Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft

im Wintersemester 2011/2012

Dr. Thomas Dimpfl

Lehrstuhl für Statistik, Ökonometrie und Empirische Wirtschaftsforschung

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät

1. Differentiation und ihre Anwendung

Übersicht: Differentiation und ihre Anwendung

1.1 Die Ableitung

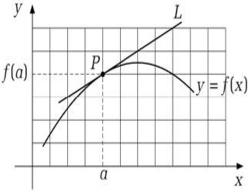
Motivation: Neben dem reinen funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$ zwischen zwei Variablen x und y spielt insb. in ökonomischen Anwendungen die Frage der **Änderungstendenz einer Funktion** eine große Rolle.

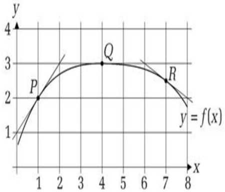
- Für den Anbieter eines Gutes auf einem Markt ist es nicht nur wichtig zu wissen, wie hoch sein Erlös bei einem bestimmten (festen) Marktpreis ist, sondern auch, wie sich sein Erlös ändert, wenn sich der Preis ändert.
- Analysiert man die Auswirkungen einer Lohnerhöhung auf das Güternachfrageverhalten von Haushalten, ist es u.a. wichtig zu wissen, wie die Konsumausgaben der Haushalte sich ändern, wenn das (verfügbare) Haushaltseinkommen um einen bestimmten Betrag ansteigt.

1.1 Die Ableitung

Maß für die Steilheit eines Graphen:

- Wie kann man auf präzise Weise die Steilheit eines Graphen messen?

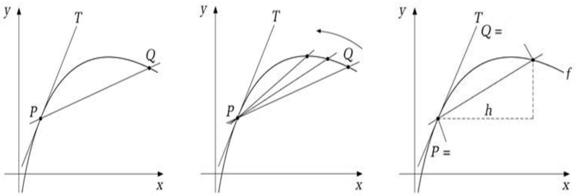




- Die Steigung der Tangente im Punkt a misst die Steigung der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$.
- Bei nichtlinearen Funktionen kann die Steigung von Punkt zu Punkt variieren!

1.1 Die Ableitung

<u>Von der Sekante zur Tangente:</u>



Die Steigung der Sekante ist gegeben durch den **Differenzenquotienten**:

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \, .$$

1.1 Die Ableitung

Definition: Differentialquotient; erste Ableitung

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$ mit dem Definitionsbereich $D(f)$. Existiert für einen Wert $a \in D(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

so heißt dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **erste Ableitung** der Funktion f an der Stelle a. Diese Zahl gibt die Steigung der Funktion im Punkt $(a, f(a))$ an.

1.1 Die Ableitung

Definition: Tangente

Die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$ ist

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \text{ (Punkt-Steigungs-Formel).}$$

Übliche Schreibweisen für Ableitungen:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} ; \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} ; \quad \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a} ; \quad y'|_{x=a} ; \quad y'(a)$$

1.1 Die Ableitung

Definition: Ableitungsfunktion

Existiert zu einer Funktion $y = f(x)$ in jedem Punkt x eines Intervalls I (mit $I \in D(f)$) die (erste) Ableitung $f'(x)$, so heißt f (in I) **differenzierbar**.
Die Funktion f', die jedem $x \in I$ die zugehörige (erste) Ableitung $f'(x)$ von f zuordnet, heißt **(erste) abgeleitete Funktion** von f oder **Ableitungsfunktion** von f.

1.1 Die Ableitung

Anmerkungen:

- Die Bestimmung der Ableitung einer Funktion mittels der dargestellten Grenzwertbetrachtung ist i.A. sehr aufwendig. Zur praktischen Anwendung der Differentialrechnung erweist es sich als nicht notwendig. Es genügt vielmehr die Kenntnis der Ableitung elementarer Funktionen und einiger Rechenregeln zum Differenzieren.
- Bevor wir diese ermitteln bzw. darstellen, sollen einige zentrale Anwendungen der Differentialrechnung die weiteren Ausführungen motivieren. Weiterhin erweist es sich als sinnvoll, einen kurzen Exkurs über die Rechenregeln für die Grenzwerte an dieser Stelle einzubauen.

1.2 Monotonie

Definition: Monotonie

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f(x)$

- streng monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

1.2 Monotonie

- Mit Hilfe des **Vorzeichens der ersten Ableitung** einer Funktion ist es möglich, für (differenzierbare) Funktionen die **schwache Monotonie** über folgende Zusammenhänge zu überprüfen:
  - $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \quad \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf I;
  - $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \quad \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf I;
  - ebenso gilt: $f'(x) = 0$ für alle $x \in I \quad \Leftrightarrow f$ ist konstant auf I.
- Die dargestellten Zusammenhänge haben den Charakter eines mathematischen Satzes. Eine Möglichkeit, diesen Satz zu beweisen, liefert der so genannte Mittelwertsatz (siehe Sydsæter/Hammond (2.A.) S. 335f, (3.A.) S. 326f).

1.2 Monotonie

- Für die **strenge Monotonie** gelten lediglich folgende Implikationen:
  - $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$
    $\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf I;
  - $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$
    $\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf I.

1.3 Änderungsraten

- Die Ableitung wurde als Steigung der Tangente an einem bestimmten Punkt des Graphen der Funktion definiert.
- In den wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen spielt aber oft eine Interpretation als **Änderungsrate** eine Rolle:

  durchschnittliche Änderungsrate $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ (gleich dem Differenzenquotient)
  momentanen Änderungsrate $f'(x_0)$

  relative Änderungsrate $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$

  Beide Änderungsraten spielen insbesondere bei der Betrachtung einer Variable im Zeitablauf eine Rolle (d.h. die unabhängige Variable ist die Zeit t).

1.3 Änderungsraten

- Eine weitere Anwendung des Ableitungsbegriffes in den Wirtschaftswissenschaften spiegelt sich in einer speziellen Bezeichnung von bestimmten Ableitungsfunktionen wider. So spricht man regelmäßig von **Grenz**kosten oder **Grenz**ertrag, vom **Grenz**produkt oder der **Grenz**neigung zum Konsum. (marginal costs,...)

1.4 Exkurs: Grenzwerte

Grenzwerte spielen nicht nur bei der Definition der Ableitung eine Rolle, sondern sind auch für spätere Anwendungen relevant. Deshalb wollen wir hier einen (ersten) Exkurs darüber einfügen.

Definition: Grenzwert einer Zahlenfolge, limits of a sequence

Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt **konvergent** gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $\overline{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq \overline{n}(\varepsilon) \; .$$

a heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **divergent**, falls sie nicht konvergiert.

Anmerkung: Ist $a = 0$, so wird $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **Nullfolge** genannt.

1.4 Exkurs: Grenzwerte

Definition: Grenzwert von Funktionen

Die Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ hat an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, die nicht notwendigerweise im Definitionsbereich $D(f)$ enthalten sein muss, genau dann einen **Grenzwert** $\bar{a}$, in Zeichen

$$\lim_{x \to a} f(x) = \bar{a} \,,$$

wenn es Zahlenfolgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D(f), x_n \neq a$ und $\lim x_n = a$ gibt und für alle solche Folgen gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{n \to \infty} \{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \bar{a} \,.$$

1.4 Exkurs: Grenzwerte

Wir betrachten die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $D(f) = D(g)$.

Es sei: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = d \quad$ und $\quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = e \quad$ mit $d, e \in \mathbb{R}$.

Dann gelten folgende Rechenregeln:

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

(R1) $\lim\limits_{x \to a} c = c \qquad$ mit $\quad c = konst. \in \mathbb{R}$

(R2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + c] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + c = d + c$

(R3) $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \cdot d$

(R4) $(\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = d \pm e$

1.4 Exkurs: Grenzwerte

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen (Fortsetzung)

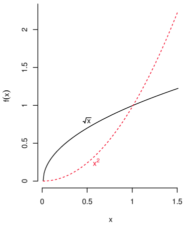
(R5) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = d \cdot e$

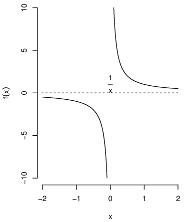
(R6) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{d}{e}$

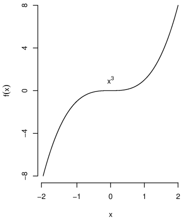
(R7) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n = d^n \qquad$ für $\quad n \in \mathbb{N}$

(R8) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{d} \qquad$ für $\quad n \in \mathbb{N}, \;\; f, d \geq 0$

1.4 Exkurs: Grenzwerte







$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$$

$$(n \in \mathbb{R}^+)$$

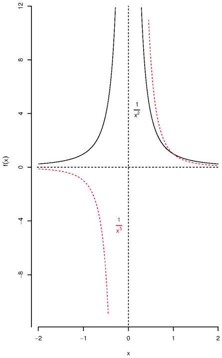
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$(n \in \mathbb{R}^+)$$

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0$$

$$(n \in \mathbb{R}^+)$$

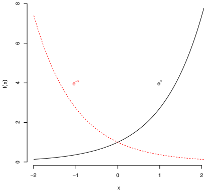
1.4 Exkurs: Grenzwerte

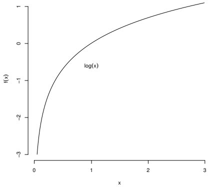


$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbb{R}^+)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

1.4 Exkurs: Grenzwerte





$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 \qquad \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \ln(x) &= \infty \\ \lim_{x\to 1} \ln(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0} \ln(x) &= -\infty \end{aligned}$$

(analog für $f(x) = a^x$ mit $a > 1$)

1.5 Differentiationsregeln

1. **konstante Funktion** $f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R};\ c = \text{konst.}$
   Anmerkung: $f(x) = c$ ist überall differenzierbar
   $\longrightarrow \quad f'(x) = 0$
2. **additive Konstante** $y = c + f(x), \quad c \in \mathbb{R};\ c = \text{konst.}$
   $\longrightarrow \quad y' = f'(x)$
3. **multiplikative Konstante** $y = c \cdot f(x), \quad c \in \mathbb{R};\ c = \text{konst.}$
   $\longrightarrow \quad y' = c \cdot f'(x)$
4. **Potenzregel:** $f(x) = x^r \ (r \in \mathbb{R})$
   Anmerkung: Die Potenzfunktion $f(x) = x^r$ ist überall differenzierbar
   $\longrightarrow \quad f'(x) = r\, x^{r-1}$ (power rule).

1.5 Differentiationsregeln

5. **Summenregel:** $y = f(x) \pm g(x)$

$$\longrightarrow \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

kann auf beliebig viele Summanden erweitert werden; z.B.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x^i \qquad \longrightarrow \quad f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i \cdot x^{i-1}$$

6. **Produktregel:** $y = f(x) \cdot g(x)$

$$\longrightarrow \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

7. **Quotientenregel:** $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{mit} \quad g(x) \neq 0$

$$\longrightarrow \quad y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

1.5 Differentiationsregeln

8. **Kettenregel:** $y = f(g(x))$ mit $y = f(z)$ als Äußerer Funktion und $z = g(x)$ als innerer Funktion

   $$\longrightarrow \quad y^{'} = f^{'}(z) \cdot g^{'}(x)$$

   Verallgemeinerung der Kettenregel: $y = f(g(h(x)))$ mit $y = f(z)$, $z = g(u)$ und $u = h(x)$

   $$\longrightarrow \quad y^{'} = f^{'}(z) \cdot g^{'}(u) \cdot h^{'}(x)$$

9. **Ableitung der Umkehrfunktion:**

   Besitzt eine in D differenzierbare Funktion $y = f(x)$ eine Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$, so ist $x = f^{-1}(y)$ differenzierbar und es gilt:

   $$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

1.5 Differentiationsregeln

10. **Logarithmusfunktion:** $f(x) = \ln x, \quad x > 0$
    Anmerkung: Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ ist für $x > 0$ überall differenzierbar
    $$\longrightarrow \quad f'(x) = 1/x$$
11. **Logarithmusfunktion zur allgemeinen Basis a:**
    $y = \log_a x$ mit $a > 0$
    $$\longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x \ln a}$$
    Verallgemeinerung: $y = \log_a g(x) \quad \Longrightarrow y' = \dfrac{g'(x)}{g(x) \ln a}$

1.5 Differentiationsregeln

12. **Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$
    Anmerkung: Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist überall differenzierbar
    $\longrightarrow \quad f'(x) = e^x$
13. **Allgemeine Exponentialfunktion zur Basis** a**:** $y = e^{g(x)}$
    $\longrightarrow \quad y' = e^{g(x)} g'(x)$
14. **Exponentialfunktion zur allgemeinen Basis** a**:**
    $y = a^x$ für $a > 0$
    $\longrightarrow \quad y' = a^x \ln a$
    Verallgemeinerung: $y = a^{g(x)} \quad \longrightarrow y' = a^{g(x)} g'(x) \ln a$ für $a \in \mathbb{R}^+$

1.6 Höhere Ableitungen

Definition: Zweite Ableitung, second derivative

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Ist ihre erste Ableitung $y' = f'(x)$ ihrerseits differenzierbar, dann heißt f zweimal differenzierbar und die erste Ableitung von $f'(x)$ heißt **zweite Ableitung** der Funktion $y = f(x)$. Diese Ableitung wird bezeichnet mit

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{oder} \quad y'' \quad \text{oder} \quad f''\,.$$

1.6 Höhere Ableitungen

Definition: n-te Ableitung

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Ist diese n-fach differenzierbar, so kann die n-te Ableitung von f als (erste) Ableitung der $(n-1)$-ten Ableitung von f gebildet werden. Diese Ableitungen werden allgemein bezeichnet mit

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{oder} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad \text{oder} \quad y^{(n)} \quad \text{oder} \quad f^{(n)} \, .$$

1.7 Konvexe Funktionen

Definition: konvexe und konkave Funktionen

Sei $I \in D(f)$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f

a) **konvex**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

für alle $\lambda \in [0,1]$;

b) **konkav**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

für alle $\lambda \in [0,1]$.

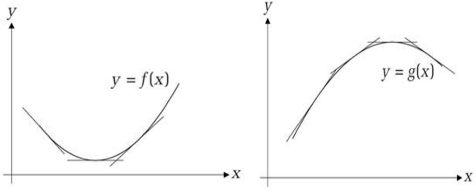
Eine Funktion f heißt **streng** konvex (konkav), wenn stets das Ungleichheitszeichen gültig ist.

1.7 Konvexe Funktionen

SATZ: Krümmungsverhalten differenzierbarer Funktionen

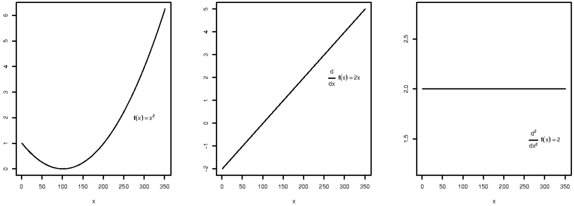
Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Gilt für alle $x \in I \subset D(f)$:

a) $f''(x) \geq 0$, so ist f im Intervall I **konvex**;
b) $f''(x) \leq 0$, so ist f im Intervall I **konkav**.



1.7 Konvexe Funktionen

Beispiel: die konvexe Funktion $f(x) = x^2$



$x = 1$	$f(1) = 1$	$f'(x) = 2$	$f''(1) = 2$
$x = 2$	$f(2) = 4$	$f'(2) = 4$	$f''(2) = 2$

1.8 Implizites Differenzieren

Die Methode der impliziten Differentiation

Wenn zwei Variablen x und y durch eine Gleichung in Beziehung stehen, erhält man y' wie folgt:

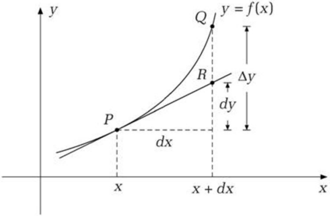
(a) Differentiation beider Seiten der Gleichung nach x (Achtung: y ist eine Funktion von x, erfordert meist Kettenregel)

(b) resultierende Gleichung nach y' auflösen

1.9 Differentiale

Definition: Differential

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$ und ihre erste Ableitung $y' = f'(x)$. dx sei eine endliche Änderung der unabhängigen Variablen. Dann nennt man $dy = f'(x)dx$ das zu dx gehörende **Differential der Funktion** f. dx nennt man auch Differential der unabhängigen Variablen.



1.9 Differentiale

Anmerkungen:

- Für $dx = 1$ gilt: $dy = f'(x)$, d.h. das Differential ist gleich der ersten Ableitung der Funktion.
- Analog zu den Rechenregeln für die Differentiation gibt es Rechenregeln für Differentiale.

  Beispielsweise gilt:

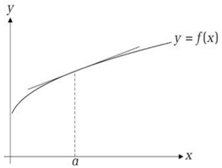
  - $dc = 0$ für $c =$ konstant;
  - $d(c_1 \cdot x + c_2 \cdot y) = c_1\, dx + c_2\, dy$ für c_1 und c_2 konstant;
  - $d(x \cdot y) = y\, dx + x\, dy$
  - $d(af + bg) = a\, df + b\, dg$
  - $d(fg) = g\, df + f\, dg$
  - $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, df - f\, dg}{g^2}$

1.9 Differentiale

- Differentiale können auch für höhere Ableitungen einer Funktion definiert werden. Z.B. ist ein **Differential zweiter Ordung** definiert als $d^2y = f''(x)dx^2$.
- Allgemein: Differential n-ter Ordnung $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$

1.10 Approximation von Funktionen

- Differentiale berechnen die (approximative) *Änderung* des Funktionswertes aufgrund einer Änderung des Argumentwertes. Regelmäßig ist es aber zusätzlich erforderlich den approximativen Funktionswert (und nicht nur dessen Änderung) zu berechnen.
- Dazu kann z.B. die Tangentengleichung herangezogen werden, womit eine **lineare Approximation** des Funktionswertes möglich ist.



Zur linearen Approximation verwenden wir:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

1.10 Approximation von Funktionen

- Manchmal erweist sich die lineare Approximation als zu ungenau.
  Vorschlag: Statt eine Funktion nur durch ein Polynom 1. Grades (= lineare Funktion) zu approximieren, kann versucht werden, ein Polynom n-ten Grades $P(x)$ zu verwenden!
- Die Vorgehensweise bei der polynomialen Approximation wird anhand der **quadratischen Approximation** demonstriert:
- Bisher wurde ein Polynom 1. Grades der Form $P(x) = A + B \cdot (x - a)$ zur Approximation der Funktion $y = f(x)$ in der Nähe von $x = a$ verwendet; durch die Identität des Polynoms 1. Grades mit der Tangente konnten die unbekannten Koeffizienten des Polynoms (A und B) identifiziert werden und es wurde eine lineare Approximation in der Form $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ vorgeschlagen.
- Jetzt soll ein Polynom 2. Grades der Form $P(x) = A + B \cdot (x - a) + C \cdot (x - a)^2$ verwendet werden.

1.10 Approximation von Funktionen

- Was setzen wir für die Koeffizienten A, B und C in diesem Fall ein?

  $\Longrightarrow$ Sinnvollerweise werden folgende drei Anforderungen an das Polynom $P(x)$ gestellt:

  - $P(a) = f(a)$, d.h. der Funktionswert an der Stelle a soll gleich dem Wert des Polynoms an dieser Stelle sein;
  - $P'(a) = f'(a)$; d.h. die Steigung des Polynoms und der Funktion an der Stelle a sollen identisch sein;
  - $P''(a) = f''(a)$; d.h. das Krümmungsverhalten des Polynoms und der Funktion an der Stelle a sollen identisch sein;

- Dies liefert drei Gleichungen zur Identifikation von A, B und C. Denn neben der Polynomgleichung $P(x)$ erhalten wir die deren erste und zweite Ableitung des Polynoms zu:

  (I) $P'(x) = B + 2C(x - a)$

  (II) $P''(x) = 2C$

1.10 Approximation von Funktionen

Aus (II) folgt dann unmittelbar: $C = P''(a)/2 = f''(a)/2$;
$B = P'(a) = f'(a)$ und $A = P(a) = f(a)$.

- Damit erhalten wir als quadratische Approximation von $y = f(x)$ um den Wert $x = a$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\, f''(a)(x-a)^2\ .$$

- Als allgemeiner Fall ergibt sich schließlich das so genannte **Taylor-Polynom *n*-ter Ordnung**, die **Taylorreihe *n*-ter Ordnung** oder die **Taylorapproximation *n*-ter Ordnung** zu:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\ .$$

- Durch die Konstruktion des Taylor-Polynoms sollte es möglich sein, die Funktion $y = f(x)$ in einem (kleinen?) Intervall um die Stelle $x = a$ herum zu approximieren.

1.11 Taylorformel

- Zur Abschätzung des Approximationsfehlers betrachten wir das Taylorpolynom um $x = 0$ (Maclaurin-Polynom) in der Form

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \ .$$

- Die so genannte **Taylor-Formel** erlaubt nun die Funktion $y = f(x)$ exakt mittels des Taylorpolynoms und eines geeignet gewählten Restglieds $R_{n+1}(x)$ darzustellen.
  Man erhält dann: $f(x) = P(x) + R_{n+1}(x)$.

- Eine wichtige explizite Form für das Restglied ist die so genannte Lagrange'sche Form des Restglieds:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(c)\, x^{n+1} \ ,$$

  für eine Zahl c zwischen 0 und x.
  Beweis siehe z.B. Sydsæter und Hammond (2.A.) S. 336f, (3.A.) S. 328

1.11 Taylorformel

- Explizite Formulierung der Taylor-Formel:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(c)\, x^{n+1} \,.$$

Anmerkungen

- Die auf der Taylor-Formel basierte Approximation einer Funktion wird häufig in wirtschaftswissenschaftlichen Modellen verwendet. Darüberhinaus wird sie als eines der Hauptresultate der Analysis angesehen.
- Das Restglied in der Lagrange'schen Form ähnelt den Summentermen im Taylorpolynom.
- Allerdings enthält die Taylor-Formel das nicht näher spezifizierte c und damit ist sie nicht direkt für die praktische Anwendung geeignet!

1.11 Taylorformel

- Es lassen sich aber dennoch zwei „indirekte“ Anwendungen der Taylor-Formel ableiten:
  - Da sich zeigen lässt, dass für jedes feste x der Restterm mit wachsendem n gegen 0 geht, ist also eine umso genauere Approximation der Funktion $f(x)$ durch das Polynom $P(x)$ möglich, je höher der Polynomgrad ist.
  - Darüberhinaus ist auch eine Abschätzung einer oberen Grenze für den Approximationsfehler möglich.

1.11 Taylorformel

Beispiel: Taylor-Approximation von $f(x) = e^x$

Gegeben sei die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Zu bestimmen sei die Taylor-Formel für $n = 3$ mit der Entwicklungsstelle $a = 0$ und eine Abschätzung für die Genauigkeit der Approximation von $f(x)$ durch $T_3(x)$ für $x = 0,1$.

Wegen

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$

erhält man für die Taylor-Formel für $n = 3$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} e^c$$

1.11 Taylorformel

Für $x = 0,1$ erhält man

$$e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} e^c \,,$$

wobei c zwischen 0 und 0,1 liegt.

Für das Restglied $R_{n-1} = \frac{0,1^4}{4!} e^c$ gilt wegen $e^c < e^{0,1} < 1,2$ die Abschätzung

$$|R_4(0,1)| = \frac{0,1^4}{4!} e^c < \frac{0,1^4}{4!} 1,2 < 5 \cdot 10^{-6}$$

1.12 Elastizitäten

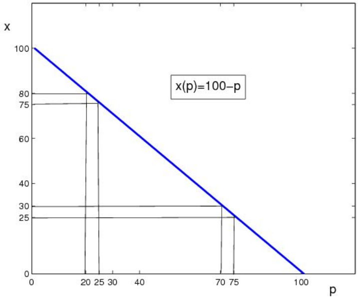
bislang: Approximation der Funktionswertänderung

aber: die Beurteilung der Veränderung ist problematisch:

i) Der Zahlenwert des Differentialquotienten ändert sich an ein und derselben Stelle bei Änderung der verwendeten Maßeinheit;
ii) Die Zahlenwerte der Ableitung als „Änderungsmaß“ können zu Fehlinterpretationen führen, da sie keine Aussagen über das Ausgangsniveau der Variablen enthalten.

1.12 Elastizitäten

Motivation zur Verwendung von Elastizitäten: *Wir betrachten eine lineare Nachfragefunktion der Form* $x(p) = 100 - p$.



1.12 Elastizitäten

Ändert man für eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $(x; f(x))$ die unabhängige Variable x um Δx, so bezeichnet man das Verhältnis der relativen Änderungen $\dfrac{\Delta f}{f}$ und $\dfrac{\Delta x}{x}$ als **Bogenelastizität** von f bezüglich x

$$\varepsilon_B(f, x) = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Die Bogenelastizität gibt an, um wieviel % sich f <u>durchschnittlich</u> ändert, wenn die unabhängige Variable um 1% geändert wird.

1.12 Elastizitäten

Bildet man den Grenzwert für $\Delta x \to 0$ so erhalten wir eine gute Approximation der Elastizität wie folgt:

Definition: Punktelastizität, elasticity

Gegeben sei die stetige Funktion $y = f(x)$. Dann nennt man das Verhältnis der relativen Änderungen $\frac{df}{f}$ und $\frac{dx}{x}$ **Punktelastizität** von f bezüglich x

$$\varepsilon(f, x) = \frac{df/f}{dx/x}$$

Der Zahlenwert der Punktelastizität gibt an, um wieviel % sich f ändert, wenn die unabhängige Variable um 1% geändert wird.

1.12 Elastizitäten

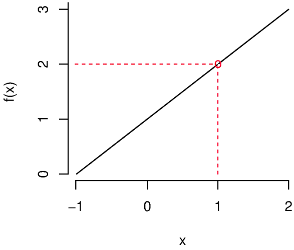
Ökonomische Terminologie:

Wert der Elastizität	Attribut der Funktion
$\varepsilon = 0$	vollkommen unelastisch
$-1 < \varepsilon < 0$ bzw. $0 < \varepsilon < 1$	unelastisch
$-\infty < \varepsilon < -1$ bzw. $1 < \varepsilon < \infty$	elastisch
$\varepsilon = \pm\infty$	vollkommen elastisch

1.13 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Problem: Definitionslücken oder Sprünge einer Funktion $f(x)$

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



Kürzen ergibt

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

$\rightarrow$ stetige Fortsetzung möglich:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in D_f \\ \lim_{x \to 1} f(x) & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

1.13 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Definition: Stetigkeit von Funktionen, continuity

$y = f(x)$ heißt stetig an der Stelle $a \in D(f)$ genau dann, wenn gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \; .$$

Ist eine Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig, so wird die Funktion **stetig** genannt.

Damit eine Funktion an der Stelle $x = a$ stetig ist müssen also drei Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Funktion f muss an der Stelle $x = a$ definiert sein;
2. der Grenzwert von f, wenn x gegen a strebt, muss existieren;
3. dieser Grenzwert muss exakt gleich $f(a)$ sein.

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, dann ist die Funktion $y = f(x)$ im Punkt $x = a$ nicht stetig. Wir sagen, dass sie im Punkt $x = a$ **unstetig** ist.

1.13 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Definition: Einseitiger Grenzwert, one-sided limits

Sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt der Ausdruck

a) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$ **rechtsseitiger** Grenzwert von f an der Stelle a und

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = B$ **linksseitiger** Grenzwert von f an der Stelle a.

Man kann nun eine Aussage über die Existenz eines Grenzwerts einer Funktion f an einer Stelle a machen gemäß folgendem

Satz:

Eine Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ besitzt im Punkt a den Grenzwert A, falls links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen.

1.13 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Definition: einseitige Stetigkeit, one-sided continuity

a) Sei f eine Funktion auf dem Intervall $[a, d)$. Wenn $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ gilt, nennt man die Funktion **stetig von rechts** an der Stelle a.

b) Sei f eine Funktion auf dem Intervall $(c, a]$. Wenn $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ gilt, nennt man die Funktion **stetig von links** an der Stelle a.

Eine Funktion ist demnach genau dann stetig an der Stelle a, wenn sie sowohl stetig von links als auch von rechts ist.

Eine Funktion, die auf einem **abgeschlossenen Intervall** $[a, b]$ definiert ist, ist dort auch stetig, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls (a, b) stetig ist und zusätzlich stetig von rechts an der Stelle a und stetig von links an der Stelle b ist.

1.13 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Beispiele:

1. $f(x) = |x|;$
2. $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 1 & \textit{für} \quad 0 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \textit{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}.$

Wir unterscheiden zwischen hebbaren und nicht hebbaren Unstetigkeitsstellen.

1.13 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Falls eine Funktion stetig ist, können daraus viele wichtige Eigenschaften abgeleitet werden.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Die Funktionen f und g seien stetig in a. Dann gilt u.a.:

a) $f \pm g$ sind stetig in a;

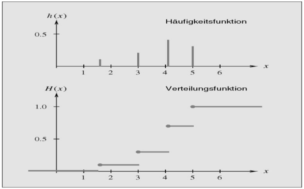
b) $f \cdot g$ und f/g (falls $g(a) \neq 0$) sind stetig in a.

1.13 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Anwendung dieses Konzepts in der Statistik:

Die Funktion $h(x) = \begin{cases} h_i & \text{falls} \quad x = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

heißt Häufigkeitsfunktion der Variablen X. Die Funktion $H(x) = \sum_{x_i \leq x} h(x_i)$ heißt (empirische) Verteilungsfunktion der Variablen X.



Die (empirische) Verteilungsfunktion hat u.a. folgende Eigenschaft: $H(x)$ ist überall wenigstens rechtsseitig stetig, d.h. es gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to a^+} H(x) = H(a)$.

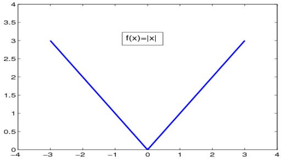
1.13 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Die Beziehung zwischen den wichtigen Eigenschaften der Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion regelt der folgende

SATZ: *Stetigkeit und Differenzierbarkeit*

Ist eine Funktion f im Punkt a differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.
Die Umkehrung gilt nicht.
Aber es gilt: Ist f in a *nicht* stetig, so ist sie auch *nicht* differenzierbar.

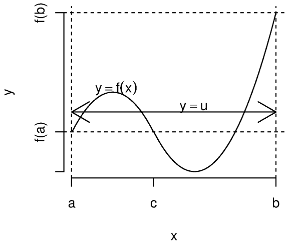
Beispiel:



1.14 Zwischenwertsatz und Newton-Verfahren

SATZ: Zwischenwertsatz, intermediate value theorem

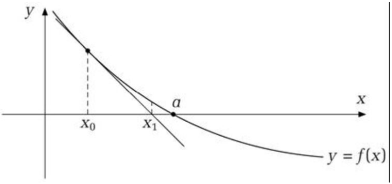
Es sei f eine auf $[a, b]$ stetige Funktion für die oBdA $f(a) \leq f(b)$ gilt. Dann existiert zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = u$.



Spezialfall Nullstellensatz:
Haben insbesondere $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz von mindestens einer Nullstelle von f im offenen Intervall (a, b).

1.14 Zwischenwertsatz und Newton-Verfahren

Newton-Verfahren zur (approximativen) Bestimmung von Nullstellen einer Funktion $f(x)$:



SATZ: Newton-Verfahren, Newton's method

Die durch das Newton-Verfahren erzeugten Punkte sind gegeben durch $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, mit $n = 0, 1, \ldots$.

1.15 Regel von L'Hôpital

Häufig gilt es Grenzwerte für $x \to a$ zu untersuchen, bei denen sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen 0 streben. Wir schreiben dann: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{„0"}}{\text{„0"}}$ und nennen solch einen Grenzwert eine **unbestimmte Form vom Typ 0/0**.

1.15 Regel von L'Hôpital

SATZ: Regel von L'Hôpital

Gegeben seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die in einem Intervall (α, β), das den Wert a enthält, differenzierbar sind, wobei sie möglicherweise an der Stelle a nicht differenzierbar sind. Für beide Funktionen f und g gelte, dass sie gegen 0 streben, wenn $x \to a$ geht. Wenn nun $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq a$ in (α, β) und wenn $\lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x) = L$ ist, dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,.$$

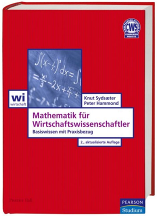
Dies gilt unabhängig davon, ob L endlich oder $\pm\infty$ ist.

1.15 Regel von L'Hôpital

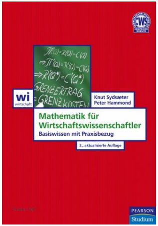
Verallgemeinerungen des Satzes von L'Hôpital:

1. Falls $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ebenfalls eine unbestimmte Form vom Typ „$\frac{0}{0}$"besitzt, wird $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ betrachtet. Ist dies wiederum ein unbestimmter Wert, wird das Verfahren solange wiederholt, bis $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ bestimmt ist.
2. Die Regel behält auch dann ihre Gültigkeit, wenn
   - $x \to \pm\infty$ betrachtet wird und
   - unbestimmte Ausdrücke der Form „$\frac{\infty}{\infty}$" resultierten.

Literatur



Sydsæter/Hammond (2.A)
Kapitel 6 und 7



Sydsæter/Hammond (3.A)
Kapitel 6 und 7