

Summen

1 einfache Summen

1.1 endliche Summen

1.1.1 bestimmte Summen

Summe über 1: $\sum_{k=n}^m 1 = m + 1 - n$

endliche geometrische Reihe: $\sum_{\nu=0}^n x^\nu = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ n+1, & x = 1. \end{cases}$

kleiner Gauß: $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

binomischer Lehrsatz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ Achtung: $\binom{n}{k} = 0$ für $n < k$

1.1.2 Indexverschiebung

„Was an den Grenzen abgezogen bzw. addiert wird, muss am Index addiert bzw. abgezogen werden.“

$$\sum_{k=n}^m a_k = \sum_{k=n+s}^{m+s} a_{k-s} = \sum_{k=n-s}^{m-s} a_{k+s}$$

Achtung Fehlerquelle: $\sum_{k=2}^n x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2(k+2)+1} = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k+5}$

nicht $\sum_{k=2}^n x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k+2+1} = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k+3}$

1.1.3 Summen zusammenfassen

$$\sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)$$

Achtung: Grenzen der Summen müssen gleich sein!

1.2 unendlich Summen

1.2.1 bestimmte Summen

geometrische Reihe: $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$

e-Reihe: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Sinus: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Kosinus: $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2 Doppel-Summen

2.0.2 nicht vertauschen

eher unwahrscheinlich; alles herausziehen und umformen

2.0.3 vertauschen

- Grenzen hängen **nicht** voneinander ab

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=5}^{90} 4^k l = \sum_{l=5}^{90} \sum_{k=0}^n 4^k l = \left(\sum_{l=5}^{90} l \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n 4^k \right)$$

- Grenzen hängen voneinander ab

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k a_{kl} = \sum_{l=0}^n \sum_{k=l}^n a_{kl}$$

2.0.4 Cauchyprodukt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{n-k} x^n$$

Aufgaben im Tutorium

3 einfache Summen

3.1 endliche Summen

1. $\sum_{\nu=k}^{n+k} \nu$

2. $\sum_{k=n}^m k$

3. $\sum_{k=0}^{n+1} x^{k+n+2}$

4. $\sum_{k=3}^n x^k$

5. $\sum_{\nu=0}^{2n+1} (x^\nu)^{\frac{3}{2}}$

6. $(x - y) \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1}$

Fasse folgende Summen zusammen und vereinfache dann

7. $\sum_{k=1}^n (2k + 1) + \sum_{k=1}^n (k - 3)$

8. $\sum_{k=2}^{n+3} 4k + \sum_{k=6}^{n+5} (k - 2)$

3.2 unendlich Summen

1. $\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \cos(\pi\nu)$

2. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

4 Doppel-Summen

4.0.1 nicht vertauschen

1. $\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l 4^l \binom{l}{k}$

2. $\sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=\nu}^n \binom{\mu}{\nu} 2^\nu$

4.0.2 vertauschen

- Grenzen hängen **nicht** voneinander ab

1. $\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 4^l \binom{l}{k}$

2. $\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 3^{-l} \binom{l}{k}$

- Grenzen hängen voneinander ab

1. $\sum_{k=0}^m \sum_{n=k}^m \frac{k}{n+1}$

2. $\sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=\nu}^n \frac{1}{\mu+1}$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k 3^{-k} (-1)^{\nu}$

4. $\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=\nu}^n \frac{x^{\mu} \nu}{\mu(\mu+1)}$

5. $\sum_{\nu=0}^{n+1} \sum_{\mu=\nu}^{n+1} \frac{2}{\mu+1}$

6. $\sum_{n=0}^{10} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{n-\mu+1}$

Aufgaben zu Summen

1. $\sum_{k=5}^n k$

2. $\sum_{k=n}^{n+m-1} k$

3. $\sum_{k=4}^{n+5} x^{k+n+2}$

4. $\sum_{k=0}^{10} 2^{-k}$

5. $\sum_{k=9}^n x^k$

6. $\sum_{\nu=0}^{2n+1} (x^\nu)^{\frac{3}{2}}$

7. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right)$

8. $(x-1) \sum_{k=0}^n x^k$

9. $\sum_{m=2}^6 \sum_{n=0}^{39} (mn - 2n - 4)$

10. $\sum_{k=1}^n (2k+1) + \sum_{k=1}^n (k-3)$

11. $\sum_{k=2}^{n+3} 4k + \sum_{k=6}^{n+5} (k-2)$

12. $\sum_{\nu=0}^{\infty} 4^{-\nu} \sin\left(\pi\nu + \frac{\pi}{2}\right)$

13. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{4^i}$

14. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k$

15. $\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l (-6)^l \binom{l}{k}$

16. $\sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=\nu}^n \binom{\mu}{\nu} 3^\nu$

17. $\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 5^l \binom{l}{k}$

$$18. \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n 9^{-l} \binom{l}{k}$$

$$19. \sum_{k=0}^{55} \sum_{n=k}^{55} \frac{k}{n+1}$$

$$20. \sum_{\nu=0}^{n+1} \sum_{\lambda=\nu}^{n+1} \frac{1}{\lambda+1}$$

$$21. \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k \left(\frac{4}{8}\right)^{-k} (-1)^{\nu}$$

$$22. \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=\nu}^n \frac{x^{\mu} \nu}{\mu(\mu+1)}$$

$$23. \sum_{\nu=0}^{n+1} \sum_{\mu=\nu}^{n+1} \frac{2}{\mu+1}$$

$$24. \sum_{n=0}^{10} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{n-\mu+1}$$