

Mathematische Methoden der
Wirtschaftswissenschaft
im Wintersemester 2014/2015

Einführung

Dr. Thomas Dimpfl

*Lehrstuhl für Statistik, Ökonometrie und Empirische
Wirtschaftsforschung*

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN



WIRTSCHAFTS- UND
SOZIALWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

Zum Vorkurs der Vorlesung „Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft“

Der vorliegende Vorkurs zur Veranstaltung „Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft“ richtet sich an Studienanfänger in den wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen. Er stellt eine Wiederholung der mathematischen Grundlagen dar, welche nach Erreichen der Hochschulzugangsberechtigung von den Studenten erwartet werden können. Ziel des Vorkurses ist es, angehende Studenten mit unterschiedlichem Hintergrundwissen auf eine gemeinsame Basis zu stellen und somit den Einstieg ins Studium zu erleichtern. Da die Inhalte aus der Wiederholung des Abiturstoffes bestehen, ist der Besuch der Tutorien nicht verpflichtend. Das Verständnis der Vorlesung ist auch ohne den Vorkurs möglich.

Zum Vorkurs der Vorlesung „Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft“

Als ergänzende Literatur zu den Folien wird das Buch

Sydsæter, K., Hammond, P.: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, 2011 bzw. 2013, Pearson
Lehrbuchsammlung UB, Signatur wiwi Q 104 Auflage 3
bzw. Auflage 4

empfohlen, an welchem sich auch die Vorlesung orientiert.
Alternativ kann das Buch

Cramer, E., Nešlehova, J.: *Vorkurs Mathematik*, 2008,
Springer
elektronische Ressource im Uni-Netzwerk
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-01833-6>

verwendet werden, welches eine große Menge von Übungsaufgaben
und dazugehörigen Lösungen bietet.

Gliederung Teil 1

Folgende Themen werden behandelt:

- ① Mengenlehre
- ② Zahlenbereiche
- ③ Regeln der Algebra
- ④ Potenzen und Wurzeln
- ⑤ Ungleichungen
- ⑥ Intervalle und Absolutbeträge
- ⑦ Quadratische Gleichungen
- ⑧ Aussagenlogik

Elementare Grundlagen der Mathematik: Mengenlehre

1.1 Mengenlehre

Ausgangspunkt der Betrachtung ist der Begriff einer **Menge** von Objekten.

Beispiele

Folgende Beschreibungen definieren Mengen von Objekten:

- Studierende aller Hochschulen in Deutschland,
- Fischarten in deutschen Gewässern,
- Anzahl an Autounfällen in einem gewissen Zeitraum in Tübingen.

Abstraktere Beispiele von Mengen sind die üblichen Zahlenbereiche wie reelle oder natürliche Zahlen.

Im Folgenden wird der Begriff einer Menge präzisiert.

1.1 Mengenlehre

Definition: Menge, Element

*Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens. Die Objekte heißen **Elemente** der Menge.*

Mengen werden i.d.R. mit Großbuchstaben (z.B. A) und ihre Elemente mit Kleinbuchstaben (z.B. a_1, a_2, a_3) bezeichnet.

Um eine Menge beschreiben zu können, wird eine Vorschrift benötigt, welche ihre Elemente eindeutig festlegt. Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

- Aufzählung der Elemente: Die Elemente der Menge werden aufgelistet und in geschweiften Klammern angegeben. Jedes Element wird **genau einmal** aufgeführt. $M = \{a, b, c, d\}$
- Angabe von Eigenschaften, die angeben, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht: $M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$
Alternative Notation: $M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$

1.1 Mengenlehre

- **Grundmenge** Ω : Alle Elemente für eine bestimmte Betrachtungsweise.
- **Leere Menge** $\{\}$ (auch \emptyset) enthält keine Elemente.
- **Gleichheit von Mengen**: Zwei Mengen sind einander gleich ($A = B$), wenn jedes Element aus A auch Element von B und zugleich jedes Element aus B auch Element von A ist.

Beachte: Die Reihenfolge der Elemente in einer Menge spielt keine Rolle!

$$\{a, b, c, d\} = \{c, a, d, b\}$$

- **Teilmenge**: Ist jedes Element von A auch ein Element von B , so ist A *Teilmenge* von B ($A \subset B$).
Für alle Mengen gilt: $\{\} \subset A$, $A \subset A$.
- **Komplementärmenge**: $\overline{M} = \{x \mid x \notin M \wedge x \in \Omega\}$ ist Komplement zu $M \subset \Omega$. *Alternative Schreibweise*: M^c .

$$\text{Es gilt: } \overline{\overline{M}} = M, \quad \overline{\emptyset} = \Omega, \quad \overline{\Omega} = \emptyset.$$

1.1 Mengenlehre

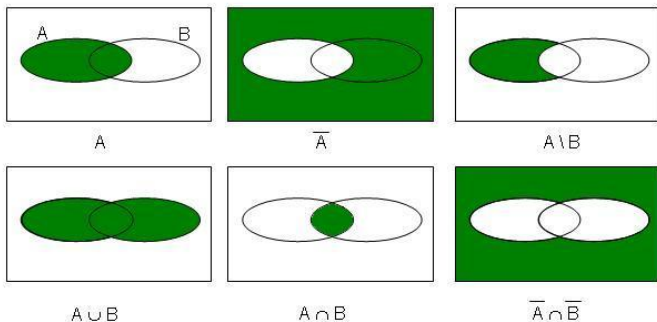
Im Folgenden wird eine Grundmenge Ω mit Teilmengen A , B und C betrachtet.

Mengenoperationen:

- **Durchschnitt** (Schnittmenge): $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
Disjunkte Mengen: Ist der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer ($A \cap B = \emptyset$), so heißen A und B disjunkt (elementfremd).
- **Vereinigung:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Menge aller Elemente, die in A oder in B oder in beiden enthalten sind.
- **Differenz von Mengen:** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Menge aller Elemente von A , die nicht in B enthalten sind.

1.1 Mengenlehre

Anschauliche grafische Darstellung der Mengen und Mengenoperationen mittels **Venn-Diagramme**:



1.1 Mengenlehre

- Identitätsgesetze:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A.$$

- Kommutativgesetze:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

- Assoziativgesetze:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Im Allgemeinen gilt jedoch nicht: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C!$

- Distributivgesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Gesetze von De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Elementare Grundlagen der Mathematik: Zahlenbereiche

1.2 Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen \mathbb{N} : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Zuweilen wird ihnen auch noch die Zahl 0 zugerechnet, manche Lehrbücher notieren diesen Zahlbereich dann als \mathbb{N}_0 . Addieren und Multiplizieren von Zahlen aus \mathbb{N} ergeben wieder Elemente von \mathbb{N} .

Ganze Zahlen \mathbb{Z} : Diese Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen um negative ganze Zahlen, d.h. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Addieren, Multiplizieren und Subtrahieren von Zahlen aus \mathbb{Z} ergeben wieder Elemente aus \mathbb{Z} .

Rationale Zahlen \mathbb{Q} : Die *rationalen Zahlen* umfassen die Menge aller Quotienten zweier ganzer Zahlen, wobei die Einschränkung gilt, dass der Nenner nicht 0 sein darf. Rationale Zahlen sind periodische oder abbrechende Dezimalzahlen. Mit der Erweiterung auf die rationalen Zahlen sind alle vier Grundrechenarten ausführbar.

Irrationale Zahlen: Alle nichtperiodischen, nichtabbrechenden Dezimalzahlen bezeichnet man als *irrationale Zahlen*. Z.B. $\sqrt{2}$ (siehe Exkurs).

1.2 Zahlenbereiche

Reelle Zahlen \mathbb{R} : Die *rationalen* und *irrationalen* Zahlen zusammengenommen werden als *reelle Zahlen* bezeichnet.

Eine ununterbrochene und endlose Gerade mit einem Ursprung und einer positiven Längeneinheit ist ein geeignetes Modell für die Reellen Zahlen. Anders ausgedrückt: Es gibt eine *Eins-zu-Eins-Korrespondenz* zwischen den reellen Zahlen und der Zahlengeraden. Man spricht auch oft von der „reellen Geraden“.

Man sagt von der rationalen und irrationalen Zahlen, dass sie *dicht* auf der Zahlengeraden liegen. Dies bedeutet, dass man zwischen zwei reellen Zahlen, egal wie nah sie zueinander liegen, immer noch eine rationale und eine irrationale Zahl finden kann.

Wendet man die vier Grundrechenarten auf die reellen Zahlen an, so ist das Ergebnis wieder eine reelle Zahl (selbstverständlich darf nicht durch Null geteilt werden) (vgl. Sydsaeter *et.al.* S. 24).

Exkurs: Die Phytagoreer und die Irrationalität von

$$\sqrt{2}.$$

Die Nachrichten über den Bund der Phytagoreer stammen aus jahrhundertlangem Abstand und sind entsprechend unsicher. Selbst die biographischen Angaben über den Begründer des Bundes, über Phytagoras von Samos (ca. 540-500), Sohn eines Gemmenschneiders, sind spärlich. Er sei vor der Tyrannis des Polykrates auf Samos ausgewichen, habe Reisen nach Ägypten und Mesopotamien unternommen und sich um 525 v.Chr. in Kroton, in Unteritalien, niedergelassen und dort einen Geheimorden begründet, der einige Zeit beträchtlichen Einfluss ausgeübt hat.

Nach dem Sieg der demokratischen Partei über die Aristokratie wurde der Bund verfolgt und erlosch zunächst Anfang des 4. Jahrhunderts v. Chr. Doch gab es eine Neubelebung im 1. Jahrhundert v. Chr.: aus der Zeit der sog. Neuphytagoreer stammen die meisten Informationen und Legenden über den ursprünglichen Bund der Phytagoreer.

Den Bund der Phytagoreer kennzeichnen typische Merkmale einer religiösen Sekte: Konspiration, strenge Vorschriften über Kost, Kleidung, Bestattungszeremonien, Probezeit für Neulinge und Lehre von der Seelenwanderung.

Exkurs: Die Pythagoreer und die Irrationalität von

$$\sqrt{2}.$$

Was aber den Bund der Pythagoreer aus vielen ähnlichen Mysterienkulten, teilweise orientalischen Ursprungs, heraushob und für die Geschichte der Wissenschaften und der Mathematik relevant macht, ist der Umstand, dass bei den Pythagoreern die Vereinigung mit dem Göttlichen über die Versenkung in die wunderbaren Gesetze der Zahlenwelt erreichbar sein sollte. Das Wesen der Welt bestand für sie in der Harmonie der Zahlen. Von hierher rührt die Hinwendung zur Mathematik, Astronomie und Musiklehre freilich sozusagen als rationales Nebenprodukt des eigentlichen, des religiösen Hauptinteresses. Innerhalb der pythagoreischen Schule wurde jedoch die niederschmetternde Entdeckung gemacht, dass es auch Größen gibt, die sich nicht rational ausdrücken lassen. Diese Entdeckung wird im Allgemeinen in Verbindung gebracht mit dem Pythagoreer Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.): es gibt sich gegenseitig nicht messende (inkommensurable) Strecken. Strecken messen sich nicht, sind zueinander inkommensurabel, wenn die Länge der Strecken nicht ganzzahlige Vielfache der Länge einer als Einheitsstrecke aufgefassten dritten Strecke sind.

Modern ausgedrückt: es gibt Strecken, deren Verhältnis ihrer Längen eine irrationale Zahl ist.

Exkurs: Die Pythagoreer und die Irrationalität von

$$\sqrt{2}.$$

Die Entdeckung von Hippasos zerstörte die Grundauffassung von der „arithmetica universalis“ (sog. Krise der griechischen Mathematik) und damit die Grundlagen der pythagoreischen Weltsicht.

Dazu passt die Legende, dass Hippasos diese katastrophale Entdeckung bekannt gemacht und damit die Geheimhaltungspflicht verletzt habe. Und als nun gar Hippasos bei einem Schiffbruch ums Leben kam, da war dies -wie es der Neupythagoreer Iamblichos empfand- eine notwendige und gerechte Strafe und hatte seine metaphysischen Gründe darin, . . . „*dass alles Unausgesprochene und Unsichtbare sich zu verbergen liebt. Wenn aber eine Seele einer solchen Gestalt des Lebens begegnet und sie zugänglich und offenbar macht, so wird sie in das Meer des Werdens versetzt und von den unstäten Fluten umhergespült.*“ (Zitiert nach [Becker/Hofmann 1951, S. 57]).

Exkurs: Die Pythagoreer und die Irrationalität von $\sqrt{2}$.

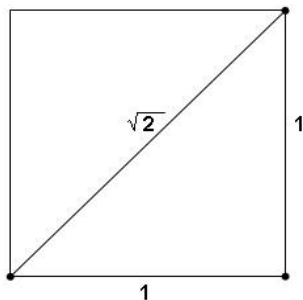


Abbildung: $\sqrt{2}$ als geometrische Länge.

Exkurs: Die Phytagoreer und die Irrationalität von

$\sqrt{2}$.

Die Entdeckung der Inkommensurabilität dürfte, nach neueren Forschungsergebnissen, durch „Wechselwegnahme“ am Pentagramm (siehe Abb. unten)) gemacht worden sein und nicht am Quadrat, bei dem die Diagonale inkommensurabel zur Quadratseite ist.

Der Zusammenbruch der „arithmetica universalis“ hatte weittragende Konsequenzen für die Weiterentwicklung der griechischen- und somit für den Lauf der ganzen westlichen Mathematik: Die griechische Mathematik nahm eine spezifische Form an, die als „geometrische Algebra“ bezeichnet wird. Da beispielsweise $\sqrt{2}$ als Diagonale eines Quadrates geometrisch darstellbar (siehe Abbildung auf S. 18), aber nicht als Zahl nach damaligen Zahlbegriff (weder als ganze Zahl noch als Verhältnis ganzer Zahlen) darstellbar ist, wurde die Behandlung des Irrationalen und algebraischer Probleme ins Geometrische verlagert, d.h. algebraische Operationen wurden in Form geometrischer Konstruktionen durchgeführt, deren Existenz gesichert war. (Wußing, 6000 Jahre Mathematik, 2008).



Abbildung: Das Pentagramm (Quelle: Wikipedia).

Exkurs: Die Phytagoreer und die Irrationalität von

$$\sqrt{2}.$$

Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$:

Die Aussage, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, bedeutet, dass es keine Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt, mit der Eigenschaft, dass $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Beweis durch Widerspruch: Es sei angenommen, dass

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}.$$

Ferner sei angenommen, dass p und q keine gemeinsamen Faktoren haben. Diese Annahme ist insofern nicht restriktiv, als man immer den gemeinsamen Faktor wegekürzen und die daraus resultierenden Zahlen als p und q setzen kann. Dann gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Exkurs: Die Pythagoreer und die Irrationalität von

$$\sqrt{2}.$$

p^2 ist also gerade, da teilbar durch 2. Ebenfalls ist p gerade, denn ansonsten wäre p^2 ungerade. Aus p gerade folgt die Möglichkeit der Darstellung als $p = 2r, r \in \mathbb{Z}$. Nun gilt

$$(2r)^2 = 2q^2$$

$$4r^2 = 2q^2$$

$$2r^2 = q^2.$$

Der Widerspruch ist offensichtlich. Aus den oben aufgeführten Überlegungen folgt, dass q gerade sein muss. Dies bedeutet jedoch, dass p und q einen gemeinsamen Faktor haben.

Elementare Grundlagen der Mathematik: Regeln der Algebra

1.3 Regeln der Algebra

Die wichtigsten Rechenregeln der Algebra

Für beliebige Zahlen a, b und c gilt:

$$(a) \quad a + b = b + a$$

$$(b) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(c) \quad a + 0 = a$$

$$(d) \quad a + (-a) = 0$$

$$(e) \quad ab = ba$$

$$(f) \quad (ab)c = a(bc)$$

$$(g) \quad 1 \cdot a = a$$

$$(h) \quad aa^{-1} = 1 \text{ für } a \neq 0$$

$$(i) \quad (-a)b = a(-b) = -ab$$

$$(j) \quad (-a)(-b) = ab$$

$$(k) \quad a(b + c) = ab + ac$$

$$(l) \quad (a + b)c = ac + bc$$

1.3 Regeln der Algebra

Definition: *Algebraische Ausdrücke*

Ausdrücke, die Variablen wie $3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8$ enthalten, werden *algebraische Ausdrücke* genannt, wobei

- $3xy; -5x^2y^3; 2xy; 6y^3x^2; -3x; 5yx; 8$ als *Terme* und
- $3, -5, 2, 6, -3, 5, 8$ als *numerische Koeffizienten* bezeichnet werden.

Beachte: Terme vom selben Typ (die sich nur in ihren numerischen Koeffizienten unterscheiden) können – und sollten – zusammengefasst werden:

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8 = x^2y^3 + 10xy - 3x + 8$$

1.3 Regeln der Algebra

Faktorenzerlegung von algebraischen Ausdrücken

Die Terme algebraischer Ausdrücke können oft in ihre *Faktoren* zerlegt werden, wie z.B.:

- $6y^3x^2 = 2 \cdot 3 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot x \cdot x$
- $15x^4 = 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

Ebenso kann ein ganzer algebraischer Ausdruck als ein *Produkt einfacherer Faktoren* geschrieben werden:

$$9x^2 - 25y^2 = (3x - 5y) \cdot (3x + 5y)$$

1.3 Regeln der Algebra

Brüche: Basics

Für $b, c, d \neq 0$ gilt:

$$(1) \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{c}}{\cancel{b} \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

$$(2) \frac{-a}{-b} = \frac{a \cdot (-1)}{b \cdot (-1)} = \frac{a}{b}$$

$$(3) -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$(4) \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$(5) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$(6) a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$$

$$(7) a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$(8) \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Falsch:

- $\frac{\cancel{5} + 3b}{\cancel{a}b} = \frac{5 + 3\cancel{b}}{\cancel{b}} = \frac{5+3}{1} = 8$

- $\frac{a}{a^2 + 2a} = \frac{a}{a^2} + \frac{a}{2a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}$

Elementare Grundlagen der Mathematik: Potenz- und Wurzelgesetze

1.4 Potenzen und Wurzeln

Definition: *Ganzzahlige Potenzen*

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (**Basis**) und $n \in \mathbb{N}$ (**Exponent**) gilt: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$.

- Weiterhin definieren wir: $a^0 \equiv 1$
- Nicht definiert ist dagegen der Ausdruck 0^0 .
- Für Potenzen mit negativen Exponenten definieren wir: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

1.4 Potenzen und Wurzeln

Rechenregeln für Potenzen:

$$(i) \quad a^r a^s = a^{r+s}$$

$$(ii) \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$(iii) \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(iv) \quad a^r b^r = (ab)^r$$

$$(v) \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

1.4 Potenzen und Wurzeln

Anmerkungen:

Die obigen Regeln können ohne weiteres auf Ausdrücke mit mehr als zwei Faktoren angewandt werden.

Beachte: Bei unterschiedlichen Basen und unterschiedlichen Exponenten ist keine Potenzregel anwendbar!

Für beliebige a, b, r und s gilt:

$$a^r \pm a^s \neq a^{r+s}$$

$$a^r \pm b^r \neq (a \pm b)^r$$

$$a^r b^s \neq (ab)^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{b^s} \neq \left(\frac{a}{b}\right)^{r+s}$$

Ist a eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, dann wird a^n als n -te Potenz von a bezeichnet; hierbei ist a die Basis und n der Exponent.

1.4 Potenzen und Wurzeln

Beispiel: Barwert und Zinseszinsen

Als Variablen definieren wir: Anlagekapital K und Zinsrate $p\%$ pro Zeiteinheit (z.B. ein Jahr).

Der Kontostand nach t Zeiteinheiten bei Zinseszinsen ist gegeben durch

$$K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t .$$

dabei wird $1 + \frac{p}{100}$ oft als **Aufzinsungs-** oder **Wachstumsfaktor** bezeichnet.

Den **Bar-** oder **Gegenwartswert** eines Anlagebetrags erhält man mittels

$$K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-t} .$$

1.4 Potenzen und Wurzeln

Definition: *Gebrochene Potenzen/Wurzeln*

$\sqrt[n]{a} := a^{1/n}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. a heißt Radikant und n Wurzelexponent.

Der Spezialfall $n = 2$ bezeichnet die **Quadratwurzel** aus der positiven Zahl a .

Für $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $\sqrt[n]{a^m} := a^{\frac{m}{n}}$. Allgemein gelten für beliebige $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ folgende

Rechenregeln für gebrochene Potenzen:

$$\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{a^q} = a^{\frac{pm+qn}{mn}} = \sqrt[nm]{a^{pm+qn}} \quad \sqrt[n]{a^p} : \sqrt[m]{a^q} = \sqrt[nm]{a^{pm-qn}}$$

$$\sqrt[n]{(\sqrt[n]{a^p})^q} = \sqrt[nm]{a^{pq}} \quad \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{(ab)^p}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{b^p}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^p}$$

1.4 Potenzen und Wurzeln

Anmerkungen:

- Der häufigste Fehler beim Wurzelrechnen ist: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Das ist **falsch!**
- Da z.B. $(-2)^2 = 2^2 = 4$ gilt, sind $x = 2$ und $x = -2$ Lösungen der **quadratischen Gleichung** $x^2 = 4$.
Dies wird oft geschrieben als: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.
- Letzteres ist zu unterscheiden vom Symbol $\sqrt{4}$ das stets 2 bedeutet und nicht auch -2 .
- Für **ungerades** $n \in \mathbb{N}$ kann $a^{\frac{m}{n}}$ sogar für $a < 0$ sinnvoll definiert werden.
Z.B. gilt: $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Elementare Grundlagen der Mathematik: Ungleichungen

1.5 Ungleichungen

- Begriff der *Anordnung der reellen Zahlen*: Für zwei reelle Zahlen a und b gilt stets: $a = b$ oder $a < b$ oder $a > b$.
- Grafische Veranschaulichung mittels der Zahlengeraden.
- Ist die Beziehung zwischen zwei Zahlen oder Termen über die Zeichen $>$ oder $<$ geregelt, so sprechen wir von einer **strikten** oder **strengen Ungleichung** (inequality).
- Bei \leq oder \geq sprechen wir von einer **schwachen Ungleichung**.

1.5 Ungleichungen

Wichtige Rechenregeln:

- Addition bzw. Subtraktion von $d \in \mathbb{R}$:
 $a > b \Leftrightarrow a \pm d > b \pm d$
- Multiplikation bzw. Division mit **positivem** d ($d \in \mathbb{R}^+$):
 $a > b \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot d$ bzw. $a/d > b/d$.
- Multiplikation bzw. Division mit **negativem** d ($d \in \mathbb{R}^-$):
 $a > b \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot d$ bzw. $a/d < b/d$
(Umkehrung der Anordnung!)

1.5 Ungleichungen

- Die Rechenregeln gelten auch für den Fall schwacher Ungleichungen.
- Die Lösungen einer Ungleichung werden in einer **Lösungsmenge** \mathbb{L} zusammengefaßt.
- Zwei Ungleichungen, die gleichzeitig gelten sollen, werden als **Doppelungleichung** bezeichnet.

Beispiel: *Wenn gleichzeitig gelten soll: $a \leq z$ und $z < b$, dann kann man kompakt schreiben: $a \leq z < b$.*

- Oft ist bei der Lösung einer Ungleichung eine **Fallunterscheidung** durchzuführen.
- Eine strukturierte Hilfe dazu bietet das so genannte **Vorzeichen-Diagramm**. Siehe dazu Sydsæter und Hammond (2.A., 3.A.), Abschnitt 1.6.
- Anwendung von Ungleichungen insb. in der Kurvendiskussion und der Linearen Optimierung.

Elementare Grundlagen der Mathematik: Intervalle und Absolutbeträge

1.6 Intervalle und Absolutbeträge

Definition: *Intervalle*

Die Menge der Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die einer Ungleichung $a \leq x \leq b$ genügen, nennt man Intervall.

- Intervalle lassen sich als lückenlose Teilstrecke der Zahlengerade darstellen.
- Wir unterscheiden verschiedene **Arten von Intervallen**:

Zweiseitig begrenzte Intervalle:

$$\{x \mid a \leq x \leq b\} =: [a, b] \quad \text{abgeschlossenes Intervall}$$

$$\left. \begin{array}{l} \{x \mid a < x \leq b\} =:]a, b] \quad \text{alt. } (a, b] \\ \{x \mid a \leq x < b\} =: [a, b[\quad \text{alt. } [a, b) \end{array} \right\} \quad \text{halboffene Intervalle}$$

$$\{x \mid a < x < b\} =:]a, b[\quad \text{alt. } (a, b) \quad \text{offenes Intervall}$$

Einseitig begrenzte Intervalle:

$$\{x \mid a \leq x\} =: [a, +\infty[\quad \text{alt. } [a, \infty)$$

$$\{x \mid x < b\} =:]-\infty, b) \quad \text{alt. } (-\infty, b)$$

1.6 Intervalle und Absolutbeträge

Definition: *Absolutbetrag*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Einige Rechenregeln für Beträge:

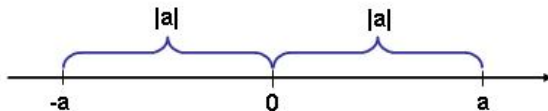
$$|-a| = |a|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{Dreiecksungleichung } \star)$$

Anschaulich ist der Betrag die Distanz zwischen a und 0 auf der Zahlengerade:



1.6 Intervalle und Absolutbeträge

(★) Zur Dreiecksungleichung:

Diese harmlos aussehende Ungleichung ist von großer Relevanz. Dass es sich dabei tatsächlich um ein Dreieck handelt wird im Folgenden gezeigt.

Gegeben seien drei reelle Zahlen a , b und c .

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a - b + 0| \\ &= |a - b + c - c| \\ &= |(a - c) + (c - b)| \\ &\leq |a - c| + |c - b| \text{ wegen der Dreiecksungleichung.} \end{aligned}$$

Es gilt also

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b| \tag{1}$$

Wie oben erwähnt ist der Ausdruck $|a - b|$ gleich der Distanz zwischen den Punkten a und b auf der Zahlengeraden. Nun seien a , b und c Punkte in der Ebene. Dann macht Ungleichung (1) die plausible Aussage, dass die Distanz von a bis b kleiner gleich der Distanz von a bis c plus die Distanz von c bis b ist. Geometrisch betrachtet, handelt es sich dabei um ein Dreieck.

Elementare Grundlagen der Mathematik: Quadratische Gleichungen

1.7 Quadratische Gleichungen

- Das Lösen von Gleichungen spielt in der Wirtschaftswissenschaft eine wichtige Rolle.
- Dabei gilt stets der Grundsatz der **Äquivalenzumformung**: Die Lösungsmenge einer Gleichung bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten die gleiche Rechenoperation mit der gleichen Zahl durchgeführt wird. **Nicht zulässig** ist die Multiplikation mit Null und die grundsätzlich verbotene Division durch Null.
- Wir unterscheiden eine Vielzahl von Gleichungstypen.
- Hinweise zur Lösung von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten finden Sie z.B. in Sydsæter und Hammond (2.A., 3.A.), Abschnitt 2.1.
- Von besonderer Bedeutung ist die Lösung **quadratischer Gleichungen**.

1.7 Quadratische Gleichungen

- Die Lösung für die **allgemeine Form** einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ist} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Die Lösung für die **Normalform** einer quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{ist} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

- Eine quadratische Gleichung besitzt *keine, eine oder zwei reelle Lösungen*, wenn der Ausdruck $b^2 - 4ac$ bzw. $p^2/4 - q$ (*Diskriminante*) *kleiner, gleich oder größer* als Null ist.
- Eine quadratische Gleichung besitzt keine reelle Lösung, wenn die Diskriminante negativ ist. Sie besitzt aber zwei (konjugiert) komplexe Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen. *Siehe dazu den Exkurs weiter unten.*
- Die Lösungen einer (quadratischen) Gleichung werden oft auch als **Wurzeln** (roots) der Gleichung bezeichnet.

1.7 Quadratische Gleichungen

SATZ von VIETA:

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so gilt:

$$-a(x_1 + x_2) = b \quad \text{und} \quad ax_1x_2 = c .$$

Für quadratische Gleichungen in der Normalform $(x^2 + px + q = 0)$ gilt entsprechend:

$$-(x_1 + x_2) = p \quad \text{und} \quad x_1x_2 = q .$$

Damit lassen sich quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ auch in der Form $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ schreiben. Analog lassen sich quadratische Gleichungen in Normalform $(x^2 + px + q = 0)$ auch schreiben als $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Exkurs: Komplexe Zahlen

Bisher haben wir Lösungen für $x^2 = a$ mit $a > 0$, die auf der reellen Zahlengerade liegen.

Für $x^2 = -1$ gibt es keine reelle Lösung. Deshalb wird definiert:

$$i^2 = -1 \quad \text{oder} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Definition: Komplexe Zahlen

$$Z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a = \operatorname{Re}(Z) \quad \text{Realteil von } Z$$

$$b = \operatorname{Im}(Z) \quad \text{Imaginärteil von } Z.$$

Zu $Z = a + bi$ heißt $\bar{Z} = a - bi$ konjugiert komplex.

Literatur: Chiang and Wainwright (2005), Sec. 16.2 oder Opitz, Abschnitt 1.6

Exkurs: Gleichungssysteme

- Regelmäßig gilt es in den Wirtschaftswissenschaften Gleichungssysteme nach den verschiedenen Unbekannten aufzulösen.
- Treten alle Unbekannte in linearer Form in den Gleichungen auf, so sprechen wir von einem **linearen Gleichungssystem**.
- In einem späteren Kapitel werden effiziente Lösungsmethoden für solche Gleichungssysteme behandelt.
- Hier: einfache Verfahren aus der Schulmathematik:
 - Einsetzungsverfahren
 - Additions-/ Subtraktionsverfahren
→ Hinweis auf das Gaußsche Eliminationsverfahren!
 - Gleichsetzungsverfahren.

Elementare Grundlagen der Mathematik: Aussagenlogik

1.8 Aussagenlogik

Die Logik ist die Lehre vom folgerichtigen Denken, d.h. vom richtigen Schließen aufgrund gegebener Aussagen. Ihr Ziel ist die Entwicklung eines einfachen Formalismus um (umgangssprachliche) Aussagensätze in eine der Mathematik zugängliche Form zu transformieren.

Das Instrumentarium der Aussagenlogik wird (auch) zur mathematischen Beweisführung benötigt. In den folgenden Folien werden die Grundbegriffe der binären (*zweiwertigen*) Aussagenlogik ausgeführt.

Der zentrale Begriff der mathematischen Aussagenlogik ist die Aussage:

Definition: Aussage

Eine Aussage (A) ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

1.8 Aussagenlogik

Es gilt also:

- Für eine Aussage sind also außer w und f keine weiteren Wahrheitswerte zugelassen: Prinzip des ausgeschlossenen Dritten.
- Eine Aussage erhält auch nicht gleichzeitig die Werte w und f : Prinzip des ausgeschlossenen Widerspruchs.

Alternative Bezeichnungen: Eine Aussage ist richtig / gilt / ist erfüllt.

Oder: eine Aussage ist nicht richtig / gilt nicht / ist nicht erfüllt.

Definition: Negation

\bar{A} (Negation der Aussage A) ist wahr, wenn A falsch ist, und \bar{A} ist falsch, wenn A wahr ist.

Alternative Notation: $\neg A$.

1.8 Aussagenlogik

Neben der Betrachtung von elementaren Aussagen können auch verknüpfte Aussagen betrachtet werden. Dabei sind Konjunktion und Disjunktion von Aussagen von Bedeutung.

Definition: Konjunktion

Die Konjunktion $A \wedge B$ ist wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist. $A \wedge B$ ist falsch, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen falsch ist (logisches UND).

Definition: Disjunktion

Die Disjunktion $A \vee B$ ist wahr, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen wahr ist. $A \vee B$ ist falsch, wenn beide Aussagen falsch sind. (Dies entspricht dem umgangssprachlichen: entweder A oder B oder beides; Inklusiv-Oder).

1.8 Aussagenlogik

In der mathematischen Logik spielen Schlussfolgerungen vom Wahrheitswert einer Aussage auf den einer anderen Aussage eine besonders wichtige Rolle.

Definition: Implikation

Die Implikation oder Folgerung $A \Rightarrow B$ ist falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Sonst ist $A \Rightarrow B$ wahr.

Die Aussage A heißt **Voraussetzung** oder **Prämisse**.

Die Aussage B heißt **Schlussfolgerung** oder **Konklusion**.

A ist hinreichende Bedingung für B , B ist notwendige Bedingung für A .

Definition: Äquivalenz

Gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, so heißen A und B *Äquivalent* ($A \Leftrightarrow B$).

1.8 Aussagenlogik

Definition: *deduktive* und *induktive* Schlussfolgerungen

Deduktive Schlussweisen beruhen auf konsistenten Regeln der Logik, wohingegen bei *induktiven* Schlussweisen auf Basis von einigen (oder auch vielen) Beobachtungen allgemeine Schlüsse gezogen werden.

Auf induktiven Schlussweisen basierende Aussagen können niemals als sicher angesehen werden und sind daher in der Mathematik als Beweismethode nicht anerkannt!

1.8 Aussagenlogik

Mathematische Induktion

Es sei $A(n)$ eine Aussage für alle natürlichen Zahlen n und es gelte:

- (a) $A(1)$ ist wahr.
- (b) Wenn die Induktionshypothese $A(k)$ wahr ist, dann ist auch $A(k + 1)$ wahr (für jede natürliche Zahl k).

Mit dieser Vorgehensweise ist durch *mathematische Induktion* gezeigt, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n wahr ist.