
Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaft

Vorkurs - Teil 2

Dr. Thomas Dimpfl

*Lehrstuhl für Statistik, Ökonometrie und Empirische
Wirtschaftsforschung*

Teil 2. Funktionen einer Variable

Gliederung

- 1 Grundlegende Definitionen
- 2 Darstellungsformen für Funktionen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Quadratische Funktionen
- 5 Polynome
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmusfunktionen
- 8 Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Motivation

Motivation

Funktionen reeller Veränderlicher gehören zu den wichtigsten Untersuchungs- und Darstellungsmitteln für die Beschreibung und die Veranschaulichung ökonomischer Sachverhalte und Zusammenhänge.

Eine der zentralen Aufgaben der Wirtschaftswissenschaften besteht darin, Beziehungen zwischen ökonomischen Variablen zu analysieren. Z.B. wird untersucht in welcher Weise:

- der Konsum vom (Volks-)Einkommen abhängt: *Konsumfunktion*;
- die Nachfrage vom Preis eines Gutes abhängt: *Nachfragefunktion*;
- die produzierte Menge eines Gutes von den eingesetzten Faktoren abhängt: *Produktionsfunktion*;
- der „Nutzen“ eines Haushalts von der Menge der konsumierten Güter abhängt: *Nutzenfunktion*.

Grundlegende Definitionen

2.1 Grundlegende Definitionen

Definition: Abbildung oder Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine Vorschrift f , die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet, heißt Abbildung oder Funktion der Menge X in die Menge Y . Wir schreiben:

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{oder elementweise} \quad x \in X \mapsto f(x) = y \in Y$$

Definition: Definitions- und Wertebereich

Die Menge aller Werte, die für x zugelassen werden, heißt **Definitionsbereich** $D(f)$ der Funktion. Die Menge der Werte, die $y = f(x)$ annimmt, heißt **Wertebereich** $W(f)$ der Funktion.

2.1 Grundlegende Definitionen

Definition: Monotonie

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f(x)$:

- streng monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Darstellungsformen für Funktionen

2.2 Darstellungsformen für Funktionen

Funktionen (einer Variable) können auf drei verschiedene Arten dargestellt werden:

Funktions- oder Wertetabelle:

zu ausgewählten Punkten des Definitionsbereichs werden die entsprechenden Funktionswerte in Form einer Tabelle angegeben.

Funktionsgleichung:

Gleichung der Form $y = f(x)$; dabei heißt y abhängige Variable, x unabhängige Variable oder Argument von f .

Graphische Darstellung:

Der Graph der Funktion wird in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

2.2 Darstellungsformen für Funktionen

§32a (1) EStG: Einkommensteuertarif

¹Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. ²Sie beträgt vorbehaltlich der §§32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7 834 Euro (Grundfreibetrag):
0;
2. von 7 835 Euro bis 13 139 Euro:
 $(939,68 \cdot y + 1\,400) \cdot y$;
3. von 13 140 Euro bis 52 551 Euro:
 $(228,74 \cdot z + 2\,397) \cdot z + 1\,007$;
4. von 52 552 Euro bis 250 400 Euro:
 $0,42 \cdot x - 8\,064$;
5. von 250 401 Euro an:
 $0,45 \cdot x - 15\,576$.

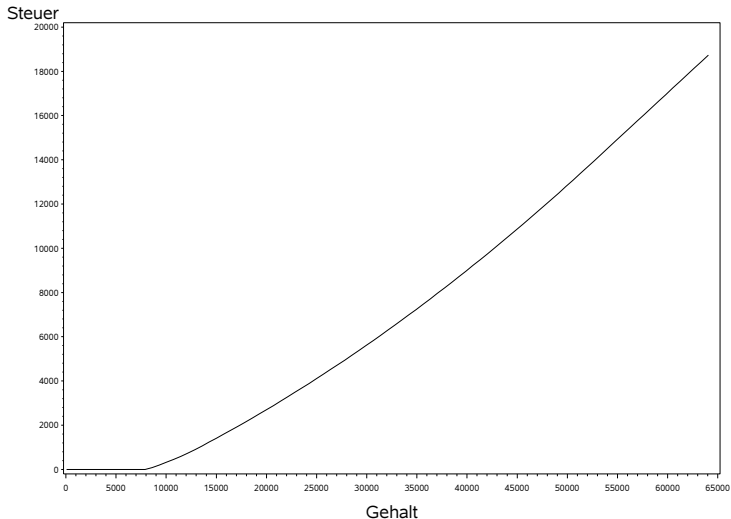
³„y“ ist ein Zehntausendstel des 7 834 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. ⁴„z“ ist ein Zehntausendstel des 13 139 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens.

⁵„x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. ⁶Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Quelle: www.gesetze-im-internet.de/estg/_32a.html

2.2 Darstellungsformen für Funktionen

EST-Funktion (Tarif 2011)



2.2 Darstellungsformen für Funktionen

- Tabellarische Zusammenfassungen eines funktionalen Zusammenhangs finden sich regelmäßig bei empirisch erhobenen Daten (Beispiel: Nachfragefunktion). Mittels ökonomischer Methoden wird dann aus den Datenpunkten ein funktionaler Zusammenhang geschätzt.
- In ökonomischen Anwendungen findet sich oft die Notation $y = y(x)$, d.h. das Symbol für den funktionalen Zusammenhang ist identisch mit dem Symbol für die abhängige Variable.
- Der Graph einer Funktion stellt sich in Mengenschreibweise wie folgt dar:

$$G_f = \{x, f(x) : x \in D(f) \wedge f(x) \in W(f)\}$$

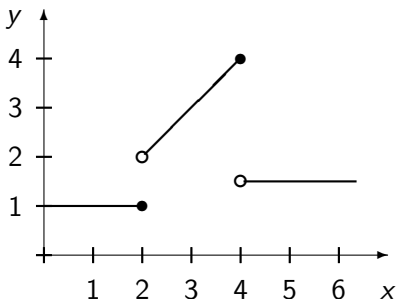
Funktionen lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren. Wir betrachten hier nur einige Funktionstypen, die für die wirtschaftswissenschaftliche Anwendung wichtig sind.

Exkurs: Abschnittsweise definierte Funktionen

Definition: abschnittsweise definierte Funktionen

Ist eine Funktion in mehreren disjunkten Teilabschnitten definiert, sodass eine separate Formel für jeden dieser Abschnitte des Definitionsbereiches gegeben ist, so nennt man sie *abschnittsweise definiert*.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{für } 2 < x \leq 4 \\ 1.5 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$



Lineare Funktionen

2.3 Lineare Funktionen

Lineare Funktionen stellen den am häufigsten verwendeten Typ von Funktionen in den Wirtschaftswissenschaften.

Die allgemeine Form einer linearen Funktion ist $y = ax + b$, wobei a der Parameter ist, der die Steigung der Funktion angibt, und b der sogenannten Achsenabschnitt.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Um die Steigung einer Geraden in der Ebene zu bestimmen werden zwei Punkte auf der Geraden ausgewählt und die Differenz der jeweiligen Ordinatenwerte zur Differenz der entsprechenden Abszissenwerte miteinander in Beziehung gesetzt. Die Steigung a der Geraden, welche durch die Punkte $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ verläuft, beträgt folglich

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2.3 Lineare Funktionen

Wir betrachten ein sogenanntes lineares Gleichungssystem, welches aus zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten besteht:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

wobei a , b , c , d , e und f gegeben sind. Die Lösung dieses Gleichungssystems kann graphisch veranschaulicht werden, indem man die Lösungsmenge der beiden Gleichungen jeweils in einer Geraden darstellt. Die Lösungsmenge hängt von dem Verhältnis der Geraden ab:

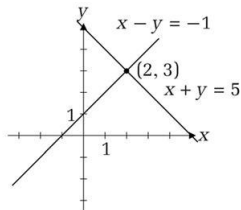
- schneiden sich die beiden Geraden, so stellt der Schnittpunkt die Lösung des Gleichungssystems dar;
- verlaufen die Geraden parallel, so existiert keine Lösung des Systems;
- sind die beiden Geraden deckungsgleich, so existieren unendlich viele Lösungen.

2.3 Lineare Funktionen

1. **Fall:** Eindeutige Lösung 2. **Fall:** Keine Lösung 3. **Fall:** ∞ -viele Lösungen

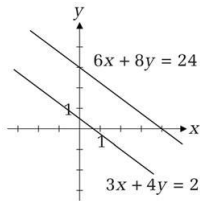
$$x + y = 5$$

$$x - y = -1$$



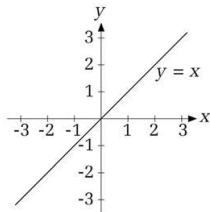
$$3x + 4y = 2$$

$$6x + 8y = 24$$



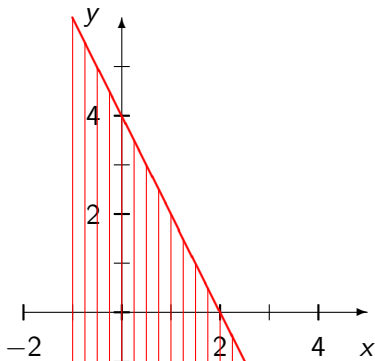
$$x - y = 0$$

$$2x - 2y = 0$$



2.3 Lineare Funktionen

Neben den oben angeführten linearen Gleichungen können auch *Ungleichungen* (vgl. Abschnitt 1.5) graphisch veranschaulicht werden. So lässt sich bspw. die Menge aller Zahlenpaare (x, y) , die die Ungleichung $y \leq -2x + 4$ erfüllen, wie folgt darstellen:



2.3 Lineare Funktionen

Ökonomische Beispiele für lineare Zusammenhänge:

- **Lineare gesamtwirtschaftliche Konsumfunktion:** $C = a + bY$, mit $C =$ gesamtwirt. Konsum; $Y =$ Volkseinkommen. Der Parameter $b \in [0; 1]$ wird als Grenzneigung zum Konsum (*marginal propensity to consume*) bezeichnet. Er gibt an, um wieviele Einheiten der Konsum in der betrachteten Wirtschaft steigt, wenn das Einkommen um eine Einheit zunimmt.
- **Markt für ein Gut:** Modellannahmen: Lineare Nachfragefunktion (*demand*) $D = a - bP$ und lineare Angebotsfunktion (*supply*) $S = \alpha + \beta P$. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt den Gleichgewichtspreis P^* und die Gleichgewichtsmenge Q^* .

Quadratische Funktionen

2.4 Quadratische Funktionen

Ist es sinnvoll, dass in ökonomischen Modellen eine Variable bis auf ein Minimum fällt und dann wieder ansteigt oder auf einen Maximalwert ansteigt, um dann zu fallen, so bietet sich die Verwendung von quadratischen Funktionen an.

allgemeine Form einer quadratischen Funktion: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
wobei a, b und c die Parameter der Funktion sind und $a \neq 0$ angenommen wird.

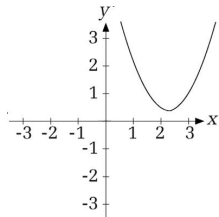
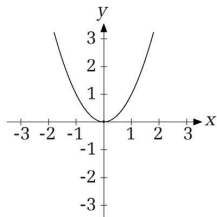
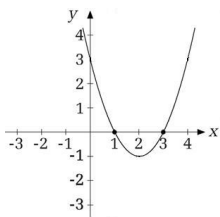
Der Graph einer quadratischen Funktion ist entweder eine nach oben ($a > 0$) oder nach unten ($a < 0$) geöffnete Parabel.

Interessante Punkte einer Parabel sind:

- a) die Schnittpunkte mit der Abszisse, die man durch die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ ermitteln kann und
- b) die Lage des Scheitelpunktes, die man oft mithilfe der ersten Ableitung der Funktion und durch die Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ ermittelt.

2.4 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktion kann zwei, einen oder keinen Schnittpunkt mit der Abszisse aufweisen:



Einige ökonomische Modelle führen zu quadratischen Funktionen, für die dann die Lage des Extrempunktes bestimmt werden soll.

Beispielsweise ist das für die Gewinnfunktion im Monopol der Fall (Gewinn ist dabei definiert als Umsatz minus Kosten). Wir betrachten solche Beispiele später in der Vorlesung mit den Methoden der Differentialrechnung.

Polynome

2.5 Polynome

Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer allgemeinen Polynomfunktion des Typs

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 ,$$

dabei sind die $a_i, i = 1, \dots, n$ Konstante oder Parameter des Polynoms.

Der **Grad des Polynoms** wird durch die höchste vorkommende Potenz $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Ist $n = 3$, so spricht man von einer kubischen Funktion:

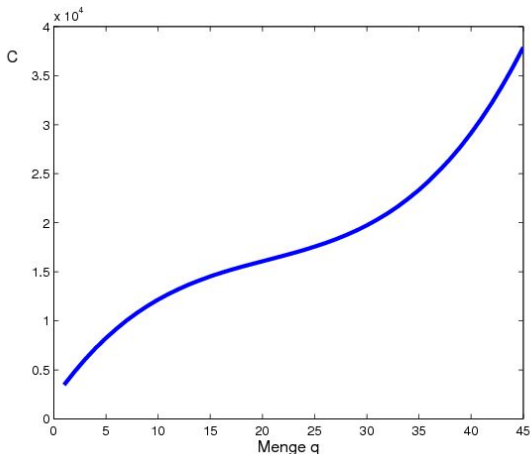
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Der Graph einer kubischen Funktion kann je nach Wahl von a, b, c und d stark variieren.

2.5 Polynome

Beispiel für den Verlauf einer kubischen Kostenfunktion mit:

$$C = q^3 - 61q^2 + 1500q + 2000$$



2.5 Polynome

Die kubische Kostenfunktion stellt eine typische Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften dar. Für Polynome mit Grad n gilt, dass sie höchstens n Nullstellen im Bereich der reellen Zahlen bzw. genau n Nullstellen im Bereich der komplexen Zahlen besitzen. Bezeichnet man die Lösungen mit $x_i, i = 1, \dots, n$, dann gilt:

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

Diese Darstellung des Polynoms bezeichnet man als **Faktorzerlegung**.

Beachte: ein und dieselbe Lösung kann mehrfach auftreten; falls nur reelle Koeffizienten dargestellt werden sollen, so gilt eine modifizierte Darstellung (*siehe dazu das Beispiel in Sydsæter/Hammond (2.A.), S. 145ff; (3.A.), S.140ff*).

2.5 Polynome

Die Ermittlung der Nullstellen/Lösungen/Wurzeln/*roots* eines Polynoms ist in der Regel keine einfache Aufgabe. Sie gelingt nur für kleine n analytisch und dann auch nicht immer in geschlossener Form. Regelmäßig müssen numerische Verfahren zur Nullstellenbestimmung verwendet werden!

Die Darstellung des Polynoms durch Faktorzerlegung kann auch dazu benutzt werden, um den Grad des Polynoms um eins zu reduzieren. Kann beispielsweise eine Lösung x_1 „erraten“ werden, so gilt:

$$P(x)/(x - x_1) = (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Liegt das Polynom nicht in Faktorschreibweise vor, so kann der Grad des Polynoms durch **Polynom-Division** analog reduziert werden. Hierbei wird das Polynom in fast genau der gleichen Weise wie eine Zahl dividiert.

2.5 Polynome

Beispiel zur Polynom-Division:

$$\begin{array}{r} (-x^3 + 4x^2 - x - 6) \div (x - 2) = -x^2 + 2x + 3 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \longleftarrow \boxed{-x^2(x - 2)} \\ 2x^2 - x \\ \underline{2x^2 - 4x} \longleftarrow \boxed{2x(x - 2)} \\ 3x - 6 \\ \underline{3x - 6} \longleftarrow \boxed{3(x - 2)} \\ 0 \end{array}$$

Somit ist $(-x^3 + 4x^2 - x - 6) \div (x - 2) = -x^2 + 2x + 3$.

Da jedoch auch $-x^2 + 2x + 3 = -(x + 1)(x - 3)$, ergibt sich:

$$-x^3 + 4x^2 - x - 6 = -(x + 1)(x - 3)(x - 2)$$

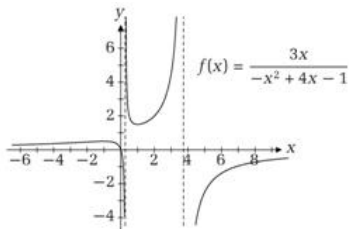
2.5 Polynome

Die bisher betrachteten Polynomfunktionen werden auch als ganze rationale Funktionen bezeichnet. Setzt man zwei Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ zueinander ins Verhältnis, so erhält man **gebroschen rationale Funktionen** der Form

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Charakteristisch für den Graphen einer gebroschen rationalen Funktion ist das Auftreten von Polstellen und/oder Asymptoten.

Als Beispiel wird hier die Funktion $f(x) = \frac{3x}{-x^2 + 4x - 1}$ dargestellt:



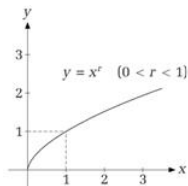
2.5 Polynome

Die allgemeine Form einer Potenzfunktion lautet dabei: $f(x) = Ax^r$ wobei $x \geq 0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit gesetzt wird und A und r beliebige Konstante sind.

Die Form des Graphen einer Potenzfunktion hängt entscheidend von r ab:

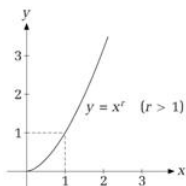
Wurzelfunktion

$$0 < r < 1$$



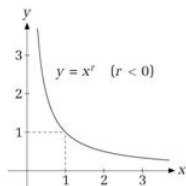
Parabel

$$r > 1$$



Hyperbel

$$r < 0$$



Exponentialfunktionen

2.6 Exponentialfunktionen

Wachstums- bzw. Schrumpfungsprozesse spielen in der Ökonomie eine wichtige Rolle. Zur Modellierung oder Beschreibung solcher Phänomene verwendet man regelmäßig Exponentialfunktionen.

Die allgemeine Form einer Exponentialfunktion lautet $f(x) = A a^x$ wobei A und $a > 0$ die Parameter der Funktion sind.

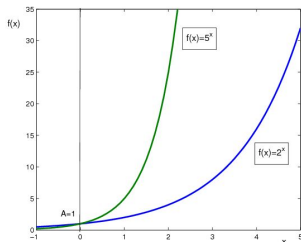
Anmerkungen:

- Besonders anschaulich wird die Interpretation von Wachstumsprozessen, wenn als unabhängige Variable die Zeit mit dem Symbol t verwendet wird.
- Beachten Sie den Unterschied zwischen der Potenzfunktion $f(x) = x^a$ einerseits und der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ andererseits!
- Bei der Exponentialfunktion steckt die unabhängige Variable im Exponenten.

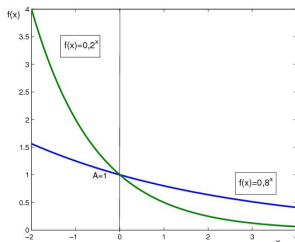
2.6 Exponentialfunktionen

Verläufe der Exponentialfunktion bei variierender Basis a :

$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$



Machen Sie sich klar, wie sich die obigen Graphen mit variierendem a verändern.

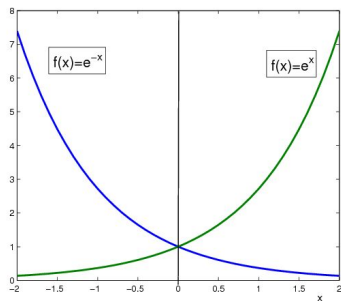
Beispiel: Wachstum einer Bakterienkultur.

2.6 Exponentialfunktionen

Einen wichtigen Spezialfall stellt die **natürliche Exponentialfunktion** mit der Basis $e = 2,718\dots$, der Euler'schen Zahl, dar.

Als Schreibweise für diese Funktion findet man entweder $f(x) = e^x$ oder $f(x) = \exp(x)$.

Die natürliche Exponentialfunktion verläuft entweder monoton steigend oder monoton fallend:



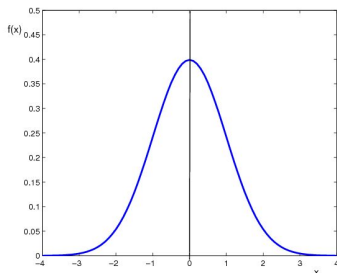
2.6 Exponentialfunktionen

In der Statistik spielt die natürliche Exponentialfunktion eine zentrale Rolle als Dichtefunktion der Normalverteilung.

Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ergibt sich zu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Der Graph der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist die bekannte Gaußsche Glockenkurve:



Logarithmusfunktionen

2.7 Logarithmusfunktionen

Das Logarithmieren stellt neben dem Wurzelziehen eine zweite Umkehrung des Potenzierens dar. Während beim Wurzelziehen die Basis der Potenz ermittelt wird, wird beim Logarithmieren der Exponent der Potenz ermittelt

Logarithmus

Die Zahl x mit $b^x = a$ heißt Logarithmus von a zur Basis b und wird mit $\log_b(a)$ bezeichnet.

Die allgemeine Form einer Logarithmusfunktion lautet $f(x) = \log_a x$ wobei $a > 0$ und $a \neq 1$ die Basis der Funktion ist.

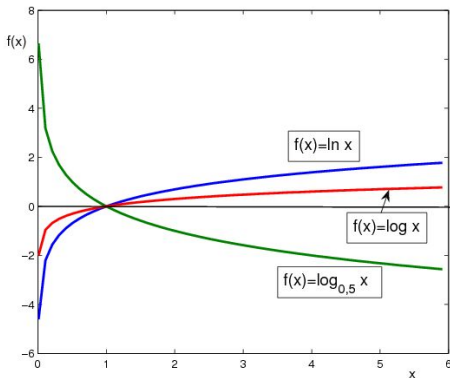
Besondere Bedeutung als Basen haben die Werte

- $a = 10$ (dekadischer Logarithmus; (*common logarithm*); Schreibweise $\log x$) und
- $a = e$ (*natürlicher Logarithmus*; (*natural logarithm*); Schreibweise $\ln x$)

erlangt.

2.7 Logarithmusfunktionen

Die Logarithmusfunktion verläuft entweder monoton steigend (für Basen $a > 1$) oder monoton fallend (für Basen $0 < a < 1$):



Weiterhin gilt: je größer die Basis, umso flacher verläuft die Logarithmusfunktion.

2.7 Logarithmusfunktionen

Was bedeutet eigentlich (nochmal) Logarithmus?

→ Das Wort Logarithmus bedeutet dasselbe wie Exponent oder Hochzahl.

Ausgangspunkt für das Verständnis des Logarithmus ist die Äquivalenz der Exponentialgleichung $x = a^y$ mit $y = \log_a x$, dem Logarithmus von x zur Basis a .

D.h., y ist der Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um x zu erhalten. Für jede beliebige Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und die stets positiven Potenzwerte x und y gelten die Logarithmusgesetze.

Logarithmusgesetze

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x \quad (r \in \mathbb{R})$$

2.7 Logarithmusfunktionen

Aus den Rechenregeln ergeben sich unmittelbar zwei wichtige Sonderfälle:

- $\log_a(1/x) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$
- $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \log_a(x^{1/n}) = \frac{1}{n} \log_a x$

Beachte: Es gibt **keine** Umformungen für $\log(x + y)$ bzw. $\log(x - y)$.

Allgemein gilt: $\log_a a^x = x$ und $a^{\log_a x} = x$.

Speziell für den dekadischen bzw. den natürlichen Logarithmus gilt entsprechend:

- $\log 10^x = x$ und $10^{\log x} = x$
- $\ln e^x = x$ und $e^{\ln x} = x$.

Es gilt: $\ln 1 = 0$ und $\log 1 = 0$.

2.7 Logarithmusfunktionen

In Taschenrechnern und auch in Mathematik-Softwarepaketen sind ausschließlich der dekadische und der natürliche Logarithmus enthalten.

Ausgangspunkt für die so genannte Basisumrechnung ist wieder die Exponentialgleichung $a^y = x$.

Bilden wir auf beiden Seiten \log_b und formen wir äquivalent um, so erhalten wir:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x ,$$

d.h. der Logarithmus von x zur Basis a ist proportional zum Logarithmus von x zur Basis b ! Sinnvollerweise wählen wir als Basis b entweder 10 oder e und erhalten

Formeln zur Basisumrechnung

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a} .$$

2.7 Logarithmusfunktionen

Das Verdoppelungsproblem:

Der Logarithmus erweist sich als sehr nützlich zur Beantwortung von Fragen der Art „*Wie lange dauert es, bis sich ein Bestand, der mit einer konstanten Rate wächst, verdoppelt, verdreifacht,... hat?*“.

Das soll hier anhand eines Beispiels aus der Finanzmathematik dargestellt werden.

Betrachtet wird ein (Spar-)Konto mit dem Anlagebetrag K_0 ; vereinbart sind Zinses in Höhe von $p\%$ und die Wiederanlage des Zinsbetrags. Wie lange dauert es, bis sich das Geld auf dem Konto alleine durch die Zinszahlungen verdoppelt hat?

Ausgangspunkt: $K_t = K_0 \cdot q^t$; daraus ergibt sich durch geeignete Umformung unter Ausnutzung der Information, dass $K_t = 2 \cdot K_0$:

$$t = \frac{\ln 2}{\ln q} .$$

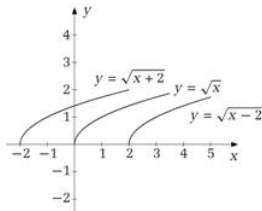
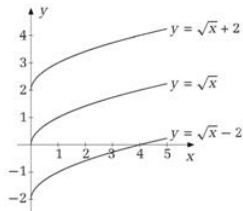
Verkettete, inverse und implizite Funktionen

2.8 Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Die „Verschiebung“ von Graphen einer Funktion und die Analyse deren Auswirkungen gehören zum Standardinstrumentarium vieler ökonomischer Untersuchungen. Es ist deshalb wichtig, dass Sie wissen, wie beispielsweise eine „Rechtsverschiebung“ zustandekommen kann.

Wir betrachten die folgenden beiden wichtigen Fälle (für $c > 0$):

- $y = f(x) + c \rightarrow$ Verschiebung entlang der Ordinate;
- $y = f(x + c) \rightarrow$ Verschiebung entlang der Abszisse;



2.8 Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Bei reellen Funktionen können die Rechenoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Funktionen durchgeführt werden. Beispiele hierzu finden sich z.B. in Sydæter / Hammond (2.A., 3.A.) Kapitel 5.2.

Von besonderer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang die Operation der **Verkettung** von Funktionen, die wir hier näher betrachten wollen.

Hat man eine so genannte **Äußere Funktion** $z = f(y)$ und eine so genannte **innere Funktion** $y = g(x)$ so erhält man daraus eine **zusammengesetzte / mittelbare / verkettete Funktion** wie folgt:

$$z = f(g(x)) = f \circ g(x) \quad \text{wobei } x \in D(g).$$

Voraussetzung für die Zusammensetzung: Der Wertebereich der inneren Funktion g muss eine Teilmenge des Definitionsbereichs der Äußeren Funktion f sein, d.h. es muss gelten: $W(g) \subset D(f)$.

2.8 Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Eine wichtige Anwendung des Konzepts der mittelbaren Funktionen stellen die monotonen Transformationen von Funktionen dar.

Definition: monotone Transformation

Sei $I \subset \mathbb{R}$, g eine reellwertige Funktion und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Dann stellt die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

eine (positive) monotone Transformation von $g(x)$ dar.

Beispiele für monotone Transformationen:

- Addition einer beliebigen Konstante;
- Multiplikation mit einer positiven Zahl;
- Potenzieren mit einer ungeraden Zahl;
- Logarithmieren;
- Exponentialfunktion bilden.

2.8 Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Definition: Symmetrie

Es lassen sich im Allgemeinen folgende drei Arten von Symmetrie unterscheiden.

Wenn für alle x im Definitionsbereich von f gilt:

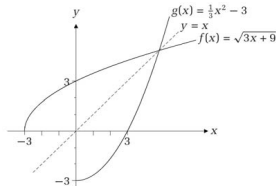
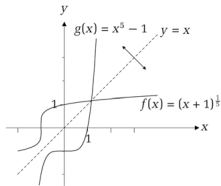
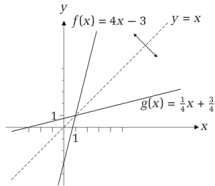
- (1) $f(-x) = f(x)$, dann heißt f eine *gerade* Funktion, f ist *symmetrisch zur y-Achse*.
- (2) $f(-x) = -f(x)$, dann heißt f eine *ungerade* Funktion, f ist *symmetrisch zum Ursprung*.
- (3) $f(a+x) = f(a-x)$, dann heißt f *symmetrisch zur Geraden*
 $x = a$

2.8 Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Definition: Umkehrfunktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit $x \in D(f)$; $y \in W(f)$ heißt eineindeutig, wenn es zu jedem y genau einen Wert x gibt. Zur eineindeutigen Funktion $y = f(x)$ existiert eine **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Es gilt $D(f^{-1}) = W(f)$ und $W(f^{-1}) = D(f)$.

Die Graphen einer Funktion und ihrer Inversen sind symmetrisch zur Geraden $x = y$.



Satz: Sei f eine streng monotone Funktion in $D(f)$. Dann existiert zu f die Umkehrfunktion f^{-1} mit $D(f^{-1}) = W(f)$. Die Umkehrung gilt nicht.

2.8 Verkettete, Inverse und Implizite Funktionen

Bisher haben wir ausschließlich Funktionen betrachtet, in der die abhängige Variable y explizit als Funktion der unabhängigen Variablen x in der Form $y = f(x)$ dargestellt war. In ökonomischen Anwendungen treten aber regelmäßig Situationen auf, in denen eine Funktion durch eine Gleichung der Form

$$F(x, y) = c$$

definiert ist. Solche Funktionen nennt man **implizit definierte Funktion**.

Beachte: Explizit definierte Funktionen können stets in eine implizite Form gebracht werden, umgekehrt ist dies nicht immer möglich. Wichtige Beispiele für implizit definierte Funktionen (Graphen von Gleichungen) sind Kreis- und Ellipsengleichungen. Bei einem Mittelpunkt (x_0, y_0) gilt für diese:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(x - x_0)^2}{a} + \frac{(y - y_0)^2}{b} = 1$$