Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik I — Blatt 8

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2012/13**

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 Punkte)

Die Sprache $\mathcal{L}$ umfasse ein einstelliges Funktionszeichen $\dot{f}$ und ein zweistelliges Funktionszeichen $\dot{g}$. Wir betrachten drei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ über der Menge $\mathbb{N}$. Dabei interpretieren wir $\dot{g}$ überall durch die Addition; $\dot{f}$ interpretieren wir

- in $\mathfrak{A}_1$ durch die Abbildung $n \mapsto 3$,
- in $\mathfrak{A}_2$ durch die Abbildung $n \mapsto \max(n^2 + 2, 18)$ und
- in $\mathfrak{A}_3$ durch die Abbildung $n \mapsto n \bmod 6$.

Prüfen Sie durch formelle Auswertung, welche der folgenden Formeln in welchen Strukturen gültig sind:

(a) $\forall x \forall y(\dot{f}(\dot{g}(x, y)) = \dot{f}(x))$

(b) $\forall x \exists y(\dot{f}(\dot{g}(x, y)) = \dot{f}(x))$

(c) $\exists y \forall x(\dot{f}(\dot{g}(x, y)) = \dot{f}(x))$

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ beliebige Formeln, und x eine Variable, so dass $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:

(a) $\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} (\psi \to \exists x \varphi)$

(b) $\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} (\exists x \varphi \to \psi)$

(c) $\exists x(\varphi \to \psi) \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} (\forall x \varphi \to \psi)$

Aufgabe 3 (1 + 3 + 1 Punkte)

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ beliebige Formeln, und sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

(a) Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{A} \vDash \varphi \to \psi$, dann folgt aus $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ stets auch $\mathfrak{A} \vDash \psi$.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (a) nicht allgemein gilt (Gegenbeispiel und Nachweis, dass es ein Gegenbeispiel ist).

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (a) gilt, sofern φ und ψ geschlossene Formeln sind (d.h. sofern $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi) = \emptyset$).

Aufgabe 4 (4 Zusatzpunkte)

Überprüfen Sie, ob für eine beliebige Formel φ die Formel $\exists x(\varphi \to \forall x \varphi)$ allgemeingültig ist. (Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis.)

Abgabe der Aufgaben am 10.1. nach der Vorlesung oder als PDF.