Übungsblatt 9: Zeitreihen III

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass ein stationärer AR(1)

$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \;$ mit $|\phi| < 1$

für den gilt $E(y_t) = \frac{c}{1-\phi} = \mu$

geschrieben werden kann als

$\Delta y_t = \rho(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ mit $\rho = \phi - 1$ (Fehlerkorrekturdarstellung)

Aufgabe 2:

Gegeben ist ein AR(2) Prozess: $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ mit White Noise Prozess $\{\varepsilon_t\}$

(a) Schreiben Sie den AR(2) Prozess unter der Verwendung des Lag Operators.

Die Nullstellen des Polynoms $(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2)$ seien z_1 und z_2 (reelle Zahlen) wobei $|z_1| > 1$ und $|z_2| > 1$.

(b) Faktorisieren Sie das Lag-Polynom $(1 - \phi_1 \mathrm{L} - \phi_2 \mathrm{L}^2)$ unter der Verwendung von z_1 und z_2.

(c) Schreiben sie mit zwei wiederholten "AR(1)-Rekursionen" den AR(2) als MA(∞), d.h.,

$y_t = \tilde{c} + \psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \psi_3 \varepsilon_{t-3} + \cdots$

Bestimmen Sie $\tilde{c}$, ψ_0, ψ_1, ψ_2, und ψ_3.

(d) Bestimmen Sie $E(y_t)$ als Funktion von z_1 und z_2 und ϕ_1 und ϕ_2.

Hinweis: Für $|z_1| > 1$ und $|z_2| > 1$ ist $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

(e) Nehmen Sie nun an, dass $|z_1| > 1$ und $z_2 = 1$. Schreiben Sie den AR(2) in ersten Differenzen $\{\Delta y_t\}$.

Aufgabe 3:

(a) Nennen Sie Gründe, warum Standardresultate aus der mathematischen Statistik für Unit Root Prozesse nicht anwendbar sind.

(b) Was bedeutet es, wenn zwei stochastische Prozesse $\{y_t\}$ und $\{x_t\}$ kointegriert sind?

(c) Nennen Sie die wesentlichen Eigenschaften eines Unit Root Prozesses.