# Lineare Algebra

## 1 Inverse Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man nennt $A^{-1}$ die zu A *inverse Matrix*, falls gilt:

$$A^{-1}A = I \qquad \text{und} \qquad AA^{-1} = I \; .$$

Nicht alle $n \times n$-Matrizen sind invertierbar (Bedingung dafür: siehe unten). Wenn sie es aber sind, so ist die Inverse eindeutig bestimmt.

Hat man ein quadratisches LGS

$$A\vec{x} = \vec{b} \; ,$$

also $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, und ist $A$ invertierbar, so hat dieses LGS eine *eindeutige* Lösung, nämlich

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \; .$$

Hierbei können $\vec{x}$ und $\vec{b}$ auch durch entsprechende Matrizen (für die dann die Matrixmultiplikation) definiert ist, ersetzt werden, also $\vec{x} \to X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\vec{b} \to B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

**Berechnung von $A^{-1}$:**
Man schreibt sich die Matrix $A$ und die Identitätsmatrix $I$ nebeneinander,

$$(\; A \mid I \;) \; ,$$

und versucht dann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus', das heißt

1. Zeilen vertauschen
2. Zeile mit einem Faktor *ungleich Null* multiplizieren
3. Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren,

die Matrix $A$ auf der linken Seite in die Identitätsmatrix umzuwandeln (geht immer bei invertierbaren Matrizen). Führt man die gleichen Umformungen auch für die rechte Seite an $I$ durch, so ist das Resultat die gewünschte inverse Matrix $A^{-1}$:

$$(I \mid A^{-1} \;) \; .$$

<u>BEISPIEL 1:</u>

## 2 Determinanten

Die Determinante ist eine Abbildung, die jeder $n \times n$-Matrix eine reelle Zahl zuordnet, $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Die Abbildung ist „normiert“ durch $\det(I) = 1$.

Eine ganz wichtiger Zusammenhang zwischen Invertierbarkeit und Determinanten ist folgender:

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 &\Leftrightarrow \text{Spalten von } A \text{ sind linear unabhängig (ebenso Zeilen)} \\ &\Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \text{Das LGS } A\vec{x} = \vec{b} \text{ hat für jedes } \vec{b} \text{ eine eindeutige Lösung: } \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

Eine weiter nützliche Eigenscaft ist der *Determinantenmultiplikationssatz*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \ .$$

Hieraus folgt sofort:

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \ .$$

**Berechnung von** $\det(A)$**:**
Zunächst zwei Spezialfälle:

- $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ .$$

- $n = 3$ (Regel von Sarrus):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \ . \end{aligned}$$

Bildlich gesprochen bedeutet dies: „Bergab-Diagonalen“ mit positivem Vorzeichen, „Bergauf-Diagonalen“ mit negativem Vorzeichen.

Für $n > 3$ muss man andere Methoden finden, sodass man (durch Umformungen) die Determinante schön ablesen kann. Hierfür sind folgende Eigenschaften nützlich:

1. $\det(A^T) = \det(A)$

2. Vertauscht man in der Matrix zwei Zeilen bzw. zwei Spalten, so unterscheiden sich die Determinanten „vorher und nachher“ jeweils nur um einen Faktor $(-1)$. Sind insbesondere zwei Spalten/Zeilen gleich, so verschwindet die Determinante der Matrix.

3. Betrachten wir die Spalten einer $n \times n$-Matrix als Vektoren des $\mathbb{R}^n$, also $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ mit $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \dots, n)$: Dann gilt:

   - det ist linear in jeder Spalte:

   $$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j + \lambda\vec{b}, \dots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) + \lambda \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{a}_n) \ .$$

   - Es folgt, dass det invariant bleibt, wenn man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen addiert:

   $$\begin{aligned} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j + \lambda\vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) + \lambda \underbrace{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n)}_{= 0, \text{ da } \vec{a}_k \text{ doppelt vorkommt}} \\ &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \ . \end{aligned}$$

   Das gleiche gilt auch bezüglich der Zeilen!

Für obere Dreiecksmatrizen, das heißt Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \dots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist die Determinante durch das Produkt der Diagonalelemente gegeben: $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ (Wegen Eigenschaft 1 gilt dies auch für untere Dreiecksmatrizen.). Dies liefert uns also folgendes Hilfsmittel zur Berechnung von Determinanten:

- Bringe die Matrix durch den Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform. Hierbei darf man nur zwei der drei elementaren Zeilenumformungen benutzen:
  - Zeilen vertauschen $\Rightarrow$ Determinante ändert sich um einen Faktor $(-1)$ (vgl. Eigenschaft 2)
  - Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren $\Rightarrow$ Determinante bleibt invariant (vgl. Eigenschaft 3)

  Beachte: Zeilen dürfen nicht mit einem Faktor multiplizieren allein durchmultipliziert werden!
- Lese die Determinante an der Zeilenstufenform (d.h. obere Dreiecksmatrix) ab $\Rightarrow$ Produkt der Diagonalelemente.

<u>BEISPIEL 2:</u>

Daneben gibt es noch die Möglichkeit, Determinanten von großen $n \times n$-Matrizen in die Summe von Determinanten kleinerer $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen zu zerlegen. So kann man sukzessive die Determinante einer beliebigen $n \times n$-Matrix in die Summe von Determinanten von $2 \times 2$- bzw. $3 \times 3$-Matrizen. Dies ist die Aussage des *Laplaceschen Entwicklungssatzes*:
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix die man erhält, wenn man aus $A$ die $i$-te Zeile und $j$-te Spalte streicht. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) && \Rightarrow \text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \ . && \Rightarrow \text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile} \end{aligned}$$

Diese Methode ist besonders dann geeignet, wenn in einer Spalte oder Zeile viele Nullen stehen.

Der Faktor $(-1)^{i+j}$ bedeutet anschaulich, dass wir das „Matrix-Tableau“ wie ein Schachbrett aufteilen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Entwickelt man beispielsweise nach der $i$-ten Zeile, beginnt man bei $a_{i1}$ (mit dem „Schachbrett-Vorzeichen“ gewichtet), streicht die $i$-te Zeile und 1-te Spalte und berechnet die Determinante dieser Streichungsmatrix $A_{i1}$. Dann geht man über zu $a_{i2}$ u.s.w. bis man bei $a_{in}$ angelangt ist.

<u>BEISPIEL 3:</u>