Induktion und Sonstiges

1 Induktion

1.1 mit Summen

„Kochrezept zu Summen“ (übernommen von Melanie Oelker)

Induktionsanfang

1. Geeigneten Induktionsanfang wählen (bei den Summen-Aufgaben ist das oft z.B. die untere Grenze der Summe, bzw. steht in der Aufgabe).
2. Einsetzen des gewählten Wertes für den Induktionsanfang in die rechte und die linke Seite der Induktionsbehauptung und prüfen, ob man auf beiden Seiten denselben Wert erhält.

Induktionsschritt

1. Term auf der linken Seite der Gleichung für $(n+1)$ aufstellen ($(n+1)$ für n einsetzen)
2. Aufteilen des Terms in einen Teil, der der Induktionsvoraussetzung entspricht, und den Teil für $(n+1)$.
   bei den Summen-Aufgaben erreicht man dies, indem man den $(n+1)$-ten Term aus der Summe mit + rauszieht.
3. Induktionsvoraussetzung für den Teil des Ausdrucks bis n einsetzten (nicht vergessen! Hier muss gekennzeichnet werden, dass die Induktionsvoraussetzung verwendet wird)
4. An dieser Stelle kann es hilfreich sein $(n+1)$ in die rechte Seite der Induktionsvoraussetzung einzusetzen, so kann man sehen was nach der Umformung des Terms rauskommen soll (dieser Schritt ist aber nur eine Hilfestellung und nicht Bestandteil der vollständigen Induktion)
5. Umformen des Terms, so dass man Behauptung mit $(n+1)$ anstatt n erhält (der Term muss also so aussehen, wie der Term aus Schritt 4)
6. Erhält man in Schritt 5 den richtigen Term hat man bewiesen, dass die Behauptung richtig ist und man kann q.e.d. oder drunter schreiben und sich freuen ;)

1.2 mit Folgen

Kochrezept größten Teils analog zu oben, jedoch im Induktionsschritt 2. bekommt man die Aufteilung des Terms in einen Teil, der der Induktionsvoraussetzung entspricht,einem weiteren, indem man meistens die Rekursionsvorschrift verwendet um a_n zu erhalten.

1.3 mit Matrizen/Produkten

Kochrezept größten Teils analog zu oben, jedoch im Induktionsschritt 2. bekommt man die Aufteilung des Terms in einen Teil, der der Induktionsvoraussetzung entspricht, und einem weiteren, indem man A^{n+1} in $A^n \cdot A$ aufteilt, bzw. das $(n+1)$-te Gleid mit $\cdot$ abspaltet.

Sonstiges

1. Gruppen, Skalarprodukt, Vektorraum, ...
2. Ableiten (sollte aus der Schule weitesgehend bekannt sein)
3. Ebenen umrechnen, vergleichen Abstand zum Ursprung (sollte aus der Schule weitesgehend bekannt sein)
4. Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren
5. ...

Aufgaben zu Induktion und Sonstiges

1.4 Induktion

1.4.1 Summen

1. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}\, n\,(4n^2-1)$
4. Die Summe der ersten n positiven geraden Zahlen ist gleich $n(n+1)$.
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
6. $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2^i} = 1 - \dfrac{1}{2^n} \quad n \in \mathbb{N}.$
7. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ ist.
8. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
9. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (n+k)\cdot(n-k) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6}$
10. Die Summe der ersten n positven ungeraden Zahlen ist gleich n^2 .
11. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
12. $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} m+k \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} m+n+1 \\ n \end{array} \right)$
13. Schreibe $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2$ als Polynom in n.
14. $\sum\limits_{\ell=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n+k-\ell \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+k \\ k+1 \end{array} \right)$

1.4.2 Folgen

1. Sei $a_1 = 1$ sowie $a_{n+1} = 2a_n + 1$ für $n \geq 1$. Zeige $a_n = 2^n - 1$.
2. Sei $a_0 = 5$ sowie $a_{n+1} = 3a_n + 2$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie $a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

3. a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ist definiert durch $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:

   a) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{2k+1} = a_{2n+2}$

   b) $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} + (-1)^n$.

4. Sei $a_1 = 2$ sowie $a_{n+1} = 3a_n + 2$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie $a_n = 3^n - 1$

5. die Folgenelemente x_n seien definiert durch $x_0 := 0$, $x_1 := 3$ und $x_n := \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$ für $n \geq 2$. Geben Sie x_2, x_3, x_4 an und beweisen Sie, dass gilt $x_n = 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

6. a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ist definiert durch $a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$. Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:

   a) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a_{n+2} - 1 \quad \forall n \geq 1$

   b) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall n \geq 2$.

7. Sei $a_0 = 5$ sowie $a_{n+1} = 2a_n - 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie $a_n = 2^{n+2} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

1.4.3 Matrizen

1. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit vollständige Induktion $A^n = \begin{pmatrix} 1-3n & 9n \\ -n & 1+3n \end{pmatrix}$, wobei $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Sei $a_0 = 0, a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \forall n \geq 2$. Sei weiter $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie $A^n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$

3. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

4. Berechnen Sie A^2 sowie A^3 und leiten Sie mit Hilfe vollständiger Induktion eine Formel für A^n, $n \in \mathbb{N}$, her mit $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A^n == \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.4 Produkte

1. Beweise, dass für $n \geq 2$ gilt: $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)$

2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: $\prod\limits_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

1.5 Sonstiges

1.5.1 Ableiten

1. $f(x) = 7^x$
2. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$
3. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$
4. $g(x) = \sin(\arccos(x))$
5. $f(x) = x^{2x}$
6. $g(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$
7. Wir definieren $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$
   a) Bestimmen Sie $H_0,\ H_1,\ H_2$.
   b) Drücken Sie $H_n'(x)$ in der Form $f(x)H_n(x) + g(x)H_{n+1}(x)$ mit geigneten Funktionen f und g aus.

1.5.2 Ebenen

1. Sind die beiden Ebenen deckungsgleich?
   $$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$
   $$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$
2. Beschreiben die beiden folgenden Mengen die gleichen Ebenen?Begründen Sie Ihre Antwort.
   $$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$
   $$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$
3. a) Geben Sie die Parameter, sowie die Hessesche Normalform der Ebene
   $E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | -2x_1 - 6x_2 + x_3 = 3\}$
   an und berechnen Sie den Abstand zum Ursprung.
   b) die Ebene E_2 ist definiert durch
   $$E_2 \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$
   Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene an und berechnen Sie die Schnittmenge von E_2 mit E_1.

1.5.3 Gruppen

1. Zeigen Sie: $(M, \cdot)$ mit $M = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | \det A = 1\}$ und dem Matrixprodukt $\cdot$ ist eine nicht-abelsche Gruppe, d.h. zeigen Sie:

   - $A, B \in M \Rightarrow A \cdot B \in M$
   - M enthält ein neutrales Element
   - $A \in M \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$
   - Es gibt $A, B \in O(n)$ mit $A \cdot B = B \cdot A$

2. Zeigen Sie: $(O(n), \cdot$ mit $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T A = I\}$ und dem Matrixprodukt $\cdot$ ist eine Gruppe, d.h.

   - $A, B \in O(n) \Rightarrow A \cdot B \in M$
   - $O(n)$ enthält ein neutrales Element
   - $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$