Feldes die Bewegung jedes Atoms einschließlich seiner elektronischen Dynamik exakt kennen müsste. Das ist wegen der großen Zahl an Freiheitsgraden unmöglich. Um vernünftige Modelle für die Lichtquellen bilden zu können, muss man daher Annahmen über statistische Mittelwerte und deren Varianzen machen. Ein Beispiel kommt später. Man kann aber auch gleich Begriffe suchen, mit denen sich das Lichtfeld solcher Quellen statistisch beschreiben lässt unabhängig von den Details der Quelle. Ein viel verwendeter Begriff ist in diesem Zusammenhang der Kohärenzgrad 1. Ordnung und 2. Ordnung, um den es in diesem Kapitel hauptsächlich gehen wird. Interessant wird dann die Frage, ob es neben solchen klassischen Fluktuationen auch Fluktuationen gibt, die ausschließlich auf Quanteneffekte zurückzuführen sind. Dazu müssen die klassischen Überlegungen in ein quantenmechanisches Modell übersetzt werden, das dann möglicherweise neue, nichtklassische Phänomene beschreibt. Tatsächlich gibt es ein solches Phänomen, das wir aber schon kennen, nämlich das Schrotrauschen eines kohärenten Zustands, bzw. das thermische Rauschen eines thermischen Zustands. Insgesamt sind die Resultate für Licht nicht sehr überraschend, allerdings ist Licht ein gut überschaubares Modellsystem, an dem die richtigen Begriffe geformt und getestet werden können. Mit dieser Sprache kann man dann auch allgemeiner Fluktuationen von Vielteilchensystemen beschreiben.

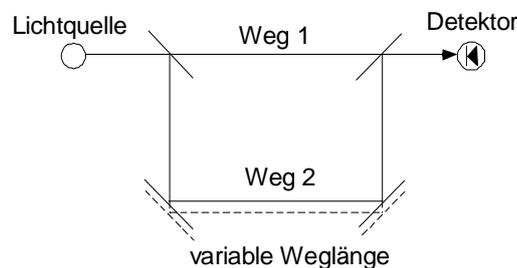
Kohärenzgrad 1. Ordnung

Kohärenzgrad klassischer Felder

- Beim Kohärenzgrad 1. Ordnung geht es um Phasenfluktuationen des Lichtfeldes und die damit verbundene Verringerung der Interferenzfähigkeit. Er ist folgendermaßen definiert

$$g^{(1)}(\tau) := \frac{\langle E(t)^* \cdot E(t + \tau) \rangle}{\langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle}.$$

- Um zu verstehen, wie diese Größe die Interferenzfähigkeit von Licht beschreibt, betrachten wir ein Mach-Zender-Interferometer. Es soll die Interferenzfähigkeit von Licht messen.



Das Licht wird am ersten Strahlteiler in zwei gleiche Teile zerlegt und nach Durchlaufen unterschiedlicher langer Wege wieder zusammengeführt. Die Weglängendifferenz wird variiert. Ändert sich der Weg nur wenig auf der Skala der Wellenlänge sieht man am Detektor eine sinusförmig oszillierende Intensität mit einem bestimmten Kontrast. Nimmt man dasselbe Interferenzsignal bei einer Wegstreckendifferenz auf, die zusätzlich um einen konstanten Wert (im Bereich vieler Wellenlänge) vergrößert ist, ist der Kontrast möglicherweise kleiner. Das Interferometer misst also die Interferenzfähigkeit eines Lichtstrahls mit sich selber nach dem er um einen bestimmten Betrag verschoben wurde.

- Das Feld nach dem zweiten Strahlteiler setzt sich zu gleichen Teilen aus den Feldern der beiden Wege zusammen.

$$E_{out}(t) = E_1(t) + E_2(t) = \frac{1}{2} (E(t) + E(t + \tau))$$

wobei $E(t)$ das Feld und I die Intensität der Lichtquelle ist. Die Intensität, die mit dem Detektor am Ausgang des Interferometers gemessen wird, ist proportional zum Betragsquadrat des Feldes:

$$\langle |E_{out}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle |E(t)|^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle + \frac{1}{4} \langle E(t) \cdot E^*(t + \tau) \rangle$$

wobei τ die zeitliche Verzögerung von Weg 2 gegenüber Weg 1 ist. Hier kommt der Mittelwert

$$\langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle := \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} E^*(t) \cdot E(t + \tau) dt$$

ins Spiel. Die Mittelungszeit muss mindestens so lange sein, dass sich der Mittelwert bei weiterer Verlängerung der Mittelungszeit nicht mehr ändert. Sind die physikalischen Eigenschaften der Quelle zeitlich konstant, ist es außerdem egal wann man die Mittelungsperiode T ansetzt. Für monochromatisches Licht bräuchte man die Mittelwertbildung nicht, da das Betragsquadrat der Amplitude bereits die über eine Periode gemittelte Intensität ist. Dieses Kapitel befasst sich jedoch ausdrücklich mit nicht monochromatischem Licht. Mit der Definition für $g^{(1)}$.

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E(t)^* \cdot E(t + \tau) \rangle}{\langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle}$$

also

$$\langle E(t)^* \cdot E(t + \tau) \rangle = g^{(1)}(\tau) \langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle$$

folgt

$$\begin{aligned} 4 \cdot \langle |E_{out}|^2 \rangle &= \langle |E(t)|^2 \rangle + \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle + g^{(1)}(\tau) \cdot \langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle + g^{*(1)}(\tau) \cdot \langle E(t) \cdot E^*(t) \rangle \\ &= \langle |E(t)|^2 \rangle + \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle + \langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle (g^{(1)}(\tau) + g^{*(1)}(\tau)) \\ &= 2 \langle |E(t)|^2 \rangle (1 + \text{Re}(g^{(1)}(\tau))) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} I_{out}(\tau) &= I \cdot \frac{1}{2} (1 + \text{Re}(g^{(1)}(\tau))) \\ &= I \cdot \frac{1}{2} (1 + |g^{(1)}(\tau)| \cos \phi(\tau)) . \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist die komplexe Zahl $g^{(1)}(\tau)$ in Betrag und Phase zerlegt worden. Der Kontrast eines Interferometers ist die normierte Differenz aus dem maximalen und dem minimalen Signal.

$$K := \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} .$$

Mit oben folgt:

$$K = \frac{I \cdot \frac{1}{2} (1 + |g^{(1)}(\tau)|) - I \cdot \frac{1}{2} (1 - |g^{(1)}(\tau)|)}{I \cdot \frac{1}{2} (1 + |g^{(1)}(\tau)|) + I \cdot \frac{1}{2} (1 - |g^{(1)}(\tau)|)} = |g^{(1)}(\tau)|$$

Der Betrag von $g^{(1)}(\tau)$ ist also der Kontrast des Interferometers. Er hängt von der Verzögerungszeit τ ab. Die Funktion $|g^{(1)}(\tau)|$ kann verwendet werden um Wellenfelder bzw. deren Quellen zu charakterisieren. Man kann nach der $|g^{(1)}(\tau)|$ -Funktion

einer Lichtquelle fragen oder auch nach der von Materiewellen eines angeregten Bose-Einstein-Kondensats, von Wasserwellen eines Dorfteichs bei Wind, von Schallwellen in einer Fußballarena oder von thermischen Phononen in einem Kristall. Überall wo Wellen statistisch erzeugt werden kann man diesen Begriff sinnvoll einsetzen.

- Ein wenig sinnvolles weil triviales Beispiel ist eine monochromatische Schwingung:

$$\begin{aligned}
 E(t) &= E_0 \cdot e^{i\omega t} \\
 g^{(1)}(\tau) &= \frac{\frac{1}{T} \int_0^T E_0 e^{-i\omega t} \cdot E_0 \cdot e^{i\omega(t+\tau)} dt}{\frac{1}{T} \int_0^T E_0 e^{-i\omega t} \cdot E_0 \cdot e^{i\omega t} dt} \\
 &= \frac{\frac{E_0^2}{T} \cdot \int_0^T e^{i\omega\tau} dt}{\frac{E_0^2}{T} \int_0^T dt} = e^{i\omega\tau}
 \end{aligned}$$

Die $g^{(1)}$ -Korrelation oszilliert mit der Frequenz der Schwingung ω . Der Betrag ist $|g^{(1)}(\tau)| = 1$ und unabhängig von τ . Die Welle ist vollständig "kohärent", der Kontrast maximal.

Wiener Khintchine Theorem

Mit Hilfe der $g^{(1)}(\tau)$ -Funktion lässt sich das Frequenzspektrum der Quelle berechnen!

$$\begin{aligned}
 E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \cdot e^{i\omega t} dt \\
 |E(\omega)|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E^*(t) \cdot E(t + \tau) e^{i\omega\tau} dt d\tau \\
 \text{mit } \tau &: = t' - t \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} E^*(t) E(t + \tau) dt \right) d\tau \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} T \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} E^*(t) E(t + \tau) dt \right) d\tau
 \end{aligned}$$

Für genügend großes T ändert sich bei weiterer Vergrößerung von T am Grenzwert nichts mehr :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} E^*(t) \cdot E(t + \tau) dt &\simeq \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} E^*(t) \cdot E(t + \tau) dt \\ &\simeq \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle \end{aligned}$$

Also:

$$|E(\omega)|^2 = \frac{T}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle \cdot e^{i\omega\tau} d\tau$$

Diese spektrale Energiedichte möchte man gerne normieren. Man muss also das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |E(\omega)|^2 d\omega$$

bestimmen.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |E(\omega)|^2 d\omega &= \frac{T}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau \right) d\omega \\ &= \frac{T}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega \right) d\tau \\ &= \frac{T}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle \cdot 2\pi\delta(\tau) \cdot d\tau \\ &= \frac{T}{2\pi} \langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle \end{aligned}$$

Die normierte Intensität lautet damit

$$\begin{aligned}
 F(\omega) & : = \frac{|E(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(\omega)|^2 d\omega} \\
 & = \frac{\frac{T}{4\pi^2}}{\frac{T}{2\pi} \langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle \cdot e^{i\omega\tau} d\tau \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle}{\langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle} \cdot e^{i\omega\tau} d\tau \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(1)}(\tau) \cdot e^{i\omega\tau} d\tau
 \end{aligned}$$

Das normierte Intensitätsspektrum ist die Fouriertransformierte des Kohärenzgrades 1. Ordnung. Aus der zeitlichen Korrelation kann man das Spektrum berechnen!

Beispiel: Spektrum einer themischen Lichtquelle

- Als Beispiel für eine typische Lichtquelle betrachten wir eine stoßverbreiterte Lichtquelle (chaotisches Licht, klassisch). Sie besteht aus einer Ansammlung von Atomen, die zwischen den Stößen ebene Wellen abgeben. Das gesamte Feld ist eine Summe von Wellenzügen, deren Phasen sprunghaft wechseln:

$$\begin{aligned}
 E(t) & = E_1(t) + E_2(t) + \dots E_n(t) \\
 & = E_0 \cdot e^{-i\omega_0 t} \{ e^{i\phi_1(t)} + e^{i\phi_2(t)} + \dots e^{i\phi_n(t)} \}
 \end{aligned}$$

Für die Korrelationsfunktion erhält man:

$$\begin{aligned}
 \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle & = E_0 \cdot e^{-i\omega_0 \tau} \cdot \langle (e^{-i\phi_1(t)} + \dots + e^{-i\phi_n(t)}) (e^{i\phi_1(t+\tau)} + \dots + e^{i\phi_n(t+\tau)}) \rangle \\
 & = E_0 \cdot e^{-i\omega_0 \tau} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \langle e^{i\phi_j(t+\tau) - i\phi_j(t)} \rangle + \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} \langle e^{i\phi_j(t+\tau) - i\phi_k(t)} \rangle \right)
 \end{aligned}$$

mit den Binominal-Koeffizienten α_{jk} , deren Wert wir aber gar nicht wissen müssen, da $\langle e^{i\phi_j(t+\tau) - i\phi_k(t)} \rangle$ für beliebig unkorrelierte Phasen $\phi_j(t + \tau)$ und $\phi_k(t)$ verschwindet. Daher

$$\begin{aligned}
 \langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle & = E_0 \cdot e^{-i\omega_0 \tau} \cdot \sum_{j=1}^n \langle e^{i\phi_j(t+\tau) - i\phi_j(t)} \rangle \\
 & = E_0 \cdot e^{-i\omega_0 \tau} \cdot n \cdot \langle e^{i\phi_j(t+\tau) - i\phi_j(t)} \rangle
 \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt da alle Atome dasselbe mittlere Verhalten aufweisen und damit der Mittelwert $\langle e^{i\phi_j(t+\tau)-i\phi_j(t)} \rangle$ für alle n Atome gleich ist. Da bei einem Stoß die Phase eines Atoms statistisch springt, werden sich bei der Mittelwertbildung die Beiträge aller Atome, die bereits gesprungen sind, herausmitteln. Atome, die bis zum Zeitpunkt τ ihre Phase noch nicht geändert haben tragen mit einer 1 zum Mittelwert bei. Die Anzahl dieser Atome erhält man aus der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Atom ein Zeitintervall τ stoßfrei überlebt. Aus der Theorie der Gase übernehmen wir den Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit

$$p(\tau)d\tau = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau,$$

wobei τ_0 die mittlere Freiflugzeit zwischen zwei Stößen bezeichnet.

Die Gesamtzahl überlebender Atome ist

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} p(\tau') d\tau' &= \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\tau_0} \cdot e^{-\tau'/\tau_0} d\tau' \\ &= -e^{-\tau'/\tau_0} \Big|_{\tau}^{\infty} = e^{-\tau/\tau_0} \end{aligned}$$

Also

$$\langle E^*(t) \cdot E(t + \tau) \rangle = n \cdot E_0^2 e^{-i\omega_0\tau - \tau/\tau_0}$$

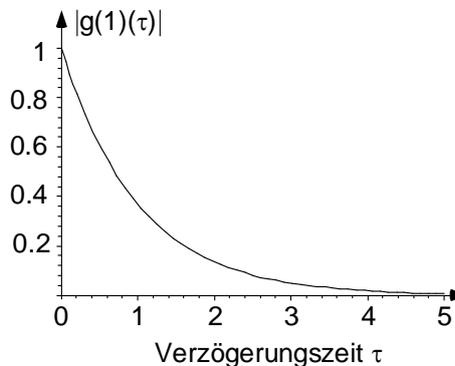
oder:

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\tau) &= e^{-i\omega_0\tau - \tau/\tau_0} \\ |g^{(1)}(\tau)| &= e^{-\tau/\tau_0}. \end{aligned}$$

Das Spektrum erhält man gemäß dem Wiener-Khintchine-Theorem durch Fouriertransformation, mit dem Ergebnis

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1/\tau_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + (1/\tau_0)^2}.$$

Dies ist eine Lorenzkurve mit der Breite $1/\tau_0$. Durch Vermessen des Kontrasts bei verschiedenen Wegunterschieden, kann man die mittlere freie Weglänge des Gases bestimmen!



Licht mit zerfallender Kohärenz heißt chaotisches Licht.

Kohärenzgrad quantisierter Felder

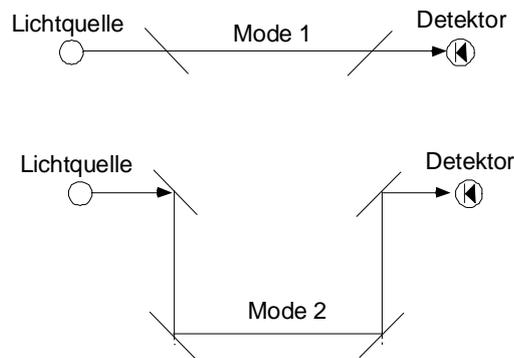
- Um ein Quantentheorie der Kohärenz zu erhalten bietet sich folgender Vorgehen an: Anstelle eines kontinuierlichen Feldes tritt der Feldoperator \hat{E} . Der Mittelwert $\frac{1}{T} \int_T dt$ wird durch den Erwartungswert für den Zustand $|\Psi\rangle$ ersetzt. Der quantenmechanische Korrelationsgrad 1. Ordnung lautet dann

$$g^{(1)} := \frac{\langle \hat{E}_1 \cdot \hat{E}_2^+ \rangle}{\sqrt{\langle E_1 \cdot E_1^+ \rangle \cdot \langle E_2 \cdot E_2^+ \rangle}}$$

Die Erwartungswerte hängen natürlich vom Zustand ab also von der Art der Lichtquelle. Sie kann mehrere Moden emittieren, die sich ihre räumliche Verteilung unterscheiden oder auch nur in ihrer Phase mit entsprechenden Phasenfluktuationen. Die einzelnen Moden können mit kohärenten-, thermischen- oder Nummernzuständen besetzt sein oder Kombinationen davon. Es stellt sich aber heraus, dass alle Einmodenquellen einen konstanten Kohärenzgrad von 1 haben:

$$|g^{(1)}| = 1 \text{ für "Singlemode"-Quellen.}$$

- Als nächstes beschreiben wir auch das Messgerät für den Kohärenzgrad nämlich das Mach Zender Interferometer quantenmechanisch. Die Lichtquelle sendet Licht in einer Mode aus, die man aber zweckmäßigerweise in zwei Moden zerlegen kann.



Jede Mode hat ihren eigenen Erzeuger und Vernichter, aus dem sich Teilchenzahl und Feld ergeben. Das Feld am Detektor ist dann die Summe beider Felder. Für den Teil des Feldes mit positiver Frequenz, \hat{E}^+ , erhält man:

$$\hat{E}^+ = K_1 \cdot \hat{a}_1 \cdot e^{i\phi_1} + K_2 \cdot \hat{a}_2 \cdot e^{i\phi_2}$$

K_1 und K_2 sind durch die Strahlteiler gegeben. $\phi_1 = k \cdot s_1$ und $\phi_2 = k \cdot s_2$ sind die Phasen, die auf den Wegen aufgesammelt werden. Die Intensität am Detektor ist

$$\hat{I} = K_1^2 \cdot \langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \rangle + K_2^2 \cdot \langle \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle + 2K_1 \cdot K_2 \cdot \cos(k(s_1 - s_2)) \langle a_1^+ a_2 \rangle$$

Zur Berechnung der Erwartungswerte $\langle \rangle$ benötigt man den Zustand.

- Wir betrachten einen Nummernzustand $|n\rangle$. Die Moden werden durch n-malige Anwendung des Erzeugers a^+ mit Photonen besetzt:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle$$

wobei

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+).$$

D. h. es werden Photonen zu gleichen Teilen in beiden Moden erzeugt. Da sich die beiden Moden am Ort der Quelle nicht unterscheiden ist dies eine zwar offensichtliche aber wichtige Annahme. Für die Erwartungswerte erhält man dann:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 | n \rangle &= \langle 0 | \hat{a}^n \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 (\hat{a}^+)^n | 0 \rangle \frac{1}{n!} \\ &= \dots = \frac{1}{2} n. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$\langle n | \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 | n \rangle = \frac{1}{2} n$$

und

$$\langle n | \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 | n \rangle = \frac{1}{2} n.$$

Damit lautet die Intensität am Dektektor:

$$\begin{aligned} I &= \langle \hat{I} \rangle = K_1^2 \cdot \frac{n}{2} + K_2^2 \cdot \frac{n}{2} + K_1 \cdot K_2 \cdot \cos(k\Delta s) \cdot n \\ I &= \frac{n}{2} \left(K_1^2 + K_2^2 + \sqrt{K_1^2 \cdot K_2^2} \cdot 2 \cos(k \cdot \Delta s) \right), \end{aligned}$$

was genau dem klassischen Ergebnis entspricht. Entsprechend kann man das Ergebnis auch umschreiben als:

$$\langle \hat{I} \rangle = \langle \hat{I}_1 \rangle + \langle \hat{I}_2 \rangle + \sqrt{\langle \hat{I}_1 \rangle \cdot \langle \hat{I}_2 \rangle} \cdot 2 \operatorname{Re}(g^1)$$

Wie in der klassischen Beschreibung gibt der Kohärenzgrad den Kontrast des Interferometers an.

- Alle Lichtfelder, die am Eingang des Interferometers aus nur einer einzigen Mode bestehen, die allerdings mit beliebiger Photonenzahl und deren Überlagerungen besetzt sein kann, ist kohärent in 1. Ordnung, d. h. $|g^{(1)}| = 1$. Chaotisches Licht kann man im Einzelmodenbild nicht erklären, dazu ist eine Multimodenbeschreibung notwendig.
- Eine solche Multimodenbeschreibung kann man mit Hilfe der Dichtematrix einführen. Der Erwartungswert $\langle \hat{E}_1^- \cdot \hat{E}_2^+ \rangle$ ist im Dichtematrixformalismus durch die Spur gegeben

$$\text{Tr} \left(\rho \cdot \hat{E}_1^- \cdot \hat{E}_2^+ \right).$$

Man erhält also folgenden Zusammenhang zwischen Dichtematrix und Kohärenzgrad:

$$g^{(1)} = \frac{\text{Tr}(\rho \cdot \hat{E}_1^- \cdot \hat{E}_2^+)}{\left(\text{Tr}(\rho \cdot \hat{E}_1^- \cdot \hat{E}_1^+) \cdot \text{Tr}(\rho \cdot \hat{E}_2^- \cdot \hat{E}_2^+) \right)^{1/2}}.$$

Für ein reines Gemisch erhält man wieder den Kohärenzgrad 1. Für statistische Gemische von Photonen in einer Mode ist der Kohärenzgrad immer noch 1. Erst für Statistische Gemische aus vielen Moden erhält man einen Wert kleiner 1.

Kohärenzgrad 2. Ordnung.

Klassische Beschreibung

- Jedes Einmoden-Lichtfeld hat eine maximale Kohärenz 1. Ordnung von 1, egal ob chaotisch oder kohärent! Diese statistische Eigenschaft des Lichtfelds kann mit einem Interferometer also nicht getestet werden. Die statistische Natur der Photonenzusammensetzung einer Mode kann aber in einem Intensitätskorrelationsexperiment beobachtet werden. Man fragt: "Wenn zu einem Zeitpunkt t die Intensität des Lichtfelds $I(t)$ ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man zum Zeitpunkt $t + \tau$ eine Intensität $I(t + \tau)$ misst?"
- Zunächst die klassische Version. Die Definition der Intensitätskorrelation lautet:

$$g^{(2)}(\tau) := \frac{\langle I(t) \cdot I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \cdot I(t) \rangle}$$

oder

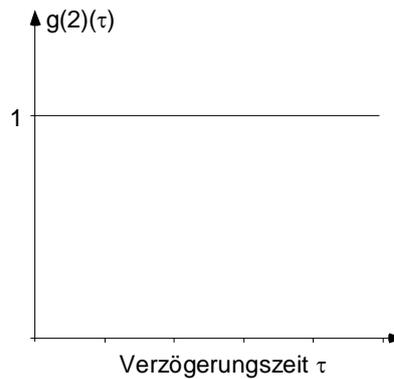
$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t) \cdot E^*(t + \tau) \cdot E(t + \tau) E(t) \rangle}{\langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle^2}$$

- Beispiel: Für eine monochromatisch klassische Welle

$$E(t) = E_0 \cdot e^{i\omega t}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle E_o \cdot e^{-i\omega t} \cdot E_o \cdot e^{-i\omega(t+\tau)} \cdot E_o \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega(t+\tau)} \rangle}{\langle E_o \cdot e^{-i\omega t} \cdot E_o \cdot e^{i\omega t} \rangle^2} \\
 &= \frac{\langle E_o^4 \rangle}{\langle E_o^2 \rangle^2} = \frac{E_o^4}{E_o^4} = 1.
 \end{aligned}$$



- Chaotisches Licht. Das Feld ist eine Summe von N unabhängigen Wellen, von denen wir annehmen, dass sie gleiche Frequenz und gleiche Amplitude haben. Nur die Phasen sind statistisch verschieden. Also:

$$E(t) = \sum_n E_o e^{i\omega_o t + i\varphi_n(t)} = \sum_n E_n(t)$$

Der zeitliche Mittelwert lautet:

$$\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle = \sum_{k,l,m,n=1}^N \langle E_k^*(t)E_l^*(t+\tau)E_m(t+\tau)E_n(t) \rangle$$

Die Summe kann man in vier Untersummen zerlegen:

$$\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

mit den reinen Termen

$$S_1 = \sum_{n=1}^N \langle E_n^*(t)E_n^*(t+\tau)E_n(t+\tau)E_n(t) \rangle,$$

den halb gemischten Termen, in denen jeweils zwei Indizes gleich sind

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \sum_{n \neq m} \langle E_n^*(t)E_m^*(t+\tau)E_m(t+\tau)E_n(t) \rangle \\
 S_3 &= \sum_{i \neq j} \langle E_n^*(t)E_m^*(t+\tau)E_n(t+\tau)E_m(t) \rangle,
 \end{aligned}$$

und den vollständig gemischten Termen

$$S_4 = \sum_{n \neq m \neq k \neq l} \langle E_k^*(t) E_l^*(t + \tau) E_m(t + \tau) E_n(t) \rangle.$$

Für völlig unabhängige Felder ist der Mittelwert der Produkte gleich dem Produkt der Mittelwerte. Die Summe S_4 verschwindet daher komplett, da der zeitliche Mittelwert über jedes einzelne Feld im Summanden verschwindet. Für S_3 gilt entsprechend

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i \neq j} \langle E_n^*(t) E_m^*(t + \tau) E_n(t + \tau) E_m(t) \rangle \\ &= \sum_{i \neq j} \langle E_n^*(t) E_n(t + \tau) \rangle \langle E_m^*(t + \tau) E_m(t) \rangle \\ &= N(N + 1) |\langle E_n^*(t) E_n(t + \tau) \rangle|^2. \end{aligned}$$

Der zeitliche Mittelwert $\langle E_m^*(t + \tau) E_m(t) \rangle$ ist für jedes Feld gleich. Daher erhält man eine Summe über gleiche Summanden. Die verbleibenden Summen S_1 und S_2 kann man direkt umformen:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=1}^N \langle E_n^*(t) \cdot E_n^*(t + \tau) E_n(t + \tau) E_n(t) \rangle \\ &= \sum_{n=1}^N \langle |E_n(t)|^2 \cdot |E_n(t + \tau)|^2 \rangle \\ &= N \langle |E_n(t)|^2 \cdot |E_n(t + \tau)|^2 \rangle = N E_0^4 \end{aligned}$$

Da sich die Wellen nur durch die Phase unterscheiden sind die Beträge und damit die Mittelwerten unter der Summe für alle Wellen gleich. Für S_2 gilt entsprechend

$$S_2 = \sum_{n \neq m}^N \langle |E_n(t)|^2 \cdot |E_m(t + \tau)|^2 \rangle = N(N - 1) E_0^4.$$

Damit lautet

$$\langle E^*(t) \cdot E^*(t + \tau) E(t + \tau) E(t) \rangle = N E_0^4 + N(N - 1) E_0^4 + N(N - 1) |\langle E_n^*(t) E_n(t + \tau) \rangle|^2$$

Für $N \gg 1$ nähern wir $N \cdot (N - 1) \sim N^2$. Außerdem vernachlässigen wir den linearen Term in N , der klein ist gegenüber den quadratischen Termen. Schließlich brauchen wir noch den Nenner $\langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle^2$. In der Doppelsumme überleben aufgrund der statistischen Phasen nur die reinen Terme:

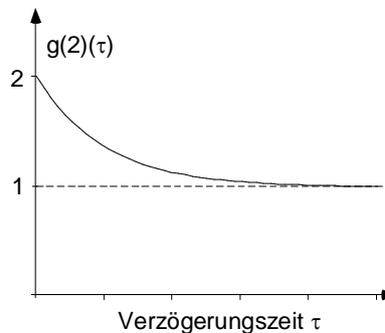
$$\begin{aligned} \langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle^2 &= \left\langle \sum_{n,m}^N E_n^*(t) E_m(t) \right\rangle^2 \\ &= \left(\sum_n^N \langle E_n^*(t) E_n(t) \rangle \right)^2 \\ &= (N E_0^2)^2 = N^2 E_0^4 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Korrelationsgrad:

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle E^*(t) \cdot E^*(t + \tau) \cdot E(t + \tau) \cdot E(t) \rangle}{\langle E^*(t) \cdot E(t) \rangle^2} \\
 &= \frac{N^2 E_0^4 + N^2 |\langle E_n^*(t) E_n(t + \tau) \rangle|^2}{N^2 E_0^4} \\
 &= 1 + \underbrace{\frac{|\langle E_n^*(t) E_n(t + \tau) \rangle|^2}{E_0^4}}_{|g^{(1)}(\tau)|^2}
 \end{aligned}$$

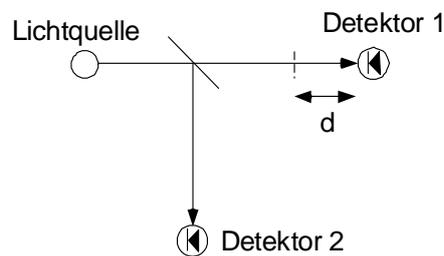
Der zweite Term ist gerade $|g^{(1)}(\tau)|^2$, so dass man für chaotisches Licht den Zusammenhang erhält:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2$$



Diesen Zusammenhang kann man auch für andere Formen chaotischen Lichts zeigen. Er gilt allgemein. Aus der Messung von $g^{(2)}(\tau)$ kann man den Kontrast eines Interferometers, also die Interferenzfähigkeit des Lichts bestimmen.

- Der Standardaufbau zur Messung der Korrelation 2.Ordnung ist nicht das Mach-Zender-Interferometer sondern das Hanbury-Brown und Twiss Experiment::

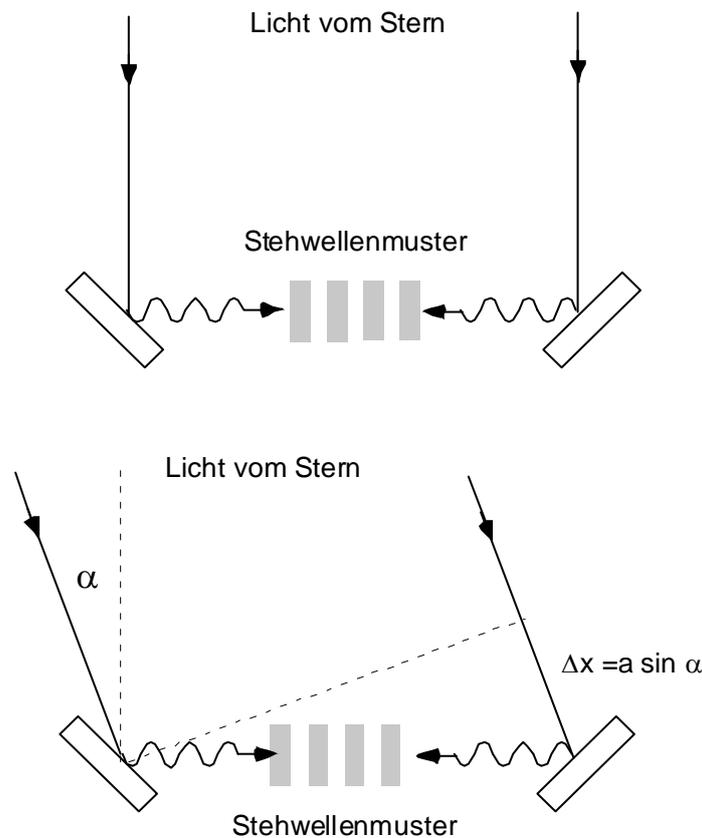


Durch Verändern von d wird die Verzögerung $\tau = \frac{d}{c}$ eingestellt. Beide Signale werden multipliziert, gemittelt und normiert. Durch Variation von d kann man die Funktion $g^{(2)}(\tau)$ bestimmen.

Beispiel: Bestimmung von Sterndurchmesser nach Hanbury-Brown und Twiss

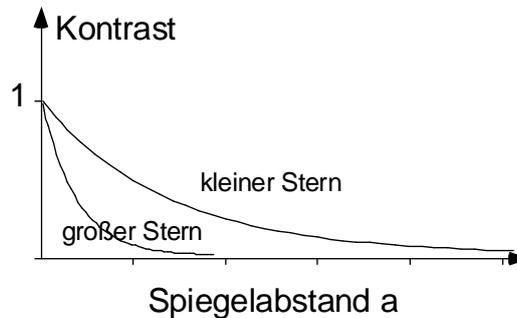
Dazu müssen wir uns zunächst das Michelsonsche Sterneninterferometer anschauen.

- Michelsonsche Sterneninterferometer. Die Größe eines Sterns kann man, ohne direkte Abbildung, durch eine interferometrische Messung bestimmen. Licht desselben Stern wird über zwei kleine möglichst weit entfernte Spiegel (A und B) in ein Teleskop gelenkt und am Ort des Beobachters überlagert.



Dort erhält man ein räumliches Interferenzmuster. Fällt das Licht unter einem Winkel α relativ zur Achse des Teleskops ein so ändert sich die Relativphase φ der beiden überlagerten Strahlen $\varphi = k \cdot a \cdot \sin \alpha$, wobei a den Abstand zwischen den beiden Spiegeln und k die Wellenzahl des Lichts bezeichnet. Das Interferenzmuster wandert ein kleines Stück. Ein Stern ist eine Ansammlung inkohärenter Lichtquellen, die vom Interferometer unter verschiedenen Winkeln α gesehen werden und deren Intensitäts-Interferenzmuster sich additiv überlagern, da alle Quellen relativ zueinander inkohärent sind. Ist der Stern so klein, dass alle Quellen praktisch aus derselben Richtung kommen und die Interferenzmuster alle gleich sind, ist der Kontrast des Gesamtmusters gut.

Ist der Stern so groß, dass der Winkel α zu einer Phasenverschiebung von π führt, liegen die Muster gegeneinander verschoben verteilt. Intensitätsmaxima decken sich mit den Maxima und der Kontrast des Gesamtmusters verschwindet. Durch Messen des Kontrasts als Funktion von des Spiegelabstands a , misst man die Interferenzfähigkeit der Quelle und damit den Durchmesser.



- Hanbury-Brown & Twiss-Experiment. Die Interferenzfähigkeit und damit die Sterngröße erhält man aber auch durch eine simple Korrelationsmessung der Intensität an den Stellen der beiden Spiegel, die durch Detektoren ersetzt werden. Durch messen der $g^{(2)}$ -Korrelation lässt sich die Interferenzfähigkeit des Sternenlichts alternativ zum Michelson Interferometer messen und zur Größenbestimmung von Sternen verwenden. Hanbury-Brown und Twiss haben zunächst ein Test-Experiment im Labor aufgebaut und damit die $g^{(2)}$ -Korrelation einer Dampfampe gemessen. Dies war eines der ersten quantenoptischen Experimente und hat eine lebhafte Diskussion darüber ausgelöst ob das ganze auch mit einzelnen Photonen funktioniert, die in großem zeitlichen Abstand aus einer sehr schwachen Quelle kommen.

Korrelation 2ter Ordnung mit Photonen.

- $g^2(\tau)$ -Funktion quantenmechanisch. Analog zur quantenmechanische Definition der $g^1(\tau)$ -Funktion definiert man:

$$g^2(\tau) = \frac{\langle \hat{E}^-(t) \hat{E}^-(t+\tau) \hat{E}^+(t+\tau) \hat{E}^+(t) \rangle}{\langle \hat{E}^-(t) \hat{E}^+(t) \rangle \langle \hat{E}^-(t+\tau) \hat{E}^+(t+\tau) \rangle}$$

(Normalordnung: Vernichter stehen rechts, Erzeuger links).

- Beispiel: $g^2(\tau)$ -Funktion für eine Mode. Besteht das System aus nur einer Mode erhält man mit

$$E^+ \sim a \cdot e^{i(kr+\omega t)}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 g^2(\tau) &= \frac{\langle a^+ a^+ a a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} \\
 &= \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} \\
 &= 1 + \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}.
 \end{aligned}$$

Hier geht der Teilchenzahloperator a^+a ein, die Vertauschungsrelationen für a und a^+ und die Standardabweichung $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$. Für einen kohärenten Zustand gilt:

$$\sqrt{\langle \Delta n^2 \rangle} = \sqrt{\langle n \rangle} \implies g^{(2)}(\tau) = 1$$

und man erhält eine konstante Korrelation mit dem Wert 1. Für den thermischen Zustand ist die Photonenschwankung

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2$$

und damit:

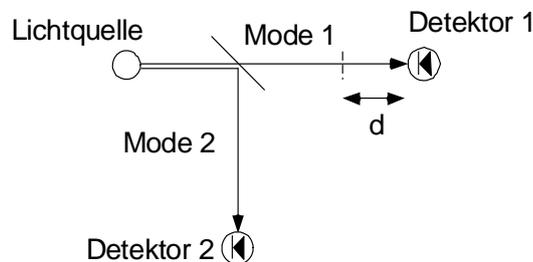
$$g^{(2)}(\tau) = 2$$

Anders als die $g^{(1)}$ -Funktion unterscheidet sich die $g^{(2)}$ -Funktion auch für eine Mode abhängig davon ob sie mit kohärentem Licht oder mit thermischen Licht besetzt ist! Dies ist ein rein quantenmechanische Phänomen. Klassisch erwartet man für eine Einmodenfeld immer $g^{(2)} = 1$.

- Ein chaotisches Multimoden-Feld liefert dieselbe Korrelationsfunktion wie das klassische Modell (was wir hier ohne Rechnung glauben):

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2.$$

- Korrelationsmessung im Quantenbild: Wieder zerlegen wir die Eingangsmode in zwei Teilmoden.



Man würde erwarten, dass die Photonen von der Lampe beliebig in die eine oder in die andere Mode abgegeben werden, so dass man auch für kleinste Zeitunterschiede (=Weglängenunterschiede) Photonen unabhängig an beiden Detektoren misst. Die $g^{(2)}$ -Funktion wäre damit konstant gleich 1. Tatsächlich gilt dies nur für eine kohärente Lichtquelle! Für eine chaotische Lichtquelle nimmt die $g^{(2)}(\tau)$ -Funktion für $\tau \rightarrow 0$ zu. Experimentell beobachtet man eine erhöhte Korrelation für kleine Zeiten, genauso, wie man es klassisch ausrechnet. Photonen einer chaotischen Lichtquelle tendieren dazu, gemeinsam aufzutreten. Diese Phänomen nennt man "Photon-bunching".

- Warum gibt es Photon-Bunching für chaotisches Licht? Bunching entsteht durch chaotisches Intensitätsrauschen. Chaotisches Intensitätsrauschen entsteht durch zufällige Interferenz verschiedener Felder, d. h. verschiedener Moden. Ein rauschendes Feld hat kurzzeitig eine höhere Intensität als ein ruhiges Feld gleicher mittlerer Feldstärke: Aufgrund der quadratischen Abhängigkeit der Intensität vom Feld führt ein Feldüberschwinger zu einer überproportionalen Intensitätserhöhung und ein Feldunterschwinger zu einer unterproportionalen Intensitätsabsenkung. Die Feldschwankungsspitzen werden durch die Quadrierung überhöht. Da Intensität proportional zur gemessenen Photonenzahl ist, führt ein Feldrauschen zu einem Auftreten von Photonenbündeln. Bei Einmodenlicht gibt es keine derartigen stochastischen Interferenzen von verschiedenen Moden. Quantenmechanisch erhält man jedoch für thermisches Einmodenlicht ebenfalls überhöhtes Rauschen und damit Photon-Bunching. Dies ist ein echtes Quantenrauschen ohne klassische Analogie! Die Dichtematrix enthält keine Nebendiagonalelemente, die Kohärenzen mitteln sich heraus. Es bleibt aber ein Rauschen um den verschwindenden Mittelwert. Nur der kohärente Zustand hat eine unkorrelierte Photonenzahlstatistik. Die Dichtematrix hat von Null verschiedene Diagonalelemente (enthält Kohärenzen), die Phasen sind im Mittelwert enthalten und verursachen eine makroskopische Phase. Es bleibt nur ein minimales Unschärferauschen. Es gibt in der Physik der kalten Gase einen ähnlichen Effekt. Dreikörperstöße sind im Bose-Kondensat 6-fach unterdrückt im Vergleich zum thermischen Gas. Im Kondensat sind die Atome unkorreliert, im thermischen Gas gibt es stärkere Dichteschwankungen, in deren Maxima Dreikörperstöße überproportional begünstigt werden.

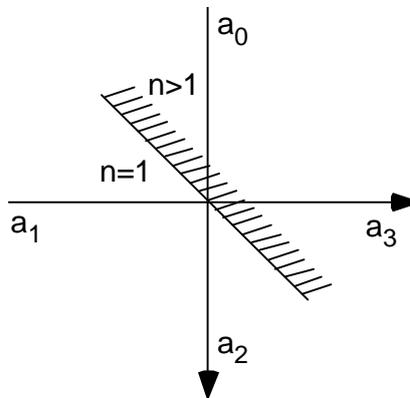
Chapter 5

Strahlteiler und Interferometer

Bisher haben wir immer nur von einer Mode des Lichtfeldes gesprochen. Interessant ist es zwei Moden zu koppeln, d.h. einen Energieaustausch zwischen zwei Moden zu erlauben. Experimentell erreicht man das mit einem halbdurchlässigen Spiegel, der ein Teil des Lichts einer Mode in eine andere umlenkt. Teilt man einen Strahl um ihn später an einem zweiten Strahlteiler wieder zusammenzuführen erhält man ein Mach-Zehnder-Interferometer. Wie beschreibt man einen Strahlteiler und ein solches Interferometer quantenmechanisch? Die eigentlich simple Frage ist überraschend vielseitig. Wie wird beispielsweise ein Nummernzustand am Strahlteiler aufgeteilt? Entsteht an den Ausgängen wieder Nummernzustände? Liegt an beiden Eingängen jeweils ein Nummernzustand mit einem Photon an, wie verteilen sich die beiden Photonen auf die Ausgänge. Hier gibt es Überraschungen. Beginnen wir mit dem Strahlteiler.

Strahlteiler

- Wir stellen uns zunächst eine dielektrische Grenzschicht zwischen Vakuum und einem Material mit Brechungsindex n vor, an der ein Teil (z.B. 50%) des Lichts reflektiert und ein Teil transmittiert wird. Absorption oder Streuung solle es keine geben.



Insgesamt erhält man 4 Moden, Mode 0 und Mode 1 an den beiden Eingängen und Mode 2 und Mode 3 an den beiden Ausgängen. Die Moden werden durch den Strahlteiler gekoppelt. Stellen wir uns ein Photon in Mode 1 vor. Ein Photon ist unteilbar. Es muss also an einem teildurchlässigen Spiegel entweder reflektiert oder transmittiert werden. Beides gleichzeitig sollte, nicht nur im statistischen Mittel, sondern auch im Einzelfall nicht vorkommen. Der Zustand, der diese Eigenschaft liefert, ist ein verschränkter Zustand der Form

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_2|0\rangle_3 + e^{i\theta}|0\rangle_2|1\rangle_3).$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude ein Photon in Mode 2 zu finden und keines in Mode 3 wäre

$$\begin{aligned} {}_2\langle 1|_3\langle 0|\varphi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}_2\langle 1|1\rangle_{23}\langle 0|0\rangle_3 + e^{i\theta} {}_2\langle 1|0\rangle_{23}\langle 0|1\rangle_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}_2\langle 1|1\rangle_{23}\langle 0|0\rangle_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsamplitude kein Photon in Mode 2 zu finden und eines in Mode 3:

$$\begin{aligned} {}_2\langle 0|_3\langle 1|\varphi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}_2\langle 0|1\rangle_{23}\langle 1|0\rangle_3 + e^{i\theta} {}_2\langle 0|0\rangle_{23}\langle 1|1\rangle_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\theta} {}_2\langle 0|0\rangle_{23}\langle 1|1\rangle_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind also beide $1/2$. Die Wahrscheinlichkeit ein Photon in Mode 2 zu finden und eines in Mode 3 ist dagegen Null:

$$\begin{aligned} {}_2\langle 1|_3\langle 1|\varphi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}_2\langle 1|1\rangle_{23}\langle 1|0\rangle_3 + e^{i\theta} {}_2\langle 1|0\rangle_{23}\langle 1|1\rangle_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ({}_2\langle 1|1\rangle \cdot 0 + e^{i\theta} \cdot 0 \cdot {}_3\langle 1|1\rangle_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wie kann man die Existenz eines solchen verschränkten Zustand $|\varphi\rangle$ theoretisch begründen und wie groß ist die Relativphase θ ?

- Eine konsistente Beschreibung erhält man, wenn man sich fragt wie ein Erzeuger einer Mode auf die anderen Moden wirkt. Ein Photon, das in Mode 1 erzeugt wird, kann mit

einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auch in Mode 2 und Mode 3 gemessen werden. Es wird also in Mode 2 und Mode 3 mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ebenfalls ein Photon erzeugt. Dies motiviert den Ansatz:

$$\begin{aligned} a_2 &= r a_1 + t' a_0 \\ a_3 &= t a_1 + r' a_0. \end{aligned}$$

Die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten, r, r', t, t' , sind komplex und beschreiben damit auch einen möglichen Phasensprung der Felder an der Grenzfläche. Daher muss man die Reflexion/Transmission beim Übergang vom optisch dünnen zum optisch dichten Medium (r, t) grundsätzlich von der Situation unterscheiden, bei der das Licht vom optisch dichten zum optisch dünnen Medium übergeht (r', t').

- Wir fordern, dass die Erzeuger und Vernichter für verschiedene Moden miteinander vertauschen und außerdem für jede einzelne Mode den üblichen Vertauschungsrelationen gehorchen.

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^+] &= \delta_{ij} \\ [a_i, a_j] &= [a_i^+, a_j^+] = 0 \\ \text{für } i, j &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Diese Relationen werden erfüllt, wenn die Beträge der Koeffizienten gleich sind

$$\begin{aligned} |r'| &= |r| \\ |t| &= |t'|, \end{aligned}$$

und die Energieerhaltung

$$|r|^2 + |t|^2 = 1$$

erfüllt ist. Außerdem muss noch gelten:

$$\begin{aligned} r^* t' + r' t^* &= 0 \\ r^* t + r' t^* &= 0. \end{aligned}$$

- Für unsere Grenzfläche können wir die Koeffizienten mit den klassischen Koeffizienten für die Felder identifizieren, wie man sie aus den Maxwell-Gleichungen ausrechnet. Das Ergebnis sind die Fresnel-Formeln, die für die Transmission keinen Phasensprung und für die Reflexion am optisch dichteren Medium einen Phasensprung von π vorhersagen. Die Reflexion am optisch dünneren Medium erfolgt ohne Phasensprung. Also

$$t' = t = t^* = t'^*,$$

und

$$\begin{aligned} \frac{r}{|r|} &= -1, \\ \frac{r'}{|r'|} &= 1. \end{aligned}$$

Die Reflexionskoeffizienten sind demnach wie die Transmissionskoeffizienten reel:

$$\begin{aligned} r &= -|r| \\ r^* &= -|r^*| = -|r| = r, \end{aligned}$$

(entsprechend r').

- Für beliebige Strahlteiler, die nicht nur aus einer einfachen Grenzfläche bestehen, muss das nicht so sein. Aus den Vertauschungsrelationen ergibt sich aus der Bedingung $t' = t = t^* = t'^*$, lediglich dass

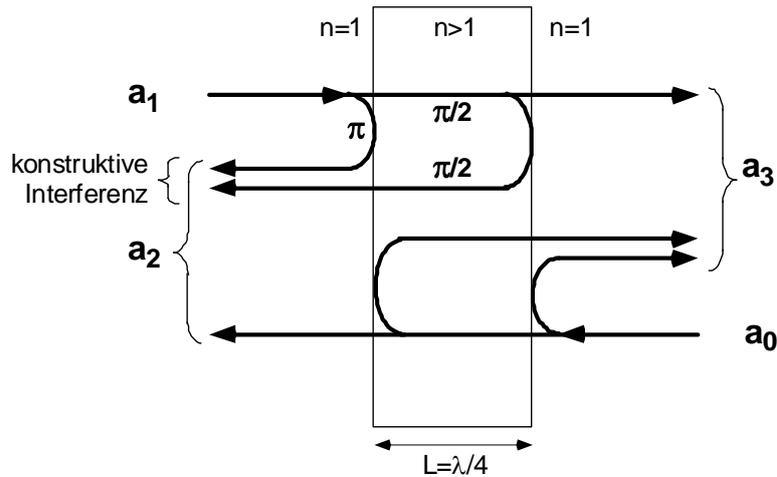
$$r^* + r' = 0,$$

woraus sich folgern lässt:

$$\begin{aligned} r^* r + r' r &= 0 \\ r' r &= -r^* r \\ \frac{r' r}{|r'| |r|} &= -\frac{r^* r}{|r'| |r|} \\ \frac{r' r}{|r'| |r|} &= -\frac{r^* r}{|r| |r|} = -\frac{|r|^2}{|r|^2} = -1. \end{aligned}$$

Die Phasen von r und r' addieren sich zu π . Dies wird z.B. auch erfüllt mit $r = i|r|$ und $r' = i|r'|$, (siehe unten bei der Behandlung der $\lambda/4$ - Schicht weiter unten.)

- Für einen hypothetischen Strahlteiler mit einem Eingang und zwei Ausgängen lassen sich die Vertauschungsrelationen nicht erfüllen! Es muss also immer zwei Eingänge geben. Bei nur einem Lichtstrahl an einem der beiden Eingänge liegt am anderen Eingang immer auch Vakuum an. Man koppelt dadurch unvermeidliches Vakuumrauschen ein
- Bisher haben wir als Strahlteiler eine dielektrische Grenzschicht angenommen, an der das Licht gemäß der Fresnel-Formeln teilweise reflektiert wird. Das transmittierte Licht bewegt sich dann allerdings nicht im selben Medium wie das reflektierte Licht. Ein Strahlteiler, der zwei Moden koppelt, die im selben Medium propagieren, muß daher anders aussehen. Als einfachstes Model betrachten wir eine $\lambda/4$ - Schicht, die sich z.B, in Luft befindet.



Mode a_1 und a_2 enden an der linken Seite der Schicht, Mode a_0 und a_3 an der rechten Seite der Schicht. Die Schichtdicke ist so gewählt, dass eine erhöhte Reflexion entsteht. Dazu muss die direkte Reflexion an der ersten Grenzschicht mit dem Licht konstruktiv interferieren, das erst an der zweiten Grenzschicht reflektiert wird. Da bei direkter Reflexion die Phase um π verschoben wird muß die Schicht eine Dicke von $\lambda/4$ haben, damit das Licht, das den Weg über die zweite Grenzschicht nimmt, ebenfalls eine Phase von π aufammelt. Für das transmittierte Licht bekommt man daher beim Durchgang durch die Schicht eine Phasenverschiebung von $\pi/2$.

- Ist der Brechungsindex n so gewählt, dass die Gesamreflexion gerade 50% beträgt, erhält man folgende Beziehungen zwischen den Feldoperatoren (Erzeuger und Vernichter werden hier nicht extra unterschieden):

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-a_1 + ia_0)$$

und

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-a_0 + ia_1).$$

Die Gleichungen kann man auch nach a_1 und a_0 auflösen:

$$a_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (a_3 + ia_2)$$

und

$$a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (a_2 + ia_3).$$

Die Erzeugung eines Photons in der Mode a_1 wirkt wie die Erzeugung je eines Photons in Mode a_2 und Mode a_3 mit jeweils halber Wahrscheinlichkeit und einer relativen Phasenbeziehung von $\pi/2$. Die Ergebnisse ändern sich nicht, wenn man vom

senkrechten Einfall hin zu einem Einfall unter einem Winkel, z.B. unter 45° , wechselt. Im Folgenden betrachten wir nur 50:50 Strahlteiler unter 45° , der verschiedene Moden koppelt, die sich im Vakuum befinden also in einer Umgebung mit Brechungsindex $n = 1$. Zusammenfassend kann man die Wirkung eines solchen Strahlteilers beschreiben durch

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Der globale Phasenvorfaktor i und $-i$ vor den Matrizen spielt in den meisten Experimenten keine Rolle und kann weggelassen werden. Wir verwenden im folgenden daher die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_0 + ia_1) \\ a_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + ia_0) \\ a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_2 - ia_3) \\ a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-ia_2 + a_3). \end{aligned}$$

und für die Erzeuger erhält man entsprechend:

$$\begin{aligned} a_2^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_0^+ - ia_1^+) \\ a_3^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^+ - ia_0^+) \\ a_0^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_2^+ + ia_3^+) \\ a_1^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ia_2^+ + a_3^+). \end{aligned}$$

- Betrachten wir das Beispiel eines Photons, das in Mode 1 erzeugt wird. Der Gesamtzustand des Systems lautet

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3.$$

Diesen Zustand kann man aus dem Vakuum erzeugen unter Anwendung eines Erzeugers auf Mode 1:

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 = a_1^+ |0\rangle_0 |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3.$$

Den Erzeuger kann man aber auch gemäß der Strahlteilergleichungen als Erzeuger für Mode 2 und Mode 3 auffassen:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-ia_2 + a_3)$$

woraus folgt:

$$a_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (ia_2^+ + a_3^+),$$

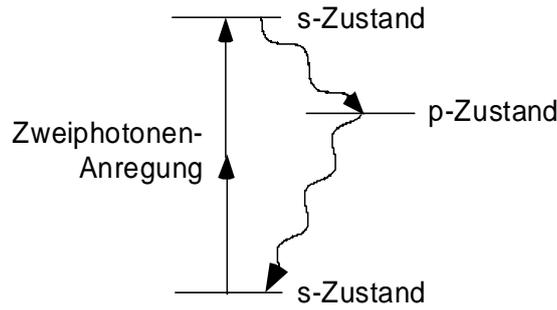
also

$$\begin{aligned} a_1^+ |0\rangle_0 |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ia_2^+ + a_3^+) |0\rangle_0 |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= |0\rangle_0 |0\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (ia_2^+ + a_3^+) |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= |0\rangle_0 |0\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (ia_2^+ |0\rangle_2 |0\rangle_3 + a_3^+ |0\rangle_2 |0\rangle_3) \\ &= |0\rangle_0 |0\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (i|1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3) \end{aligned}$$

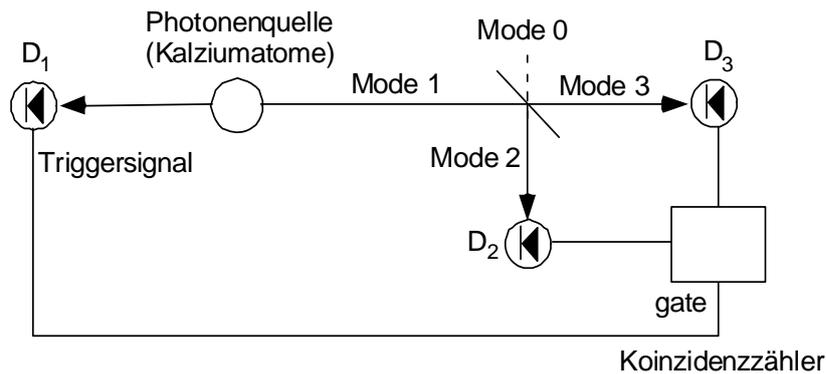
Ein Erzeuger angewandt auf Mode 1 führt also entweder zu einem Zustand mit einem Photon in Mode 1 oder zu einem Zustand in dem das Photon sich in einer Überlagerung der Zustände (ein Photon in Mode 2 und kein Photon in Mode 3) und (kein Photon in Mode 2 und ein Photon in Mode 3) befindet. Bei einer Messung am System finde ich das Photon entweder in Mode 1 oder in der Überlagerung aus Mode 2 und Mode 3, je nachdem ob ich vor oder hinter dem Strahlteiler meinen Detektor aufstelle. Sprechweise: Der Strahlteiler überführt das Photon in Mode 1 in einen verschränkten Zustand aus Mode 2 und Mode 3:

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (i|1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3).$$

- Experimentell kann man die Antikoinzidenz der Photonen an den beiden Ausgängen tatsächlich beobachten. Man verwendet ein Atom (Kalzium) mit einem s-Zustand als Grundzustand und einem s-Zustand als angeregten Zustand. Der Übergang erfolgt durch Zweiphotonenabsorption (ähnlich wie beim Wasserstoff-Übergang von 1s nach 2s) Zwischen beiden Energieniveaus gibt es noch einen p-Zustand in den der angeregte s-Zustand zerfällt. Der p-Zustand zerfällt dann schließlich in den Grundzustand. Diese Zerfallskaskade sendet zwei Photonen in entgegengesetzte Richtungen aus.



Eines der beiden Photonen dient als Nachweis für ein Zerfallsereignis. Es löst an Detektor D_1 ein Signal aus mit dem der Koinzidenzzähler kurzzeitig angeschaltet wird. Der Koinzidenzzähler erzeugt ein Signal, wenn an beiden Detektoren D_2 und D_3 gleichzeitig ein Photon gemessen wird. Dieses Ereignis wird experimentell nicht beobachtet, d.h., man beobachtet Antikoinzidenz. Am Eingang des Strahlteilers hat man es also mit einem einzigen unteilbaren Photon zu tun.



- Wie ändert sich der Zustand durch Wechselwirkung mit nur einem der beiden Detektoren hinter dem Strahlteiler? Welche Information kann man z.B. durch Detektor 3 erhalten und wie ändert sich dadurch der Zustand? Im Dichtematrixformalismus erhält man den neuen Zustand, der sich nach Wechselwirkung mit dem Detektor D_3 ergibt durch Spurbildung über alle möglichen Messwerte für D_3 . Dazu bilden wir zunächst die Dichtematrix des Zustand hinter dem Strahlteiler

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3).$$

Für die Dichtematrix ergibt sich:

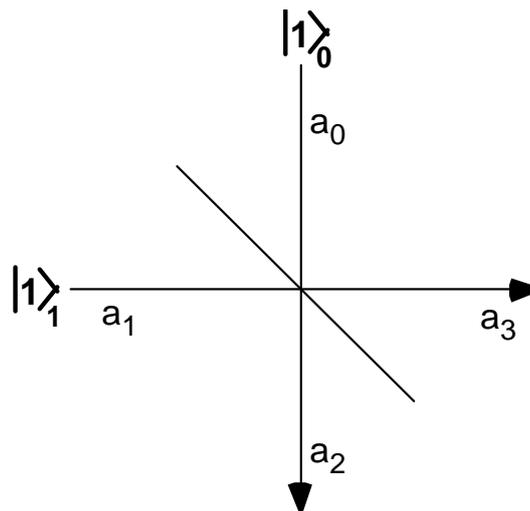
$$\begin{aligned} \rho_{2,3} &= |\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{2} (i|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3) (-i\langle 1|_2\langle 0|_3 + \langle 0|_2\langle 1|_3) \\ &= \frac{1}{2} (|1\rangle_2|0\rangle_3\langle 0|_3\langle 1|_2 + i|1\rangle_2|0\rangle_3\langle 0|_3\langle 1|_2 - i|0\rangle_2|1\rangle_3\langle 1|_3\langle 0|_2 + |0\rangle_2|1\rangle_3\langle 0|_3\langle 1|_2) \end{aligned}$$

Die reduzierte Dichtmatrix können wir in der Energiebasis der Nummernzustände berechnen:

$$\begin{aligned}
 \rho_2 &= \text{Tr}_3(\rho_{2,3}) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\langle n|\rho_{2,3}|n\rangle_3 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\langle n|1\rangle_2 |0\rangle_3 {}_2\langle 1|_3 \langle 0|n\rangle_3 + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\langle n|1\rangle_2 |0\rangle_3 {}_2\langle 0|_3 \langle 1|n\rangle_3 \\
 &\quad - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\langle n|0\rangle_2 |1\rangle_3 {}_2\langle 1|_3 \langle 0|n\rangle_3 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\langle n|0\rangle_2 |1\rangle_3 {}_2\langle 0|_3 \langle 1|n\rangle_3 \\
 &= \frac{1}{2} {}_3\langle 0|1\rangle_2 |0\rangle_3 {}_2\langle 1|_3 \langle 0|0\rangle_3 + \frac{1}{2} {}_3\langle 1|0\rangle_2 |1\rangle_3 {}_2\langle 0|_3 \langle 1|1\rangle_3 \\
 &= \frac{1}{2} |1\rangle_2 {}_2\langle 1| + \frac{1}{2} |0\rangle_2 {}_2\langle 0| = \frac{1}{2} (|1\rangle_2 {}_2\langle 1| + |0\rangle_2 {}_2\langle 0|)
 \end{aligned}$$

Die Nebendiagonalelemente sind verschwunden und damit die quantenmechanischen "Kohärenzen". Die Diagonalelemente ergeben die Wahrscheinlichkeiten eines klassischen Gemischs. Das Photon befindet sich mit 50% Wahrscheinlichkeit in Mode 2. Die Verschränkung ist durch Wechselwirkung mit Detektor 3 zerstört! Stellt man statt des Detektors 3 einfach eine schwarze Platte hin, die das Photon absorbiert, ändert sich am Ergebnis nichts. Auch eine solche Platte ist in diesem Sinne ein Detektor, da er prinzipiell einen Nachweis erlaubt: Die Energie ist deponiert egal ob man sie nun in der Platte misst oder nicht. Jede Ankopplung an ein "großes" System ist eine Messung und zerstört die Verschränkung.

- Was erhält man, wenn die beiden Eingangsmoden mit je einem Photon besetzt ist? Wie lautet der Zustand an den Ausgängen?



Wieder lässt sich der Eingangszustand auf den Vakuumzustand zurückführen

$$|1\rangle_0|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 = a_0^+ a_1^+ |0\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3.$$

Mit den Strahlteilerformeln

$$\begin{aligned} a_0^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_2^+ + ia_3^+) \\ a_1^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (ia_2^+ + a_3^+), \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} a_0^+ a_1^+ |0\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_2^+ + ia_3^+) \frac{1}{\sqrt{2}} (ia_2^+ + a_3^+) |0\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \frac{1}{2} |0\rangle_0|0\rangle_1 (ia_2^+ a_2^+ + a_2^+ a_3^+ - a_3^+ a_2^+ + ia_3^+ a_3^+) |0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \frac{i}{2} |0\rangle_0|0\rangle_1 (a_2^+ a_2^+ + a_3^+ a_3^+) |0\rangle_2|0\rangle_3. \\ &= \frac{i}{2} |0\rangle_0|0\rangle_1 \sqrt{2} (|2\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|2\rangle_3) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} |0\rangle_0|0\rangle_1 (|2\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|2\rangle_3). \end{aligned}$$

oder

$$|1\rangle_0|1\rangle_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|2\rangle_3).$$

Am Ausgang hat man also entweder beide Photonen am linken oder beide Photonen am rechten Strahlteiler. Je ein Photon an jedem Ausgang kommt nicht vor. Diese Möglichkeit interferiert destruktiv. Diese Interferenz ist nicht zu verwechseln mit der Interferenz klassischer Wellen. Hier interferieren Nummernzustände, deren Phasenerwartungswert völlig unbestimmt ist und die daher nicht im klassischen Sinne interferieren können. Dennoch sind die Zustände komplexwertige Größen und haben daher eine Phase. Die Anwendung einer Linearkombination von Erzeugern oder von Vernichtern kann die Quantenphase entsprechend den komplexwertigen Linearkoeffizienten ändern. Der Phasensprung am Strahlteiler, der völlig klassische Ursachen hat (Fresnel-Formeln), wird durch die Quantisierung zur Quantenphase der Feldoperatoren. Bei jeder Anwendung kann sich daher die Phase des Zustands ändern. Die Quantenphase lässt sich natürlich immer in den zeitabhängigen Exponentialfaktor hineinschreiben und kann daher als eine Zeitphase interpretieren werden.

- Die Erzeugung eines derart verschränkten Zustands funktioniert nur für zwei Photonen. Mit je n Teilchen an jedem Eingang erhält man einen Zustand der Form

$$|2n\rangle_2|0\rangle_3 + e^{i\varphi}|0\rangle_2|2n\rangle_3$$

nur für $n = 1!$ (selber nachrechnen)

- Was erhält man wenn man einen kohärenten Zustand an einem Eingang des Strahlteilers hat? Zur Beantwortung der Frage verwenden wir den "Verschiebeoperator", der aus einem Vakuumzustand einen kohärenten Zustand macht:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle.$$

Diesen Operator gibt es und der lautet (hier ohne Beweis):

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} |0\rangle_0|\alpha\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 &= |0\rangle_0 e^{\alpha a_1^\dagger - \alpha^* a_1} |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= |0\rangle_0 \exp\left(\alpha \frac{1}{\sqrt{2}} (i a_2^\dagger + a_3^\dagger) - \alpha^* \frac{1}{\sqrt{2}} (-i a_2 + a_3)\right) |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= |0\rangle_0 |0\rangle_1 \exp\left(\frac{i\alpha}{\sqrt{2}} a_2^\dagger - \frac{(i\alpha)^*}{\sqrt{2}} a_2\right) \exp\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} a_3^\dagger - \alpha^* \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right) |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= |0\rangle_0 |0\rangle_1 \left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3. \end{aligned}$$

Man erhält also am Ausgang je einen kohärenten Zustand mit halber mittlerer Photonenzahl wobei der reflektierte Strahl um 90° phasenverschoben ist. Das ist genau die klassische Erwartung.

- Was geschieht mit einem Nummernzustand. Für die Rechnung können wir das Ergebnis für den kohärenten Zustand verwenden. Wir wissen dass

$$|0\rangle_0|\alpha\rangle_1 \Rightarrow \left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3,$$

was sich ausgeschrieben so liest:

$$e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle_0 |N\rangle_1 \Rightarrow e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha/\sqrt{2})^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\alpha/\sqrt{2})^m}{\sqrt{m!}} |n\rangle_2 |m\rangle_3$$

Den rechten Teil kann man interessanterweise umformen in

$$e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha/\sqrt{2})^n}{\sqrt{n!}} \frac{(i\alpha/\sqrt{2})^m}{\sqrt{m!}} |n\rangle_2 |m\rangle_3 = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |\varphi\rangle_{23}$$

wobei

$$N = m + n$$

und

$$|\varphi\rangle_{23} := \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{n=0}^N i^n \sqrt{\frac{N!}{n!(N-n)!}} |n\rangle_2 |N-n\rangle_3.$$

Damit erhält man

$$e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle_0 |N\rangle_1 \Rightarrow e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |\varphi\rangle_{23}$$

Vergleicht man beide Seiten der Gleichung sieht man, dass

$$|0\rangle_0 |N\rangle_1 \Rightarrow |\varphi\rangle_{23}.$$

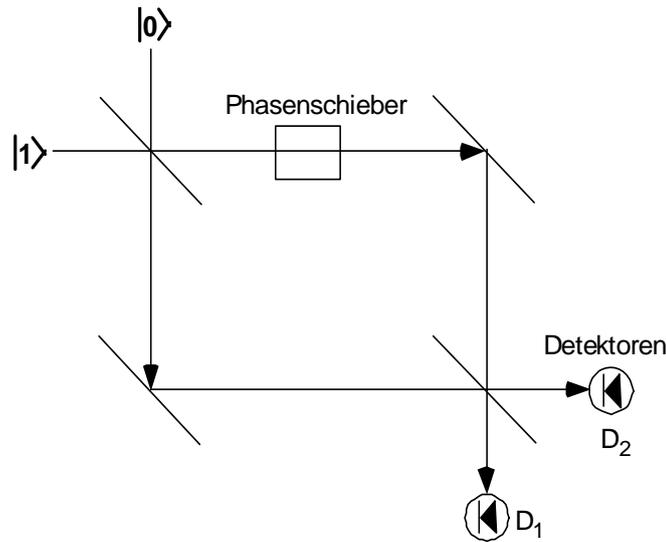
Die Wahrscheinlichkeit $P(n)$, n -Photonen an Ausgang 2 zu finden und den Rest ($N-n$) am Ausgang 3, ist

$$\begin{aligned} P(n) &= |{}_2\langle n|{}_3\langle N-n||\varphi\rangle_{23}|^2 = \left| \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{n'=0}^N i^{n'} \sqrt{\frac{N!}{n'!(N-n)!}} {}_2\langle n|{}_3\langle N-n||n'\rangle_2 |N-n'\rangle_3 \right|^2 \\ &= \frac{1}{2^N} \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{1}{2^N} \binom{N}{n} \end{aligned}$$

Die N Photonen des Eingangskanals werden entsprechend dem Binomialkoeffizient auf beide Ausgänge verteilt. Er gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man Objekte aus einer Menge von verschiedenen Objekten auswählen kann (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge). Die Binomialverteilung lässt sich für große N durch eine Poission-Verteilung annähern. Umso besser funktioniert das, wenn der Strahlteiler nicht 50:50 teilt sondern nur einen kleinen Teil von wenigen Prozent auskoppelt. Für den ausgekoppelten Strahl erhält man in guter Näherung einen kohärenten Zustand. Ein Fockzustand lässt sich nicht einfach teilen! Auch hier sehen wir die Tendenz, dass ein nichtklassischer Lichtzustand durch einen Eingriff fast immer die Tendenz hat "klassisch" zu werden.

Mach-Zender-Interferometer

- Mit der Kenntnis der Beschreibung eines Strahlteiler kann man jetzt auch kompliziertere Abfolgen von Strahlteiler beschreiben. Eine davon ist das Mach Zender Interferometer.



Die beiden Ausgänge eines Strahlteilers werden an einem zweiten Strahlteiler wieder zusammengefügt. Die relative Phase mit der die beiden Strahlen sich am zweiten Strahlteiler überlagern kann variiert werden.

- Welche Moden kommen vor? In der Region vor dem ersten Strahlteiler und hinter dem zweiten Strahlteiler, haben wir es jeweils mit zwei Moden zu tun. Zwischen den beiden Strahlteilern haben wir zwei Wege. Der untere Weg entspricht einer Mode. Der obere Weg teilt sich in eine Mode vor und eine hinter dem Phasenschieber. Gehen wir die Elemente einzeln durch:
- Erster Strahlteiler: Verfährt man wie oben beim Strahlteiler, in dem man den Eingangszustand aus dem Vakuum erzeugt und dann die Operatoren ersetzt erhält man zunächst hinter dem ersten Strahlteiler den Zustand

$$|0\rangle_v |1\rangle_v \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_z |1\rangle_z + i|1\rangle_z |0\rangle_z),$$

wobei der erste Term im Tensoprodukt die untere Mode, der zweite die obere Mode vor dem Phasenschieber ist. Die Indizes stehen für "vor" und "zwischen".

- Die Wirkung des Phasenschiebers erfassen wir wieder am einfachsten durch eine Operatorgleichung

$$a_{nach} = a_{vor} e^{-i\varphi}.$$

Die Wirkung des Feldoperators nach dem Strahlteiler entspricht der vor dem Strahlteiler zuzüglich eines Phasenfaktors $e^{i\varphi}$. Dies ist unser Ansatz. Der erste Summand entsteht durch Anwenden von a_{vor}^+ auf den Vakuumzustand

$$|0\rangle |1\rangle = a_{vor}^+ |0\rangle |0\rangle.$$

Nach dem Phasenschieber lautet der Zustand

$$a_{vor}^+ |0\rangle |0\rangle = a_{vor}^+ e^{i\varphi} |0\rangle |0\rangle = e^{i\varphi} |0\rangle |1\rangle,$$

also macht der Phasenschieber

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_z |1\rangle_z + |1\rangle_z |0\rangle_z) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi} |0\rangle_{z'} |1\rangle_{z'} + i |1\rangle_z |0\rangle_z).$$

- Der zweite Strahlteiler macht aus

$$|0\rangle_{z'} |1\rangle_{z'} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_n |1\rangle_n + i |1\rangle_n |0\rangle_n).$$

und

$$|1\rangle_z |0\rangle_z \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_n |0\rangle_n + i |0\rangle_n |1\rangle_n).$$

Damit erhält man am Ausgang

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_{out} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_n |1\rangle_n + i |1\rangle_n |0\rangle_n) \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (i |0\rangle_n |1\rangle_n + |1\rangle_n |0\rangle_n) \right) \\ &= \frac{1}{2} [(e^{i\varphi} - 1) |0\rangle |1\rangle + i (e^{i\varphi} + 1) |1\rangle |0\rangle]. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit das Photon am Detektor 2 zu finden, also im Zustand $|0\rangle |1\rangle$ erhält man durch Projektion und Betragsquadratbildung.

$$\begin{aligned} P_{D2} &= |\langle 0 | \langle 1 | \varphi \rangle_{out}|^2 \\ &= \left| \langle 0 | \langle 1 | \frac{1}{2} [(e^{i\varphi} - 1) |0\rangle |1\rangle + i (e^{i\varphi} + 1) |1\rangle |0\rangle] \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + 1) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi). \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für D_1

$$P_{D1} = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi).$$

Das Ergebnis entspricht genau der klassischen Interferenz.

Chapter 6

Photonenpaare

Lineare Optik und Brechungsindex

- Lineare Optik beschreibt die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie weit entfernt von einer Resonanz, d. h. ohne Absorption: Licht induziert in den Atomen ein elektrisches Dipolmoment. Die Atome strahlen wie Hertzsche Dipole wieder ab. In der linearen Optik macht man den Ansatz, dass die elektrische Polarisationswelle in der Materie proportional zum elektrischen Feld der Lichtwelle ist:

$$P = \varkappa^{(1)} \cdot E$$

Die Energie in Dipolnäherung ist proportional zu

$$-P \cdot E = -\varkappa^{(1)} \cdot E \cdot E.$$

Mit $\hat{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0V}}(\hat{a} + \hat{a}^+)$ und einer Proportionalitätskonstanten K erhält man den Hamiltonoperator

$$\tilde{H} = K(a + a^+)(a + a^+)$$

Die Zeitabhängigkeiten der einzelnen Terme sind:

$$\begin{aligned} a &\sim e^{-i\omega t} \\ a^+ &\sim e^{i\omega t} \\ a^+a &\sim 1 \\ aa^+ &\sim 1 \\ aa &\sim e^{-2i\omega t} \\ a^+a^+ &\sim e^{2i\omega t} \end{aligned}$$

- Nach Mittelung über die Schwingungsperiode verschwinden die oszillierenden Terme und es bleibt nur

$$H = \langle \tilde{H} \rangle = K(a^+a + aa^+).$$

Mit

$$[a, a^+] = 1$$

folgt

$$H = K \cdot 2\left(a^+a + \frac{1}{2}\right).$$

Der zweite Term sind die Vakuumsfluktuationen, die wir vernachlässigen. Damit erhält man:

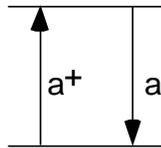
$$H = 2K \cdot a^+a.$$

Da die Erzeuger und Vernichter dimensionslos sind kann man die Konstante auch als Frequenz schreiben:

$$H = \hbar\Omega \cdot a^+a.$$

Dieser Wechselwirkungshamilton beschreibt den Brechungsindex. Es gibt keine Absorption also keinen Energieübertrag zwischen Atom und Licht. Damit kann sich nur noch die Phase der Lichtwelle ändern. Dieser Phasenversatz drückt sich im Brechungsindex aus. Die Frequenz Ω gibt die Stärke an, mit der das Feld an die Dipole des Kristalls koppeln.

- Die Wechselwirkung kann man als Diagramm darstellen. Der Aufwärtspfeil entspricht einem Erzeuger für eine Mode mit einer Frequenz, die durch die Länge des Pfeils gegeben ist. Entsprechend entspricht der Abwärtspfeil einem Vernichter. Das Produkt a^+a ist dann



Ein Aufwärtspfeil entspricht einem Term mit einer zeitlichen Abhängigkeit $e^{i\omega t}$, ein Abwärtspfeil entspricht einem Term mit einer zeitlichen Abhängigkeit $e^{-i\omega t}$. Die Summe der Pfeile muss Null ergeben, damit der Term nach zeitlicher Mittelung überlebt.

Bemerkung: In manchen Lehrbüchern wird ein Vernichter als Pfeil nach oben dargestellt und ein Erzeuger als Pfeil nach unten. Dies bedient die intuitive Vorstellung, dass die Vernichtung eines Photons einem Absorptionsprozess entspricht, der in Einsteins Ratenmodell als Pfeil nach oben dargestellt wird. Es ist Geschmacksache, ob man eher die Perspektive des Atoms oder die der Lichtmode annimmt. Wir nehmen hier die Perspektive der Mode ein, die eine Photonenerzeugung als Anregung "spürt".

- Wirkung eines Mediums mit Brechungsindex auf einen Nummernzustand $|N\rangle$:

$$\begin{aligned}
 U \cdot |N\rangle &= e^{-i\Omega t a^\dagger a} |N\rangle \\
 &= \sum_j (-i\Omega t)^j \frac{1}{j!} \underbrace{(a^\dagger a)^j}_{N^j |N\rangle} |N\rangle \\
 &= \sum_j \frac{1}{j!} (-i\Omega t N)^j |N\rangle \\
 &= e^{-iN\Omega t} |N\rangle
 \end{aligned}$$

Die Quantenphase des Nummernzustands oszilliert mit der Frequenz $N \cdot \Omega$, also der gesamten im Medium enthaltene elektrodynamische Wechselwirkungsenergie.

- Wirkung des Brechungsindex auf einen kohärenten Zustand. Der kohärente Zustand ist eine Überlagerung von Nummernzuständen, die alle eine unterschiedliche Wechselwirkungsenergie haben und daher mit einer unterschiedlichen Quantenphase rotieren. Der Überlagerungszustand bleibt ein kohärenter Zustand. Die Phase von α rotiert dabei aber zusätzlich mit Ωt . Das kann man direkt ausrechnen: Ein Zustand $|\alpha\rangle$ entwickelt sich zeitlich gemäß

$$U|\alpha\rangle = e^{-iH/\hbar t} |\alpha\rangle.$$

Mit

$$H = \hbar\Omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

folgt

$$U = e^{-i\Omega t a^\dagger a} = \sum_k (-i\Omega t)^k \frac{(a^\dagger a)^k}{k!}.$$

Angewandt auf den kohärenten Zustand

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_l \frac{\alpha^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle$$

ergibt

$$e^{-iH/\hbar t} |\alpha\rangle = \sum_{l,k} \frac{(-i\Omega t)^k}{k!} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{1}{\sqrt{l!}} \alpha^l (a^\dagger a)^k |l\rangle.$$

Mit

$$(a^\dagger a)^k |l\rangle = \hat{n}^k |l\rangle = l^k |l\rangle$$

folgt

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l,k} \frac{(-i\Omega t)^k}{k!} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{1}{\sqrt{l!}} \alpha^l l^k |l\rangle \\
 &= \sum_l \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{l!}} \alpha^l |l\rangle \cdot \underbrace{\sum_k \frac{(-i\Omega t \cdot l)^k}{k!}}_{(e^{-i\Omega t})^l} \\
 &= \sum_l \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{l!}} (e^{-i\Omega t} \alpha)^l \cdot |l\rangle = |e^{-i\Omega t} \alpha\rangle
 \end{aligned}$$

Solange die Photonen mit einer Stärke $\hbar\Omega$ an den Kristall koppeln, wandert die Phase des kohärenten Zustands mit einer konstanten zusätzlichen Rate Ω . Die Phasenverschiebung durch ein Medium mit Brechungsindex ist dann gegeben durch die Durchflugszeit l/c multipliziert mit Ω , also $\varphi = l/c \cdot \Omega$. Sie entspricht der Phase, die das Licht aufgrund des Brechungsindex n zusätzlich entlang des Kristalls aufammelt: $\varphi = (n - 1) k \cdot l$. Aufgelöst nach n ergibt:

$$n = \Omega / (kc) + 1 = 1 + \Omega/\omega.$$

Nichtlineare Optik

- Entwicklung der Polarisation. Allgemein kann man die Funktion $P(E)$ nach Potenzen des Feldes E entwickeln:

$$P = \varkappa^{(1)} \cdot E + \varkappa^{(2)} \cdot E^2 + \varkappa^{(3)} \cdot E^3 + \dots$$

Besteht das Feld aus mehreren Moden

$$E = E_1 + E_2 + \dots$$

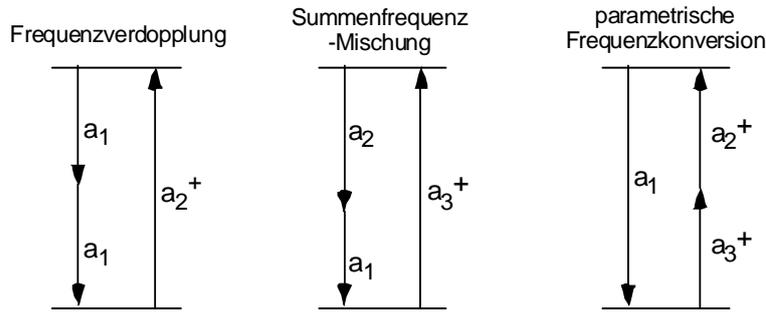
erhält man für die Energie

$$\begin{aligned}
 -P \cdot E &= \varkappa^{(1)}(E_1 + E_2 + \dots)(E_1 + E_2 + \dots) \\
 &+ \varkappa^{(2)}(E_1 + E_2 + \dots)(E_1 + E_2 + \dots)(E_1 + E_2 + \dots) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

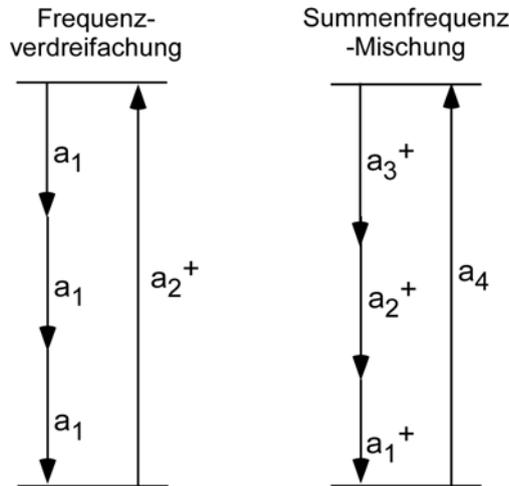
- Bei zwei Moden enthalten die Terme proportional zu $\varkappa^{(2)}$ Ausdrücke der Form

$$a_1^+ a_1^+ a_1^+, a_2^+ a_2^+ a_2^+, a_1^+ a_2^+ a_2^+, \dots, a_1^+ a_2 a_2 \dots a_2 a_2 a_2$$

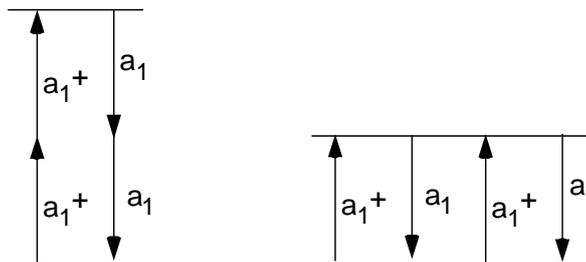
Die Diagramme für nichtverschwindende Mittelwerte sind:



- Terme proportional zu $\chi^{(3)}$ bestehen aus Produkten von 4 Operatoren. Mögliche Diagramme sind:

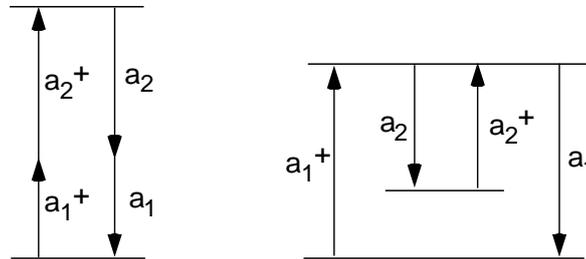


- Intensitätsabhängiger Brechungsindex. Diagramme der Form:



haben einen Einfluß auf den Brechungsindex. Hier werden netto keine Photonen erzeugt oder vernichtet. Es kann sich also nur um eine Phasenverschiebung des Lichtfeldes handeln. Diese Diagramme beschreiben den intensitätsabhängigen Brechungsindex, der die Grundlage für den Kerr-Effekt und die Selbstphasenmodulation bilden.

Sind zwei Moden im Spiel können sie sich gegenseitig beeinflussen gemäß der Diagramme



Der Operator

$$a_1^+ a_2^+ a_1 a_2$$

beschreibt entsprechend die Zweistrahlkopplung und den Kreuz-Kerreffekt. Anschaulich erzeugt die Intensität eines Strahls einen Brechungsindex für den anderen Strahl. Die Phase des zweiten Strahls nach Durchgang durch den Kristall ist damit von der Intensität des ersten Strahls abhängig. Auf Photonenebene kann man theoretisch damit Katzenzustände erzeugen.

Erzeugung von Katzenzuständen mit Hilfe des Kerr-Effekts

- Vorschlag zur Erzeugung von Yurke-Stoler-Zuständen: Eine Mode wird für eine bestimmte Zeit einem Kerr-Medium ausgesetzt und macht entsprechend Phasenselbstmodulation gemäß

$$H = \hbar\Omega \cdot a^+ a a^+ a = \hbar\Omega \cdot \hat{n}^2$$

mit

$$\Omega \sim \chi^{(3)}.$$

Die zeitliche Entwicklung eines kohärenten Zustands lautet unter diesen Umständen:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-iH/\hbar t} |\alpha\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\Omega \hat{n}^2 t} |n\rangle. \end{aligned}$$

Da $|n\rangle$ Eigenzustand zu \hat{n}^2 , gilt:

$$\begin{aligned} e^{-i\Omega \hat{n}^2 t} |n\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-i\Omega \hat{n}^2 t)^m |n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |n\rangle (-i\Omega n^2 t)^m \\ &= |n\rangle \cdot e^{-i\Omega n^2 t}. \end{aligned}$$

Für

$$t = \frac{\pi}{\Omega},$$

folgt

$$e^{-i\Omega n^2 t} = e^{-i\pi n^2} = (-1)^n.$$

Also erhält man

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \alpha^n}{\sqrt{n!}} \cdot |n\rangle = |-\alpha\rangle.$$

Jede einzelne Nummernzustandskomponente erhält durch den Kerr-Effekt eine Phasendrehung gemäß ihrer Photonenzahl. Die Überlagerung ergibt einen kohärenten Zustand mit einer um π gedrehten Phase.

Interessant ist jetzt die Wechselwirkungszeit

$$t = \frac{\pi}{2\Omega},$$

folgt

$$e^{-i\Omega n^2 t} = e^{-i\pi n^2/2} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -i & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \Bigg|$$

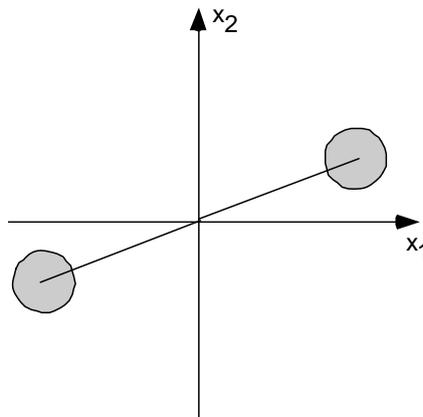
Dies gilt aber auch für

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} (1 + i(-1)^n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -i & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \Bigg|$$

(selber durch Einsetzen nachprüfen). Man kann also $e^{-i\pi n^2/2}$ ersetzen:

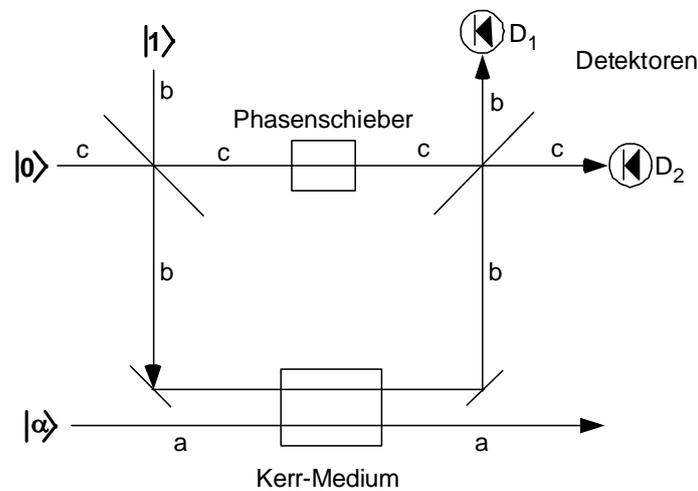
$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\pi n^2/2} |n\rangle \\ &= e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} (1 + i(-1)^n) |n\rangle \\ &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} i e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} (|\alpha\rangle + i|-\alpha\rangle) \end{aligned}$$

Dies ist der Yurke-Stoler-Zustand. Er ist eine Überlagerung zweier um π gedrehter kohärenter Zustände.



Solche Zustände kann man auch mit Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern erzeugen und tatsächlich beobachten. Die Nichtlinearität entsteht dort durch die Wechselwirkung der Atome untereinander. Die Wechselwirkungsenergie ist ebenfalls quadratisch von der Atomzahl abhängig.

- Instruktiv ist auch ein anderer Vorschlag zur Erzeugung gerader und ungerader Katzenzustände:



In einem Mach-Zehnder-Interferometer (MZI) wird ein Phasenschieber (linearer Brechungsindex) und ein Kerr-Medium (nichtlinearer Brechungsindex) eingefügt. Mode a wird zur Zeit $t = 0$ mit einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ besetzt. Am oberen, linken Eingang des MZI wird die Mode b mit einem Photon besetzt. Grundidee: Ein Photon in Mode b verschiebt im Kerrmedium die Phase des kohärenten Zustands um 180° (so soll die

Wechselwirkungszeit eingestellt werden). Da das Photon nur mit halber Wahrscheinlichkeit im Kerrmedium anzutreffen ist, wird die Phase des kohärenten Zustands nur mit halber Wahrscheinlichkeit verschoben und man erhält eine quantenmechanische Überlagerung zweier kohärenter (= makroskopischer = klassischer) Zustände. Formal erhält man nach einer bestimmten Wechselwirkungszeit $\Omega \cdot t = \pi$ das System in einem Zustand

$$|out\rangle = \frac{1}{2} ((|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) |1\rangle_b |0\rangle_c - i(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) |0\rangle_b |1\rangle_c).$$

Wird bei einem solchen Zustand am Ausgang D_1 ein Photon gemessen, d. h. verifiziert man das Photon des MZI in Mode b , also im Zustand $|1\rangle_b |0\rangle_c$, so ist Mode a im geraden Katzenzustand $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$. Mißt man das Photon in $|0\rangle_b |1\rangle_c$, so reduziert man den Zustand $|out\rangle$ in den ungeraden Katzenzustand $|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$.

- Herleitung von $|out\rangle$: Die zeitliche Entwicklung durch das Kerr-Medium läuft gemäß:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\Omega\hat{a}^+\hat{a}\hat{b}^+\hat{b} \\ \hat{U}_k &= e^{-i\Omega t\hat{a}^+\hat{a}\hat{b}^+\hat{b}}. \end{aligned}$$

Der Phasenschieber (um eine Phase θ) wird durch den Operator

$$\hat{U}_P = e^{-i\theta c^\dagger c}$$

beschrieben. Der Zustand nach dem ersten Strahlteiler im MZI lautet:

$$|MZI\rangle = |\alpha\rangle_a \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_{bc} + i|01\rangle_{bc}),$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} |10\rangle_{bc} &: = |1\rangle_b |0\rangle_c \\ |01\rangle_{bc} &: = |0\rangle_b |1\rangle_c. \end{aligned}$$

Die zeitliche Entwicklung macht daraus:

$$|\Omega t, \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e^{i\Omega t}\alpha\rangle_a |10\rangle_{bc} + ie^{-i\theta} |\alpha\rangle_a |01\rangle_{bc}).$$

Nach einer Zeit $t = \frac{\pi}{\Omega}$ haben wir den Zustand

$$|\pi, \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\alpha\rangle_a |10\rangle_{bc} + ie^{-i\theta} |\alpha\rangle_a |01\rangle_{bc}).$$

Der zweite Strahlteiler überführt

$$\begin{aligned} |10\rangle_{bc} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_{bc} + i|01\rangle_{bc}) \\ |01\rangle_{bc} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{bc} + i|10\rangle_{bc}). \end{aligned}$$

Hinter dem zweiten Strahlteiler sieht $|\pi, \theta\rangle$ daher so aus:

$$\begin{aligned} |out, \theta\rangle &= \frac{1}{2} (|-\alpha\rangle_a (|10\rangle_{bc} + i|01\rangle_{bc}) + ie^{-i\theta} |\alpha\rangle_a (|01\rangle_{bc} + i|10\rangle_{bc})) \\ &= \frac{1}{2} ((|-\alpha\rangle_a - e^{-i\theta} |\alpha\rangle_a) |10\rangle_{bc} + i (|-\alpha\rangle_a + e^{-i\theta} |\alpha\rangle_a) |01\rangle_{bc}). \end{aligned}$$

Stellt man den Phasenschieber so ein, dass $\theta = \pi$, folgt schließlich

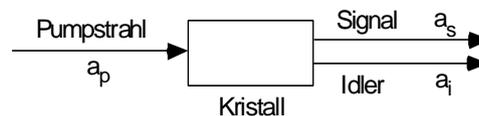
$$|out\rangle = \frac{1}{2} ((|\alpha\rangle_a + |-\alpha\rangle_a) |10\rangle_{bc} - i (|\alpha\rangle_a - |-\alpha\rangle_a) |01\rangle_{bc}).$$

was zu zeigen war.

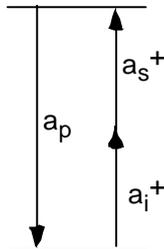
Quelle für Photonenpaare.

Photonen lassen sich paarweise mit Hilfe eines nichtlinearen Kristalls erzeugen, der aus einem einfallenden Photon zwei auslaufende mit jeweils halber Frequenz macht. Mit diesen korrelierten Photonenpaaren kann man interessante Tests der Quantenmechanik machen. Zunächst aber die Erzeugung der Paare.

- Spontane parametrische Frequenzkonversion. Photonen der Pumpmode mit der Frequenz ω_p werden mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit in ein Photonenpaar mit den Frequenzen $\omega_s + \omega_i = \omega_p$ umgewandelt.



Das entsprechende Diagramm sieht so aus:



Der Hamiltonoperator lautet entsprechend:

$$\hat{H} = K \cdot \chi^{(2)} \hat{a}_p \hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+ + h.c.$$

Wobei K eine Proportionalitätskonstante ist. Der Anfangszustand $|1, 0, 0\rangle := |1\rangle_p |0\rangle_s |0\rangle_i$ mit lediglich einem Photon in der Pumpmode entwickelt sich für kleine Zeiten gemäß

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{H}/\hbar t} |1, 0, 0\rangle &\sim (1 - i\Omega \cdot t \cdot \hat{a}_p \hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+) |1, 0, 0\rangle \\ &= |1, 0, 0\rangle - i\Omega \cdot t \cdot |0, 1, 1\rangle \end{aligned}$$

wobei

$$\Omega := k \cdot \chi^{(2)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit in der Mode des Signals und des Idlers je ein Photon zu finden, wächst mit der Zeit.

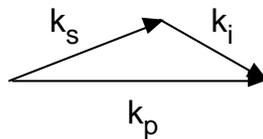
- Bedingung für Konversion ist neben der Energieerhaltung:

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i$$

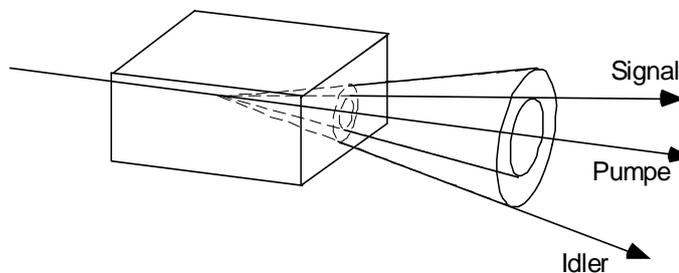
auch die Impulserhaltung für die Photonen

$$\hbar\vec{k}_p = \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_i.$$

Im Vakuum wären wegen $\omega = c \cdot k$ beide Bedingungen für parallele Strahlen erfüllt. Im Kristall führt der Brechungsindex dazu, dass der Vektor \vec{k} länger sein kann als $\frac{\omega}{c}$. Damit erhält man Impulserhaltung im allgemeinen für nichtparallele Strahlen:

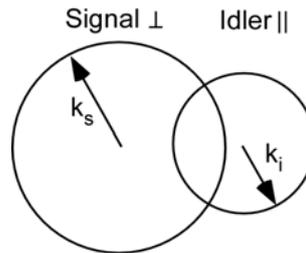


Dieses Diagramm ist rotationssymmetrisch um die Richtung von \vec{k}_p . Die beiden Photonen werden daher auf konzentrischen Koni in entgegengesetzten transversalen Richtungen abgestrahlt:



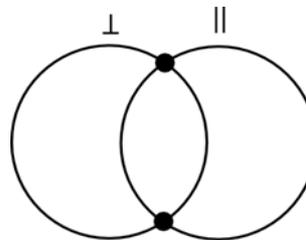
Da nur die Summe der Frequenzen festgelegt ist, erhält man für jede mögliche Kombination aus ω_s und ω_i zwei entsprechende Koni für die Abstrahlrichtungen.

- Polarisation. Die beiden erzeugten Photonen, "Signal" und "Idler", können unterschiedlich polarisiert sein. Ist der Kristall außerdem doppeltbrechend breiten sie sich in leicht verschiedenen Richtungen aus. Die beiden Koni sind dann nicht konzentrisch sondern versetzt. Betrachtet man die Austrittsfläche des Kristalls liegen die Austrittspunkte für die beiden Polarisationskombinationen auf je einem Ring.

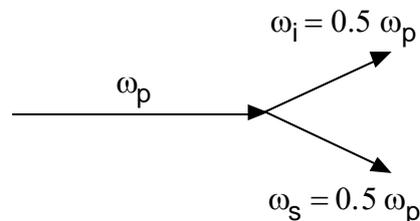


Der linke Austrittsring ist immer waagrecht, der rechte senkrecht polarisiert. Wird ein bestimmter Austrittspunkt auf einem Ring realisiert, so liegt der Austrittspunkt des zweiten Photons auf der gegenüberliegenden Seite seines Rings.

- Verschränkung. Haben Signal und Idler die selbe Frequenz erhält man zwei gleiche Ringe unterschiedlicher Polarisation. Entnimmt man durch Blenden nur die Photonenpaare an den schwarz markierten Stellen, so ist die Polarisation des einzelnen Photons unbestimmt aber entgegengesetzt zu der des anderen Photons.

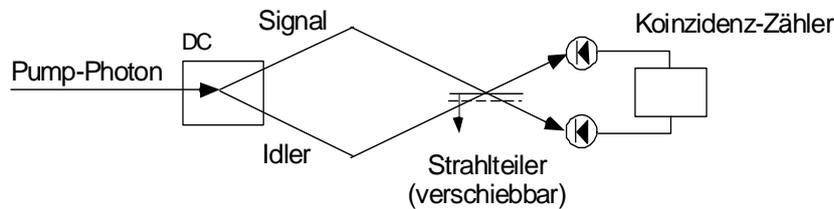


Richtung und Polarisation des Photonenpaares sind verschränkt.



Hong-Ou-Mandel-Interferometer

Was geschieht, wenn man zwei entartete Photonen gleicher Polarisation auf einen Strahlteiler einstrahlt?



Wir wissen aus Kapitel 4, dass beide Photonen zusammen den Strahlteiler aus dem selben Ausgang verlassen und man deshalb nie eine Koinzidenz beider Detektoren sieht. Dies gilt für zwei Photonen derselben Frequenz und Polarisation, die gleichzeitig an den Eingängen des Strahlteilers beobachtet werden. Was geschieht, wenn man die optischen Weglängen variiert, indem man den Strahlteiler leicht verschiebt? Man beobachtet (aus Originalarbeit: Hong et al., Physical Review Letters, 59 2044 (1987):

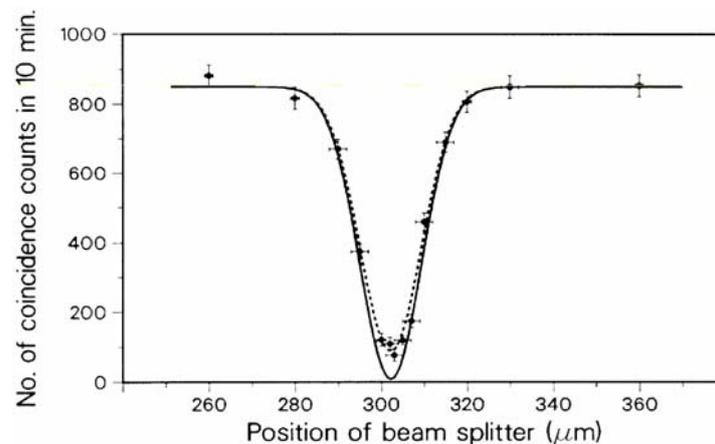


FIG. 2. The measured number of coincidences as a function of beam-splitter displacement $c \delta \tau$, superimposed on the solid theoretical curve derived from Eq. (11) with $R/T=0.95$ $\Delta\omega=3 \times 10^{13}$ rad s^{-1} . For the dashed curve the factor $2RT/(R^2+T^2)$ in Eq. (11) was multiplied by 0.9. The vertical error bars correspond to one standard deviation, whereas horizontal error bars are based on estimates of the measurement accuracy.

Die Koinzidenzen verschwinden, wenn die Weglängendifferenz kleiner ist als ein Wert Δs ,

der durch die Frequenzgenauigkeit $\Delta\omega$ der Photonen gegeben ist.

$$\frac{c}{\Delta s} = \frac{1}{\Delta\tau} = \Delta\omega$$

oder

$$\Delta s = \frac{c}{\Delta\omega}$$

Die Photonenfrequenz wird durch die Richtungen festgelegt, mit denen die Photonen aus dem Kristall austreten und damit durch die Richtungsakzeptanz des Interferometeraufbaus. Die durch die Geometrie vorgegebene Frequenzunsicherheit beträgt in diesen Experimenten typischerweise etwa $1 - 2nm \sim 1THz$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta\nu} \approx \frac{1}{6THz} = 0,17 \cdot 10^{-12}s \\ &\sim 1 \cdot 10^{-13}s \sim 100fs.\end{aligned}$$

Dies entspricht der Zeitunschärfe mit der die beiden Photonen in die Moden entsandt werden und damit auch der maximalen Zeitdifferenz, mit der die Photonen am Strahlteiler ankommen können. Ist die Laufzeitdifferenz der beiden Wege größer als diese Unsicherheit in der Ankunftszeit, verschwindet die Antikoinzidenz.

Chapter 7

Optische Tests der Quantenmechanik

Sind Photonen Teilchen, denen man eine Bahn zuordnen kann entlang der sie sich bewegen oder sind Photonen Besetzungszustände von Moden? Stimmt diese Modenbild wirklich? Das Modenbild kennt keinen Transport entlang einer Bahn solange nicht die Mode selbst eine Dynamik hat, die eine klassische Bahn simuliert, etwa in Form eines Pulses. Photonentransport entlang einer stationären Mode, z.B. einer laufenden ebenen Welle kann nur stattfinden, wenn das Photon am einen Ende lokal in die Mode gefüllt und an deren anderen Ende wieder entnommen wird. In der Mode ist das Photon aber überall gleichzeitig. Auf diese Weise würden z.B. auch die Photonen eines Laserpointers auf die Leinwand gelangen. Das Bild einer Bahn lässt sich trotzdem bis zu einem gewissen Grad verwenden, wenn man die Bahn als Pfad im Sinn von Feynman interpretiert. Demnach müssen die Wahrscheinlichkeitsamplituden für alle möglichen Pfade berechnet werden, die zwei Punkt A und B miteinander verbinden. Das Betragsquadrat der Summe ergibt die Wahrscheinlichkeit, mit dem das Photon von A nach B gewandert ist. Bei der Summenbildung müssen die Amplituden mit den richtigen Relativphasen addiert werden, die sich aus der Geometrie der Pfade ergeben. Im einfachsten Fall ist das gerade die Phase $k \cdot l$, die sich entlang des Pfades für ein Teilchen der Geschwindigkeit $v = \hbar k/m$ ansammelt. Dieses Rezept gilt nur für ununterscheidbare Pfade. Sind die Pfade unterscheidbar, müssen die Amplituden erst quadriert und dann addiert werden. Die Phasen fallen bei der Betragsquadratbildung heraus und addiert werden in diesem Fall dann nur "klassische" Wahrscheinlichkeiten. In diesem Kapitel betrachten wir eine Reihe von Experimenten, bei denen sich die quantenmechanischen Besonderheiten besonders klar erkennen lassen.

Strahlteiler mit Moden unterschiedlicher Polarisation

Situation: Am oberen Eingang liegt der horizontal polarisierte Signalstrahl eines Parametrischen Frequenzteilers (DC) an. Vor dem unteren Eingang wird der zunächst horizontal polarisierte Idlerstrahl durch einen Polarisationsdreher um einen Winkel θ gedreht. Misst man die Photonenkoinzidenz an den Ausgängen genauso wie mit dem HOM-Interferometer, so verschwindet die Antikoinzidenz mit zunehmenden Drehwinkel θ . Für $\theta = \pi/2$ ist keine

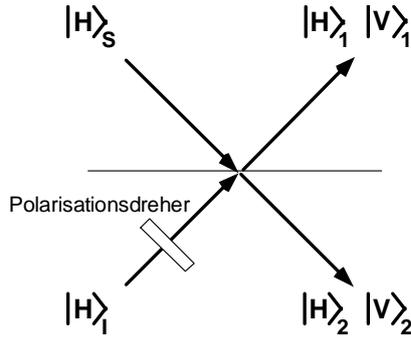


Figure 7.1:

Antikoinzidenz mehr zu beobachten.

Interpretation im Pfadbild: Ohne Polarisator kann man am Ort der Detektoren nicht wissen, ob ein nachgewiesenes Photon aus dem Signal- oder aus dem Idlerstrahl kam. Beide Wege sind nicht unterscheidbar und man muss also beide Wahrscheinlichkeitsamplituden addieren und dann das Betragsquadrat bilden. Das haben wir bei der Interpretation des HOM-Interferometers auch so gemacht. Als Resultat erhält man Interferenz in Form einer Antikoinzidenz. Hier wird jetzt das Idlerphoton durch eine gedrehte Polarisation markiert und damit vom Signalphoton unterscheidbar. Am Ort der Detektoren kann man prinzipiell entscheiden, aus welchem Strahl das nachgewiesene Photon kommt. Die beiden Amplituden müssen erst quadriert und dann addiert werden. Die Interferenz verschwindet und man erhält die Summe der Transmissionswahrscheinlichkeiten für jedes einzelne Photon.

Interpretation im Modenbild: Man hat für jeden Strahl zwei Moden, eine horizontal und eine vertikal polarisierte. Der Eingangszustand besteht also insgesamt aus 4 Moden, der Ausgangszustand ebenfalls. Am unteren Eingang liegt nach dem Polarisator der gedrehte Zustand an, der sich in der horizontal/vertikal-Basis als

$$|\theta\rangle_i = \cos \theta \cdot |1\rangle_i^H + \sin \theta \cdot |1\rangle_i^V$$

schreibt. Der Eingangszustand des Strahlteilers ist damit der Produktzustand

$$|in\rangle = |1\rangle_s^H |1\rangle_i^\theta = |1\rangle_s^H |1\rangle_i^H \cos \theta + |1\rangle_s^H |1\rangle_i^V \sin \theta.$$

Er ergibt sich aus dem Vakuum durch

$$|in\rangle = (a_s^{+H} a_i^{+H} \cos \theta + a_s^{+H} a_i^{+V} \sin \theta) |0\rangle_s^H |0\rangle_s^V |0\rangle_i^H |0\rangle_i^V.$$

Der Ausgangszustand berechnet sich unter Anwendung der Strahlteilerformeln (für 50/50 Teiler)

$$a_s^{+H} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^{+H} + i a_2^{+H})$$

$$a_i^{+H} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_2^{+H} + ia_1^{+H})$$

$$a_i^{+V} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_2^{+V} + ia_1^{+V}).$$

Aus dem Operator am Eingang ergibt sich mit diesen Gleichungen der Operator, der am Ausgang wirkt. Anwenden auf den Vakuumzustand des Ausgangs ergibt den Ausgangszustand

$$\begin{aligned} |out\rangle &= \frac{1}{2} \cos \theta \cdot (a_1^{+H} + ia_2^{+H}) (a_2^{+H} + ia_1^{+H}) |0\rangle_1^H |0\rangle_1^V |0\rangle_2^H |0\rangle_2^V \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \theta \cdot (a_1^{+H} + ia_2^{+H}) (a_2^{+V} + ia_1^{+V}) |0\rangle_1^H |0\rangle_1^V |0\rangle_2^H |0\rangle_2^V \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta \cdot (a_1^{+H} a_2^{+H} - a_2^{+H} a_1^{+H} + ia_2^{+H} a_2^{+H} + ia_1^{+H} a_1^{+H}) |0\rangle_1^H |0\rangle_1^V |0\rangle_2^H |0\rangle_2^V \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \theta \cdot (a_1^{+H} a_2^{+V} - a_2^{+V} a_1^{+H} + ia_2^{+H} a_2^{+V} + ia_1^{+H} a_1^{+V}) |0\rangle_1^H |0\rangle_1^V |0\rangle_2^H |0\rangle_2^V. \end{aligned}$$

Für $\theta = 0$, d.h. ohne Drehung bekommt man die ursprüngliche Antikoinzidenz

$$\begin{aligned} |out\rangle_{\theta=0} &= \frac{1}{2} (ia_2^{+H} a_2^{+H} + ia_1^{+H} a_1^{+H}) |0\rangle_1^H |0\rangle_1^V |0\rangle_2^H |0\rangle_2^V \\ &= i \frac{1}{2} (|2\rangle_1^H |0\rangle_2^H + |0\rangle_1^H |2\rangle_2^H). \end{aligned}$$

Für $\theta = \pi/2$ verschwindet die Interferenz und man erhält die Summe aller Möglichkeiten: Zwei rechtwinklig zueinander polarisierte Photonen am selben Ausgang ($a_1^{+H} a_1^{+V}, a_2^{+H} a_2^{+V}$) und je ein Photon an jedem Ausgang ($a_1^{+H} a_2^{+V}, a_1^{+V} a_2^{+H}$).

$$\begin{aligned} |out\rangle_{\theta=\pi/2} &= \frac{1}{2} (a_1^{+H} a_2^{+V} - a_1^{+V} a_2^{+H} + ia_2^{+H} a_2^{+V} + ia_1^{+H} a_1^{+V}) |0\rangle_1^{+H} |0\rangle_1^{+V} |0\rangle_2^{+H} |0\rangle_2^{+V} \\ &= \frac{1}{2} |1\rangle_1^H |1\rangle_2^V + |1\rangle_1^V |1\rangle_2^H + i |1\rangle_2^H |1\rangle_2^V + i |1\rangle_1^H |1\rangle_1^V. \end{aligned}$$

Quanteneraser

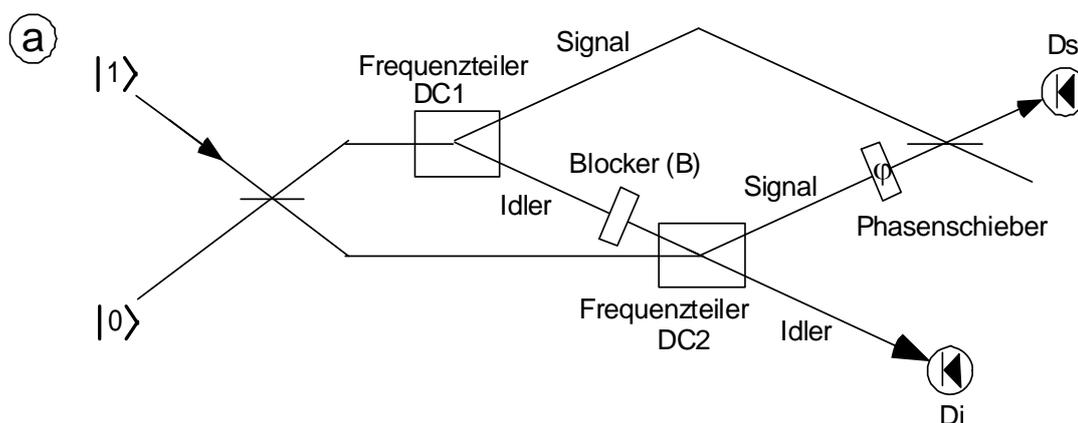
Setzt man vor jeden Detektor einen Polarisator so erscheint die Antikoinzidenz wieder, sofern beide Polarisatoren auf denselben Winkel eingestellt sind, der allerdings beliebig sein kann.

Im Pfadbild verliert man durch die Polarisatoren die Unterscheidbarkeit und man hat prinzipiell keine Möglichkeit mehr zu entscheiden, ob man es mit einem Signal oder einem Idlerphoton zu tun hat. Die Amplituden müssen erst addiert werden und die Interferenz taucht auf.

Im Modenbild kann man die Modenbasis parallel und rechtwinklig zur Richtung der Polarisatoren wählen. Da die Polarisatoren nur die parallele Richtung durchlassen, kann man alle dazu rechtwinkligen Polarisationen bereits im Signal- und Idlerstrahl vernachlässigen. Was übrigbleibt sind zwei gleich polarisierte Eingangsstrahlen und man hat wieder ein normales HOM-Interferometer.

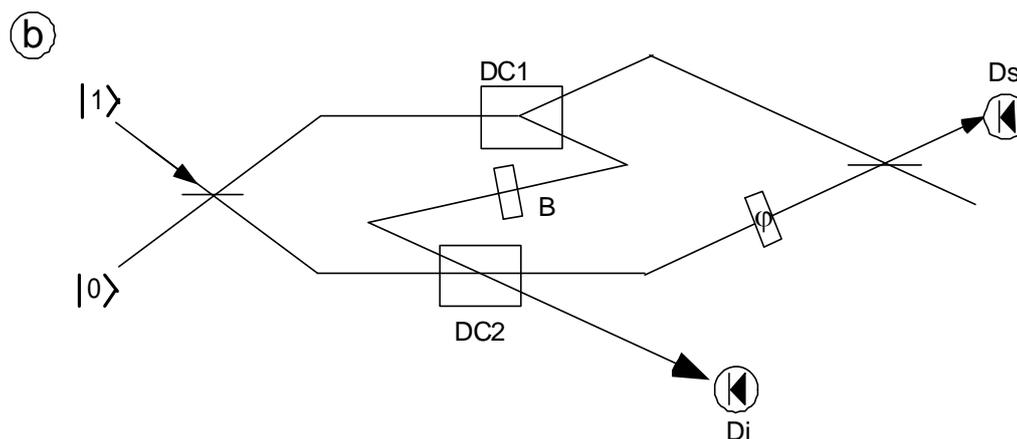
Induzierte Kohärenz

Situation: Am ersten Strahlteiler ist der obere Eingang mit einem Photon besetzt. Die beiden Ausgänge füttern jeweils einen parametrischen Frequenteiler (DC1 und DC2). Deren Signalstrahlen werden am zweiten Strahlteiler zur Interferenz gebracht. Ein Ausgang des Strahlteilers wird mit einem Detektor gemessen (D_S). Die Phase φ des zweiten Signalstrahls (S_2) kann verändert werden. Die beiden Idlerstrahlen werden überlagert und mit einem Detektor nachgewiesen (D_i). Die Verbindung zwischen den beiden Idlerstrahlen kann mit einem Strahlblocker unterbrochen werden (B). Ohne Strahlblocker beobachtet man ein interferometertypisches, von der Phase φ abhängiges Interferenzverhalten an D_S . Mit Blocker ist die Interferenz verschwunden und man beobachtet keine Abhängigkeit von φ .



Pfadbild: Im Falle des geblockten Strahls könnte man statt des Blockers auch einen Detektor einsetzen. Man kann dann messen, welchen Weg das am Anfang eingestrahlte Pumpphoton geht, über DC1 oder über DC2. Für ein an D_S gemessenes Photon weiß man dann, ob es aus DC1 oder aus DC2 stammt und man muss die Amplituden erst quadrieren. Keine Interferenz. Bei überlagerten Idlerstrahlen weiß man an D_i nicht, ob das Idlerphoton aus DC1 oder DC2 stammt und damit auch nicht, welchen Weg das eingestrahlte Pumpphoton gegangen ist. Die Amplituden an D_S werden erst addiert und man erhält Interferenz. Kontraintuitive Merkwürdigkeit für klassische Denkweise: Wie kann eine Blocker, der nicht im Interferometerarm der Signalphotonen steht, dessen Interferenzfähigkeit beeinflussen?

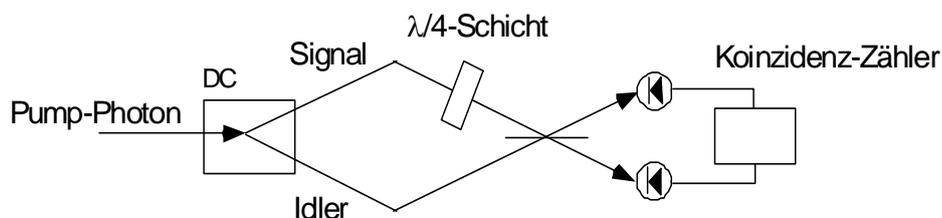
Was geschieht, wenn man DC1 und DC2 gleich weit vom ersten Strahlteiler positioniert, so dass das Idlerphoton aus DC1 nach der Erzeugung des Signalphotons (von DC2) an DC2 ankommt (siehe Abbildung b). Diese Merkwürdigkeit entsteht nur wenn man Photonen als lokalisierte Teilchen auffasst, die mit Lichtgeschwindigkeit entlang von Strahlen bewegen. Im Modenbild kann man diesen Widerspruch nicht konstruieren, da das Photon überall in der Mode gleichzeitig ist.



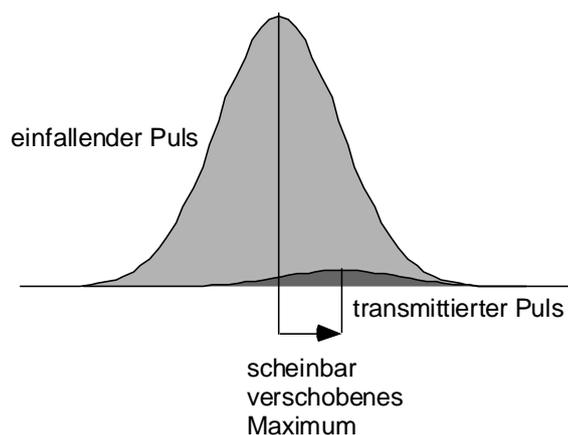
Modenbild: Der parametrische Prozess der Strahlteilung ist ein Vorgang, der eigentlich nur zu einer Verstärkung der Signal und der Idlermode führt. Ohne Photon in einer oder beiden Ausgangsmode speist sich der Vorgang aus dem Photon am Eingang und dem Vakuumrauschen der beiden Ausgangsmode. Ein zufälliges "Vakuumphoton" in den Ausgangsmode wird verstärkt und startet den Konversionsvorgang. Im Ergebnis erhält man die Besetzung zweier Ausgangsmode (Signal und Idler) mit der Bedingung, dass deren Frequenzen sich zur Frequenz des Pumpphotons addieren müssen. Die relative Phasen der Ausgangsmode nehmen einen festen Relativwert an. Die Frequenz eines einzelnen Ausgangsstrahls ist nicht festgelegt sondern frei. Damit haben, bei geblocktem Idlerstrahl die beiden Signalstrahlen unterschiedliche Frequenzen, die außerdem unbestimmt sind. (Tatsächlich muss man sich eine Überlagerung von Moden verschiedener Frequenzen vorstellen auf die sich das Signalphoton als Linearkombination verteilt.) Eine Interferenz an D_s ist bei solch unbestimmten Signalstrahlen nicht möglich. Verbindet man die beiden Idlerstrahlen, wird in DC1 und DC2 der Teilungsprozess durch dasselbe Vakuumphoton ausgelöst und beide Idlerstrahlen haben dieselbe Frequenz und dieselbe Phase. Tatsächlich bilden sie eine Mode, die mit zwei Photonen besetzt ist. Entsprechend entstehen auch zwei Signalphotonen mit gleicher Frequenz und festgelegter Phase (also in Moden mit derselben Frequenz). Diese Strahlen sind interferenzfähig und zeigen ein phasenabhängiges Interferenzsignal.

Überlichtschnelles Tunneln

Situation: in einen HOM Interferometer stellt man in den Signalstrahl einen dielektrischen Spiegel, d.h. im einfachsten Fall eine $\lambda/4$ -Schicht. Die Antikoinzidenz verschwindet, wird aber wiederhergestellt wenn man den geometrischen Weg des Signalstrahls etwas verlängert.



Pfadbild: Für das Photon stellt die $\lambda/4$ Schicht eine Potentialbarriere da, die das Teilchen nur durch tunneln überwinden kann. Es stellt sich also die Frage, wie schnell das tunneln dauert. Die Hypothese ist, dass das tunneln unendlich schnell geht. Damit gewinnt das Photon Zeit um die es dann früher am Strahlteiler ankommt. Da Koinzidenz nur bei gleichzeitigem Auftreffen von Signal und Idler am Strahlteiler auftritt, muss die Zeit, die das Signalphoton gewinnt, durch Verlängerung der Strecke ausgeglichen werden. Bemerkung: Hier zeigt sich die Schwierigkeit das Pfadbild konsequent anzuwenden. Die Frage "Wie lange dauert tunneln?" läßt sich nur sinnvoll stellen, wenn man sich Photonen als lokalisierte Teilchen vorstellt, die zu einem Startzeitpunkt am einen Ende der $\lambda/4$ Schicht losfliegt und zu einem bestimmten Zielzeitpunkt am anderen Ende ankommt. Das Photon ist aber kein lokalisiertes Teilchen, wodurch die Frage eigentlich sinnlos wird.



Modenbild: Berechnet man mit den Maxwellgleichungen, wie ein zeitlich sich änderndes Feld durch die $\lambda/4$ Schicht propagiert findet man, dass es scheinbar in Ausbreitungsrichtung nach vorne geschoben wird. Die Ursache liegt darin, dass die zeitlich später an der Schicht

auftreffenden Teile eines Pulses mit dem Feld destruktiv interferiert, das zwischen den beiden Grenzflächen im Inneren der Schicht bereits oszilliert. Übrig bleibt der vordere Teil des einfallenden Pulses. Der transmittierte Puls besteht also aus dem vorderen Ausläufer, der durch die Interferenz in der Schicht aus dem ursprünglichen Puls ausgeschnitten wurde. Er ist kleiner und weist ein Maximum auf, das vor dem des ursprünglichen Pulses liegt. Der stark abgeschwächte Puls scheint daher schneller als Lichtgeschwindigkeit durch die Schicht zu "tunneln". Das funktioniert aber nur mit Pulsen, die unendlich ausgedehnte Flanken haben (Gaußpuls, Lorentzpuls), aus denen sich dann der avancierte Puls schnitzen lässt. Ein solcher unendlich ausgedehnter Puls ist strenggenommen bereits am Detektor angekommen bevor sein Maximum auf die Schicht trifft und transportiert daher keine Information mehr.

Die Informationsgeschwindigkeit wird durch die Bewegung des Punktes definiert, an dem das Feld zum ersten Mal von Null verschieden ist. Bei unendlichen Pulsen greift diese Definition nicht. Sie sind daher auch keine geeignete Modellfunktion für Datenübertragung mit Pulsen. Ein Puls mit endlicher Ausdehnung ist der sogenannte Blackman Puls mit einer einhüllenden Amplitudenfunktion

$$A(x) = 0.42 + 0.5 \cdot \cos(2\pi x) + 0.08 \cdot \cos(4\pi x)$$

mit $x \in \{-0.5, 0.5\}$.

Eine interessante Frage, der man nachgehen kann wäre, wie ein solcher Puls durch eine $\lambda/4$ Schicht propagiert.

Photonentransport im Resonator

Instruktiv ist an dieser Stelle folgendes Gedankenexperiment. Wir betrachten einen sehr langen optischen Stehwellenresonator, der Tübingen mit seiner Partnerstadt Ann Arbor in Michigan verbindet. (Zum Nachweis von Gravitationswellen werden derzeit noch ganz andere Resonatoren geplant mit Ausdehnungen von mehrerer Millionen Kilometer). In Tübingen wird mit einer ausgeklügelten Apparatur lokal ein Photon in den Resonator eingespeist. Wann ist dieses Photon frühestens in Ann Arbor messbar?

Man kann zwei Fälle unterscheiden. Entweder man füllt das Photon in genau eine longitudinale Mode des Resonators. Dazu muss der Einspeisevorgang aber genügend langsam verlaufen. Die Energieunschärfe $\Delta\omega$ des Photons aufgrund der Energie-Zeit-Unschärferelation muss nämlich kleiner sein als der Frequenzabstand ω_{FSR} benachbarter longitudinaler Moden:

$$\Delta\omega < \omega_{FSR} = \frac{c}{2L}.$$

In diesem Fall ist das Photon zwar instantan in der gesamten Mode also auch in Ann Arbor, der Einspeisevorgang dauert aber mindestens so lange wie der Kehrwert von $\Delta\omega$, also $\frac{2L}{c}$. Bis auf einen Faktor 2 entspricht das gerade der Flugzeit eines Teilchens, das mit Lichtgeschwindigkeit von Tübingen nach Ann Arbor fliegt.

Umgekehrt kann man natürlich den Einspeisevorgang schnell machen. Dann ist die Energie des Photons entsprechend unscharf und mehrere longitudinale Moden werden gleichzeitig mit dem Photon besetzt (mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten). Insbesondere werden diejenigen Moden angeregt, deren Feld am Ort der Einspeiseapparatur ein Maximum haben. All diese Moden interferieren in Tübingen konstruktiv zu einem Puls, der dann mit Lichtgeschwindigkeit nach Ann Arbor läuft.

In beiden Fällen ist es nicht möglich schneller als mit Lichtgeschwindigkeit Information nach Ann Arbor zu transportieren. Es bleibt die Frage, ob es nicht trotzdem möglich ist, in statistischen Einzelfällen Photonen instantan nach Michigan zu befördern. Ganz zu Beginn der langsamen Befüllungsprozedur einer einzelnen Mode ist die Wahrscheinlichkeit das Photon in der Mode zu finden zwar noch sehr klein, aber immerhin endlich. Es müssten also zu unkontrollierten Einzelfälle von "Frühbefüllung" vorkommen mit fast instantanem Austausch eines Photons. So ein Experiment wäre interessant...

Fransons Experiment

Vorschlag von J. D. Franson, Physical Review Letters 62, 2205 (1989)

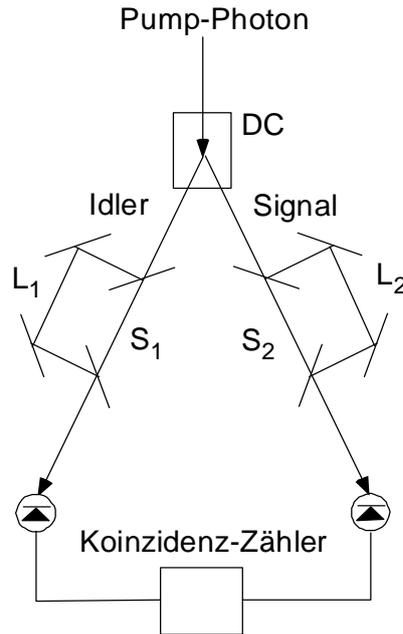
Situation: Die Photonen eines Frequenzteilers (DC) werden durch jeweils ein Mach-Zender-Interferometer geschickt. Die Weglängendifferenz zwischen dem kurzen Weg S und dem langen Weg L durch das Interferometer ist länger als die Kohärenzlänge der Photonen. $l_c = 2\pi c/\Delta\omega$, die durch die Unbestimmtheit des Signal- und Idlerfrequenz $\Delta\omega$ bestimmt wird. (Nur die Summe ist festgelegt $\omega_p = \omega_s + \omega_i$. Die Frequenz des einzelnen Strahls kann experimentbedingt um $\Delta\omega$ schwanken). Man erwartet für die einzelnen Mach-Zender-Interferometer also keinerlei Interferenzeffekte. Signal- und Idlerphoton werden dann mit Detektoren nachgewiesen und die Koinzidenz wird aufgezeichnet. Als experimentellen Parameter verändert man die Wege L_1 und L_2 in den Mach-Zender-Interferometern. Man beobachtet eine Koinzidenzrate P_c , die mit der Summe der Wegänderungen ΔL_1 und ΔL_2 variiert:

$$P_c = \frac{1}{2} (1 + \cos(\Delta\varphi + \varphi_0))$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\omega_s}{c}\Delta L_1 + \frac{\omega_i}{c}\Delta L_2 \\ &= \frac{\omega_s + \omega_i}{2c}(\Delta L_1 + \Delta L_2) + \frac{\omega_s - \omega_i}{2c}(\Delta L_1 - \Delta L_2) \\ &\simeq \frac{\omega_s + \omega_i}{2c}(\Delta L_1 + \Delta L_2) = \frac{\omega_p}{2c}(\Delta L_1 + \Delta L_2). \end{aligned}$$

($\omega_s - \omega_i$ ist wesentlich kleiner als $\omega_s + \omega_i$). Die feste Phase φ_0 ist unbekannt aber unabhängig von der Wegänderung ΔL_1 und ΔL_2 .



Modenbild: Es gibt vier Moden, für jeden Ast jeweils eine lange und eine kurze. Die beiden kurzen Moden kann man sich als kurze Zweiteilchenmode zusammenfügt denken mit einem Signaleil und einem Idlerelteil, die zwar unterschiedliche Frequenzen haben, deren Relativphase aber durch den Frequenzteiler festgelegt wird. Entsprechend erhält man eine lange Zweiteilchenmode. Der Frequenzteiler deponiert ein Photonenpaar mit gleicher Wahrscheinlichkeit in der lange und in der kurzen Zweiteilchenmode. Der Hamiltonoperator enthält beide Vorgänge:

$$H \sim a_p^- (a_s^+ a_i^+)_{kurz} + a_p^- (a_s^+ a_i^+)_{lang}$$

Der Gesamtzustand $|\psi\rangle$ ist eine Linearkombination beider Zweiteilchenmoden.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|S\rangle_1 |S\rangle_2 + e^{i\varphi} |L\rangle_1 |L\rangle_2).$$

Die Fälle, bei denen die beiden Photonen je einen kurzen Weg und einen langen Weg gehen führen zu unterschiedlichen Ankunftszeiten, die größer sind als das Zeitfenster, in dem die Koinzidenz gemessen wird. Sie tragen zum Koinzidenzsignal nicht bei und werden nicht mit berücksichtigt. Die Relativphase φ mit der die beiden Koinzidenzzustände überlagert werden müssen, ergibt sich aus der auf den beiden Gesamtwegen unterschiedlich angesammelten Phase.

$$\varphi = \frac{\omega_s}{c} L_1 + \frac{\omega_i}{c} L_2.$$

Experimentell lässt sich aber nur die Wegänderung genau kontrollieren, so dass man die Phase zweckmäßigerweise in eine konstante aber unbekannt Offsetphase φ_0 und eine Phasenänderung zerlegt, die von der Wegänderung ΔL_1 und ΔL_2 abhängt:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 + \Delta\varphi \\ &= \varphi_0 + \frac{\omega_p}{2c} (\Delta L_1 + \Delta L_2).\end{aligned}$$

Die Phasenänderung $\Delta\varphi$ berechnet sich wie oben angegeben. Die Relativphase φ hängt nur noch von der sehr gut festgelegten Pumpfrequenz ω_p ab und nicht mehr von der nur ungenau bestimmten Frequenz des Idler- bzw. Signalphotons. Die Zweiteilchenmoden können deshalb interferieren, auch wenn die Mach-Zender-Interferometer in den einzelnen Ästen nicht interferenzfähig sind. Die Summe der Wahrscheinlichkeitsamplituden für die beiden Koinzidenzzustände ist

$$\langle S|_1 \langle S|_2 |\psi\rangle + \langle L|_1 \langle L|_2 |\psi\rangle = \frac{1}{2} (1 + e^{i\varphi}).$$

Die Koinzidenzwahrscheinlichkeit ist proportional zum Quadrat der Summe

$$\begin{aligned}P_c &= \frac{1}{4} (1 + e^{i\varphi})^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi),\end{aligned}$$

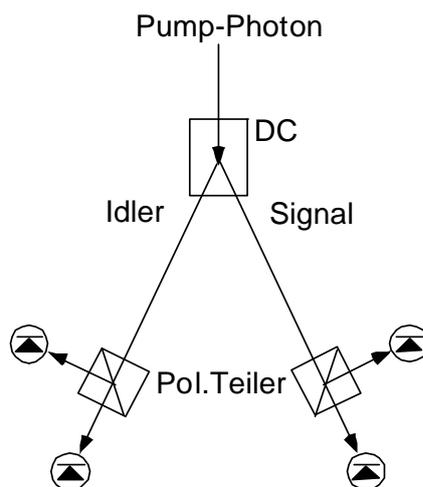
was dem experimentellen Befund entspricht.

Pfadbild: Es gibt zwei Pfade, die prinzipiell ununterscheidbar sind. In einem Fall gehen beide Photonen jeweils den kurzen Weg S_1 und S_2 , im anderen Fall gehen beide Photonen jeweils den langen Weg L_1 und L_2 . Wenn die Wegdifferenz zwischen den beiden langen Wegen nicht zu groß ist, kommen in beiden Fällen die Photonen gleichzeitig (innerhalb der Kohärenzlänge) an dem jeweiligen Detektor an. Da man prinzipiell nicht wissen kann, wann die beiden Photonen am Frequenzteiler starten sind beide Fälle nicht unterscheidbar. Man muss die Amplituden erst addieren und dann quadrieren, was auf obige Rechnung hinausläuft.

Das Ergebnis erscheint im Pfadbild allerdings bemerkenswert. Für $\Delta\varphi + \varphi_0 = 0$ erhält man voll Koinzidenz, das heißt beide Photonen gehen dieselben Wege (beide lang oder beide kurz). Für $\Delta\varphi + \varphi_0 = \pi$ tritt dieser Fall nie auf und die Photonen müssen beide unterschiedliche Wege nehmen. Welchen Weg das Photon im linken Ast nimmt, hängt also von der Stellung der Spiegel im rechten Ast ab! Das widerspricht einer naiven klassischen Vorstellung, bei der die Photonen zwar als Paar lokal im Kristall erzeugt werden, dann aber "getrennte Wege" gehen, auf denen sie sich nicht mehr gegenseitig beeinflussen können. Tatsächlich erhält man einen maximal verschränkten Zustand $|\psi\rangle$, der sich als gemeinsamer nichtlokaler Zustand ausbildet und den man als ganzes sowohl im linken wie im rechten Ast beeinflussen kann. Ohne diese, laut Einstein unsinnige, "geisterhaften Fernwirkung" lässt sich der Befund nicht erklären.

Test lokal realistischer Theorien (Bellsche Ungleichung)

Realistisch bedeutet: zu jedem Zeitpunkt hat jede Observable einen definierten Wert. Es gibt keine prinzipielle Unschärfebeziehung zwischen den Observablen. Lokal bedeutet: Es gibt keine instantane langreichweitige Beeinflussung physikalischer Objekte. Die Quantenmechanik ist nicht realistisch und nicht lokal in diesem Sinne. Es stellt sich nun die Frage ob es verborgene Parameter gibt, die den Wert aller Observablen zu jedem Zeitpunkt bestimmen. Eine solche Theorie wäre realistisch. Die experimentell beobachtete Unbestimmtheit z.B. des Impulses bei festgelegtem Ort würde dann durch die Unkenntnis eines verborgenen Parameters zustande kommen, der den Wert des Impulses festlegt aber statistisch für verschiedene Realisierungen desselben Experiments variiert. Würde man den Zusammenhang zwischen Impuls und eines dazugehörigen verborgenen Parameters kennen und könnte man außerdem den verborgenen Parameter kontrollieren, wäre man in der Lage, auch den Impuls vorherzusagen, trotz festgelegtem Ort. In diesem Absatz geht es um ein Experiment, das die Existenz verborgener Parameter, wie auch immer sie geartet sind, zumindest in diesem einen Szenario ausschließt.



Situation: Ein parametrischer Oszillator vom Typ 2 erzeugt ein Photonenpaar mit rechtwinklig zueinander orientierter Polarisation (siehe Abschnitt Photonenpaare). Die Polarisation des einzelnen Photons ist dabei statistisch entweder horizontal oder vertikal. In jedem der beiden Ausgangsstrahlen steht ein Polarisationsstrahlteiler. Er hat eine bauartsbedingte Achse. Photonen, deren Polarisation parallel zur Achse stehen werden durchgelassen. Photonen, deren Polarisation senkrecht zur Achse stehen werden um 90° abgelenkt. Hinter jedem der beiden Ausgänge des Polarisationsstrahlteilers steht ein Detektor. Für die beide Strahlen hat man also insgesamt 4 Detektoren. Die Achsen der Polarisationsstrahlteiler kann man drehen. Der Drehwinkel des Polarisationsstrahlteilers im Signalstrahl ist mit α bezeichnet, der im Idlerstrahl mit β . Die Winkel werden relativ zur horizontalen Richtung

gemessen. Das am Polarisationsstrahlteiler durchgelassene Signalphoton befindet sich im Zustand $|\alpha\rangle$, das abgelenkte im Zustand $|\alpha^\perp\rangle$. Entsprechend gibt es für das Idlerphoton die Möglichkeit im Zustand $|\beta\rangle$ oder im Zustand $|\beta^\perp\rangle$ nachgewiesen zu werden. Man führt das Experiment wiederholt für verschiedene Winkel α und β durch und beobachtet, durch welchen Ausgang die Photonen den jeweiligen Polarisationsstrahlteiler verlassen. Die Daten fasst man in folgender Korrelationsfunktion zusammen.

$$C(\alpha, \beta) := \text{Mittelwert} \{A(\alpha) \cdot B(\beta)\},$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= 1 \text{ wenn Zustand } |\alpha\rangle \text{ gemessen wird} \\ A &= -1 \text{ wenn Zustand } |\alpha^\perp\rangle \text{ gemessen wird} \\ B &= 1 \text{ wenn Zustand } |\beta\rangle \text{ gemessen wird} \\ B &= -1 \text{ wenn Zustand } |\beta^\perp\rangle \text{ gemessen wird.} \end{aligned}$$

Gemittelt wird über viele Einzelmessungen bei gleichen Winkelstellungen α und β .

Welche Funktion für $C(\alpha, \beta)$ erwartet man theoretisch? Es stellt sich heraus, dass eine Theorie mit verborgenen Variablen für $C(\alpha, \beta)$ eine andere Vorhersage macht als die Quantenmechanik. Damit kann man für diesen Einzelfall experimentell klären welche Beschreibung richtig ist. Das Experiment steht im Widerspruch zu der Vorhersage der Theorie mit verborgenen Variablen und im Einklang mit der Quantenmechanik.

Quantenmechanische Analyse des Experiments: Für das Auftreten der Zustände $|\alpha\rangle|\beta\rangle$ und $|\alpha^\perp\rangle|\beta^\perp\rangle$ lautet $A(\alpha) \cdot B(\beta) = 1$. Für das Auftreten der Zustände $|\alpha\rangle|\beta^\perp\rangle$ und $|\alpha^\perp\rangle|\beta\rangle$ lautet $A(\alpha) \cdot B(\beta) = -1$. Damit lautet

$$C(\alpha, \beta) = +1 \cdot W(|\alpha\rangle|\beta\rangle) + 1 \cdot W(|\alpha^\perp\rangle|\beta^\perp\rangle) - 1 \cdot W(|\alpha\rangle|\beta^\perp\rangle) - 1 \cdot W(|\alpha^\perp\rangle|\beta\rangle),$$

wobei $W(|\alpha\rangle|\beta\rangle)$ die Wahrscheinlichkeit ist mit der der Zustand $|\alpha\rangle|\beta\rangle$ gemessen wird. Entsprechend die anderen Zustände. Um die Wahrscheinlichkeiten W zu berechnen benötigen wir zunächst den Ausdruck für den Zustand unmittelbar nach dem Frequenzteiler. In der horizontal/vertikal Basis lautet er

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_s |V\rangle_i - |H\rangle_i |V\rangle_s).$$

Die Polarisation des Signalstrahls kann also horizontal oder vertikal stehen, in jedem Fall aber senkrecht zu der des Idlerstrahls. Die Polarisationen beider Strahlen sind maximal verschränkt. Der Zustand des Signalphotons wird jetzt in die α -Basis transformiert:

$$\begin{aligned} |H\rangle_s &= \cos \alpha \cdot |\alpha\rangle + \sin \alpha \cdot |\alpha^\perp\rangle \\ |V\rangle_s &= -\sin \alpha \cdot |\alpha\rangle + \cos \alpha \cdot |\alpha^\perp\rangle. \end{aligned}$$

Entsprechend wird das Idlerphoton in die β -Basis transformiert:

$$\begin{aligned} |H\rangle_i &= \cos \beta \cdot |\beta\rangle + \sin \beta \cdot |\beta^\perp\rangle \\ |V\rangle_i &= \sin \beta \cdot |\beta\rangle + \cos \beta \cdot |\beta^\perp\rangle. \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen kann man den Zustand $|\psi\rangle$ in der α -Basis und der β -Basis darstellen:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \alpha \cdot |\alpha\rangle + \sin \alpha \cdot |\alpha^\perp\rangle) (\sin \beta \cdot |\beta\rangle + \cos \beta \cdot |\beta^\perp\rangle) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \beta \cdot |\beta\rangle + \sin \beta \cdot |\beta^\perp\rangle) (\sin \alpha \cdot |\alpha\rangle + \cos \alpha \cdot |\alpha^\perp\rangle) \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit $W(|\alpha\rangle|\beta\rangle)$ erhält man durch Projektion von $|\psi\rangle$ auf $|\alpha\rangle|\beta\rangle$:

$$\begin{aligned} |\langle\alpha|\langle\beta||\psi\rangle|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Entsprechend berechnen sich die anderen Wahrscheinlichkeiten. Insgesamt erhält man

$$C(\alpha, \beta) = -\cos(2\beta - 2\alpha).$$

Analyse mit verborgene Variablen: Die verborgene Variable λ erzeugt die Messergebnisse deterministisch. Sie wird selber aber "gewürfelt", folgt also einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(\lambda)$, die auf 1 normiert ist:

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1.$$

Damit lautet die Korrelationsfunktion

$$\tilde{C}(\alpha, \beta) = \int A(\alpha, \lambda) B(\beta, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

Um zu einer Bellschen Ungleichung zu kommen, startet man mit 4 völlig abstrakten Zahlen x, y, x', y' , die ausschließlich die Werte ± 1 annehmen können. Für die aus diesen Zahlen konstruierte Größe S

$$\begin{aligned} S &= xy + x'y + y'x - x'y' \\ &= x(y + y') + x'(y - y') \end{aligned}$$

gilt offenbar

$$S = \pm 2.$$

Als nächstes nehmen wir an, dass die Werte für x , x' , y und y' statistisch schwanken. Damit schwankt auch der Wert von S zwischen den Werten 2 und -2 , so dass der Mittelwert irgendwo dazwischen liegt,

$$-2 \leq \int S \cdot \rho(\lambda) d\lambda \leq 2.$$

Jetzt identifiziert man in der Gleichung x mit $A(\alpha, \lambda)$, x' mit $A(\alpha', \lambda)$, y mit $B(\beta, \lambda)$, und y' mit $B(\beta', \lambda)$,

$$S = A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda) + A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda) + B(\beta', \lambda)A(\alpha, \lambda) - A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda),$$

und bilden den Mittelwert

$$\begin{aligned} \int S \cdot \rho(\lambda) d\lambda &= \int [A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda) + A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda) + B(\beta', \lambda)A(\alpha, \lambda) - A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \tilde{C}(\alpha, \beta) + \tilde{C}(\alpha', \beta) + \tilde{C}(\alpha, \beta') - \tilde{C}(\alpha', \beta'). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ungleichung ergibt

$$-2 \leq \tilde{C}(\alpha, \beta) + \tilde{C}(\alpha', \beta) + \tilde{C}(\alpha, \beta') - \tilde{C}(\alpha', \beta') \leq 2$$

Dies ist die Bellsche Ungleichung in der Form von Clauser, Horne, Shimony und Holt. Sie muss für jede Theorie mit verborgenen Parametern erfüllt sein. Eine Theorie, die eine Schwankung der Messergebnisse $A(\alpha)B(\beta)$ nicht deterministisch auf eine auf eine statistisch schwankende kontrollierenden Größe λ zurückführt, muss die Bellsche Ungleichung nicht erfüllen.

Die Quantenmechanik ist so eine Theorie. Setzt man die quantenmechanisch berechneten Korrelationen $C(\alpha, \beta)$ für die Werte $\alpha = 0$, $\alpha' = \pi/4$, $\beta = \pi/8$ und $\beta' = -\pi/8$ in die Ungleichung ein, erhält man

$$C(\alpha, \beta) + C(\alpha', \beta) + C(\alpha, \beta') - C(\alpha', \beta') = 2\sqrt{2}$$

was die Bellsche Ungleichung offenbar verletzt! Eine Theorie der verborgenen Parameter liefert ein anderes Ergebnis als die Quantentheorie so dass man mit einer Messung entscheiden kann welche die richtige ist.

Bei der Messung werden für alle 4 Winkelpaare (α, β) , (α', β) , (α, β') , (α', β') die Korrelationen C durch Mittelung über eine große Anzahl von Einzelmessungen gemessen und die Messwerte in die Bellsche Ungleichung eingesetzt. Die Messung widerspricht der Bellschen Ungleichung um bis zu 20 experimentellen Standardabweichungen bestätigt aber das quantenmechanische Ergebnis sehr gut. Zumindest dieses Experiment lässt sich mit verborgenen Variablen nicht erklären.

Quantenkryptographie

BB84 Protokol.

Einzelne Photonen kann man benutzen, um Information zu übertragen. Die Polarisation des Photons lässt sich beispielweise als bit verwenden: horizontale Polarisation bedeutet 1, vertikale Polarisation bedeutet 0. Der Vorteil von Photonen besteht darin, dass man sie nicht teilen kann. Ein möglicher versteckter Mithörer muss immer ganze Photonen absorbieren und kann nicht etwa nur einen kleinen Teil abzweigen und das Signal entsprechend verstärken um den Verlust auszugleichen. Das beste was man mit Photonen machen kann ist es absorbieren, dessen Polarisation messen und ein gleiches Photon wieder auf die Reise zum Empfänger schicken. Da man quantenmechanische Zustände nicht "klonen" kann, wird das Photon bei der Messung so verändert, dass der Mithörer das Photon nicht in dem Zustand reproduzieren kann, in dem er es empfangen hat. Das merkt dann der Empfänger und entlarvt damit den Mithörer.

Es gibt mehrere Möglichkeiten dieses Konzept zu realisieren. Im BB84 Protokol (nach Bennet und Brassard 1984) geht das konkret so: Der Sender benutzt zwei Typen von Photonen: solche, die in der horizontal/vertikal Basis polarisiert sind und solche, die in der Diagonalebasis polarisiert sind. Er wechselt bei der Datenübertragung beide Basen statistisch und notiert sich für jedes abgeschickte Photon die Basis in der es polarisiert wurde. Der Empfänger analysiert die empfangenen Photonen ebenfalls mit statistisch wechselnder Basis. Am Ende der Übertragung telefonieren Sender und Empfänger über eine öffentliche Leitung und gleichen ab, welche Photonen in derselben Basis übertragen wurden, ohne dabei aber den Wert des Photons zu verraten. Der Sender sagt also z.B. : Photon Nr. 1 war in der Diagonalebasis, Photon Nr. 2 war in der Diagonalebasis, Photon Nr. 3 war in der horizontal/vertikal Basis, etc. Der Empfänger schmeißt alle Photonen, die er nicht in der Basis des Senders analysiert hat weg und informiert darüber den Sender: Also z.B. "Photon 3,7,9 und 12 waren schlecht" . Die guten Photonen werden beibehalten und als korrekt übertragene Daten ausgewertet. Von diesen guten Daten nimmt man einen Teil weg und verwendet sie, um Mithörer zu entlarven. Man tauscht sich über dessen Polarisationswerte öffentlich aus. Wenn alle guten Photonen bei Sender und Empfänger denselben Polarisationswert ergeben haben, war die Übertragung sauber. Wenn nicht sitzt jemand in der Leitung. Der Grund hierfür liegt darin, dass auch der Mithörer seine Basis statistisch wechseln muss. Damit liegt er aber im Mittel bei der Hälfte der Photonen falsch, auch bei denen, die Sender und Empfänger zufällig in der gleichen Basis übertragen haben und die aus deren Sicht gute Photonen sind. Ein in der horizontal/vertikal Basis abgeschicktes aber vom Mithörer in der Diagonalebasis abgefangenes Photon liefert dem Mithörer mit 50% er Wahrscheinlichkeit eine der beiden Diagonalewerte. Das beste was der Mithörer machen kann ist das Photon in der Diagonalebasis mit dem von ihm gemessenen Wert weiterzuleiten. Bei Empfänger, der ja auf horizontal/vertikal Basis geschaltet ist führt das mit 50%er Wahrscheinlichkeit zum Wert, den der Sender gesendet hat. Die andern 50% ergeben ein falsches Resultat, worüber sich dann Sender und Empfänger öffentlich klarwerden.

Symmetrischer Schlüssel

Mit dem BB84 Protokoll kann man schlecht große Datenmengen schnell übertragen. Es eignet sich aber, um einen Schlüssel auszutauschen, mit dem Sender und Empfänger mit einer klassischen Leitung ihre Daten verschlüsseln. Solche Verschlüsselungen können nicht geknackt werden, wenn der Schlüssel genügend groß ist und der Austausch absolut vertrauenswürdig erfolgt. Ein Beispiel für eine binäre Verschlüsselung besteht darin, die Daten in Portionen aufzuteilen, die genauso lang sind wie der Schlüssel also z.B. 8 bit. Daten und Schlüssel werden binär addiert modulo 2. D.h. $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$ und $1+1=0$. Der so entstandene Code wird übertragen und vom Empfänger nach demselben Rezept entschlüsselt: addiert man an den Code den Schlüssel, so entstehen die ursprünglichen Daten wieder. (selber ausprobieren). Sender und Empfänger benutzen also denselben Schlüssel.

Asymmetrischer Schlüssel

Dieses Verfahren verwendet einen Schlüssel, der aus zwei Teilen besteht, einen zur Verschlüsselung und einen für die Entschlüsselung. Verliert der Sender also seinen Schlüssel, so kann er den von ihm selbst erstellten Code nicht mehr entschlüsseln. Das kann nur der Empfänger mit seinem eigenen Schlüssel. Bei einem solchen Verfahren muss der Schlüssel nicht mehr ausgetauscht werden! Der Empfänger veröffentlicht den Teil, mit dem man verschlüsselt, in einem öffentlichen Schlüsselverzeichnis, fügt ihn seiner email-Adresse zu, druckt ihn auf Visitenkarten und in seinen Briefkopf etc. Der Sender benutzt den Schlüssel und schickt den Code zum Empfänger. Nur der kann den Code entschlüsseln. Das ganze funktioniert wie ein Vorhängeschloss, das alle schließen können aber nur einer öffnen kann. Mathematisch benutzt man dazu zwei Primzahlen. Der Teil des Schlüssels, mit dem man verschlüsselt, berechnet sich aus dem Produkt der beiden Primzahlen. Durch die Veröffentlichung dieses Teils wird zwar das Produkt bekannt, nicht aber das Paar aus dem es besteht. Beide Zahlen dieses Paares benötigt man aber um den Teil des Schlüssels zu berechnen, mit dem man entschlüsselt. Für den Codeknacker gibt es keine andere Möglichkeit als jede Kombination von Primzahlen durchzuprobieren. Die Anzahl der Versuche wächst mit der Länge des Produkts exponentiell und man kann gegenwärtig eine 2000stellige Zahl mit allen PCs der Welt zusammen nicht in Milliarden Jahren faktorisieren. Hier soll die Quantenmechanik helfen. Es gibt Algorithmen, mit denen Primzahlen in algebraischer Zeit faktorisiert werden können, wodurch das Problem dann lösbarer wird. Dazu benötigt man aber einen Quantencomputer. Doch dies ist eine andere Geschichte...

Einige Veröffentlichungen zum weiterlesen:

Bell Inequality for Position and Time

J. D. Franson

Applied Physics Laboratory, Johns Hopkins University, Laurel, Maryland 20707-6099

(Received 24 October 1988)

The quantum-mechanical uncertainty in the position of a particle or the time of its emission is shown to produce observable effects that are inconsistent with any local hidden-variable theory. A new experimental test of local hidden-variable theories based on optical interference is proposed.

PACS numbers: 03.65.Bz, 42.50.Wm

Experimental Violation of Bell's Inequality Based on Phase and Momentum

J. G. Rarity and P. R. Tapster

Royal Signals and Radar Establishment, St. Andrews Road, Malvern, Worcestershire, WR14 3PS United Kingdom

(Received 26 February 1990)

Two-color photon pairs are selected by two double apertures placed to satisfy the phase-matching conditions at a down-conversion crystal. The different wavelengths are superposed at spatially separated points on a beamsplitter and coincident two-photon detections are measured. On adjusting phase plates in the beams before the beamsplitter an apparent nonlocal fourth-order interference effect is seen which violates Bell's inequality by several standard deviations.

PACS numbers: 42.50.Wm, 03.65.Bz, 42.10.Jd, 42.50.Dv

Pulsed Energy-Time Entangled Twin-Photon Source for Quantum Communication

J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel, and H. Zbinden

Group of Applied Physics, University of Geneva, CH-1211 Geneva 4, Switzerland

(Received 11 September 1998)

A pulsed source of energy-time entangled photon pairs pumped by a standard laser diode is proposed and demonstrated. The basic states can be distinguished by their time of arrival. This greatly simplifies the realization of 2-photon quantum cryptography, Bell state analyzers, quantum teleportation, dense coding, entanglement swapping, GHZ-states sources, etc. Moreover, the entanglement is well protected during photon propagation in telecom optical fibers, opening the door to few-photon applications of quantum communication over long distances. [S0031-9007(99)08777-3]

PACS numbers: 03.67.Hk, 03.67.Dd, 03.65.Bz