

Aufgabe 1

Formulieren Sie geeignete Einführungs- und Beseitigungsregeln für die Biimplikation.

HINWEIS: Lassen Sie sich von der Äquivalenz $\phi \leftrightarrow \psi \models \phi \rightarrow \psi \wedge \psi \rightarrow \phi$ inspirieren.

Aufgabe 2

Gegeben seien folgende formale Beweise:

$$(i) \quad \frac{\frac{[\neg A]^3 \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} (\wedge B_1)}{\perp} (\neg B) \quad \frac{[\neg B]^3 \quad \frac{[A \wedge B]^2}{B} (\wedge B_2)}{\perp} (\neg B)}{\frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} (\neg E)^1 \quad \frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} (\neg E)^2} (\vee B)^3}{\frac{\perp}{\neg(A \wedge B)} (\neg E)^4} (\rightarrow E)^4$$

$$(ii) \quad \frac{\frac{[A \rightarrow B]^4 \quad [A]^1}{B} (\rightarrow B) \quad [A]^2}{\frac{B}{A \rightarrow B} (\rightarrow E)^1} (\rightarrow B)}{\frac{[\neg B]^3 \quad B}{\perp} (\neg B)} (\rightarrow B)$$

$$\frac{\frac{\perp}{\neg A} (\neg E)^2}{\frac{\neg A}{\neg B \rightarrow \neg A} (\rightarrow E)^3} (\rightarrow E)^4$$

- Untersuchen Sie die gegebenen formalen Beweise auf maximale Formelvorkommen und kontrahieren Sie bei Bedarf geeignet bzw. geben Sie jeweils kurz an, warum das Vorkommen einer Formel nicht maximal ist.
- Wandeln Sie jeden der gegebenen formalen Beweise so um, daß alle Vorkommen von Formeln $\neg\phi$ darin als $\phi \rightarrow \perp$ ausgedrückt sind.

Aufgabe 3

- Zeigen Sie: $\vdash_{NK} (\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)$.

HINWEIS: Orientieren Sie sich an der Struktur des (ggf. normalisierten) formalen Beweises (ii).

- Zeigen Sie: $\vdash_{NK} \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$.

HINWEIS: Kombinieren Sie den formalen Beweis aus Teilaufgabe a) auf geeignete Weise mit dem formalen Beweis der Formel $\neg\neg A \rightarrow A$ von Seite 84 des Skriptes.

- Untersuchen Sie den formalen Beweis aus Teilaufgabe b) auf neue maximale Formelvorkommen und kontrahieren Sie bei Bedarf geeignet.