Übungsblatt 8: Zeitreihen II

Aufgabe 1:

(a) Schwache Stationarität impliziert generell nicht strenge Stationarität. Warum?

(b) Es gibt aber eine Ausnahme. Welche ist das?

(c) Strenge Stationarität impliziert generell schwache Stationarität. Warum?

(d) Es gibt aber eine Ausnahme. Welche ist das?

(e) Stationäre Prozesse sind mittelwertergodisch, wenn

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| < \infty \,.$$

In welchem Fall reicht diese Bedingung aus, um die Ergodizität für alle Momente des stationären Prozesses sicherzustellen.

(f) Welcher Fall eines stochastischen Prozesses ist dann am ehesten mit dem u.i.v. Fall vergleichbar?

Aufgabe 2:

(a) Wodurch unterscheidet sich die Annahme der (strengen) Stationarität von der u.i.v. Annahme? Was haben beide gemeinsam?

(b) Wie schreiben wir die Autokorrelationsfunktion ρ_j für einen stationären Prozess?

(c) Welche Transformation ist notwendig um einen differenzenstationären Prozess in einen stationären Prozess zu überführen?

(d) Schreiben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion für $y_1, \ldots, y_T$ für einen unkorrelierten Gauss'schen Prozess.

(e) Schreiben Sie eine alternative Repräsentation der Ausdrücke

$$a\mathrm{L}y_t,\ a\Delta y_t,\ (1-\phi_1\mathrm{L}+\phi_2\mathrm{L}^2)y_t \text{ und } (1-\lambda_1\mathrm{L})(1-\lambda_2\mathrm{L})y_t \,.$$

Aufgabe 3:

(a) Finden Sie die Nullstellen und faktorisieren Sie das Lag-Polynom

$$(1 - \frac{5}{6}\mathrm{L} + \frac{1}{6}\mathrm{L}^2)y_t\ .$$

(b) Ist ein White-Noise-Prozess stationär und ergodisch?

(c) Ist ein Gauss'scher MA(1) Prozess $y_t = \mu + \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ stationär und ergodisch? Berechnen Sie $E[y_t]$, $Var[y_t]$ und $Cov[y_t, y_{t-j}]$ für $j = 1, 2, \dots$.

Aufgabe 4:

(a) Soll eine Prognose $\hat{y}_{t+1|t}$ für y_{t+1} den $MQF = E\left[(\hat{y}_{t+1|t} - y_{t+1})^2\right]$ minimieren, so liefert $\hat{y}_{t+1|t} = E[y_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \dots]$ die beste Prognose. Angenommen, $\{y_t\}$ ist ein Martingal-Prozess bzw. ein Martingal-Differenzen-Prozess, wie lautet die beste Prognose für y_{t+1} für die beiden genannten Prozesse?

(b) Ist ein Random Walk $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ ein Martingal?

(c) Ist ein White-Noise-Prozess ein Martingal-Differenzen-Prozess?

Aufgabe 5:

(a) Berechnen Sie die Kovarianzen γ_0 und $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ für einen MA(1) $y_t = \mu + \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ mit einem White-Noise $\{\varepsilon_t\}$.

(b) Warum sagen wir, ein MA(q) mit $q < \infty$ hat ein Gedächtnis von q Perioden?

(c) Jeder MA-Prozess ist stationär. Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage.

(d) Welche Eigenschaft muss die Koeffizientenfolge $\{\psi_j\}$ eines MA(∞)

$$y_t = c + \psi_0\varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

haben, damit der Prozess schwach stationär ist?

Aufgabe 6:

Gegeben ist der Prozess

$$y_t = 2 + 0,8y_{t-1} + \varepsilon_t$$

mit einem White-Noise $\{\varepsilon_t\}$ und $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$.

(a) Schreiben Sie den Prozess als MA(∞).

(b) Berechnen Sie $E[y_t]$ für den Prozess.

(c) Ist der Prozess stationär?

(d) Für jeden AR(1) gilt $\rho_j = \phi^j$. Zeichnen Sie die Autokorrelationsfunktion für $\phi = 0,8$, $\phi = -0,8$, $\phi = 0,2$ und $\phi = -0,2$.