Aufgaben zu „Inversen Matrizen“

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad , \quad AX = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad AY = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Lösungen $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ von

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{=M} \quad , \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{=B} Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}}_{=N},$$

also $A^{-1}M$ und $B^{-1}N$.

Bestimmen Sie A^2, $\det(A)$ und A^{-1} sowie die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ von $AX = B$ sowie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ von $C\vec{x} = \vec{d}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 10 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Denkt euch irgendwelche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n = 3, 4$, aus und versucht sie zu invertieren! Überprüft dabei zunächst, ob eine Inverse existiert (wie macht man das?). Überlegt euch anschließend beliebige Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m = 1, \dots, 4$, und löst die Gleichung $AX = B$, d.h. berechnet $X = A^{-1}B$.

Aufgaben zu „Determinanten“

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$$

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 3 & 2 & \alpha & -4 \\ 4 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 1 & \alpha - 2 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzen die *ersten beiden* Matrizen jeweils eine Inverse? Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ wird der Wert der Determinante der *dritten* Matrix minimal?

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -14 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ -14 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -14 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, warum die Inverse A^{-1} existiert und berechnen Sie diese.
Bestimmen Sie ohne explizite Rechnung $\det(B)$ und $\det(C)$ und begründen Sie Ihre Lösung.
Geben Sie $\det(A^{-1})$ ohne explizite Rechnung an.

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

linear abhängig?