

Tag der Mathematik 2023

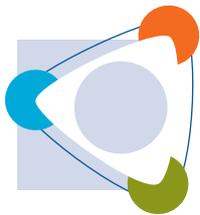
Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben

Allgemeine Hinweise:

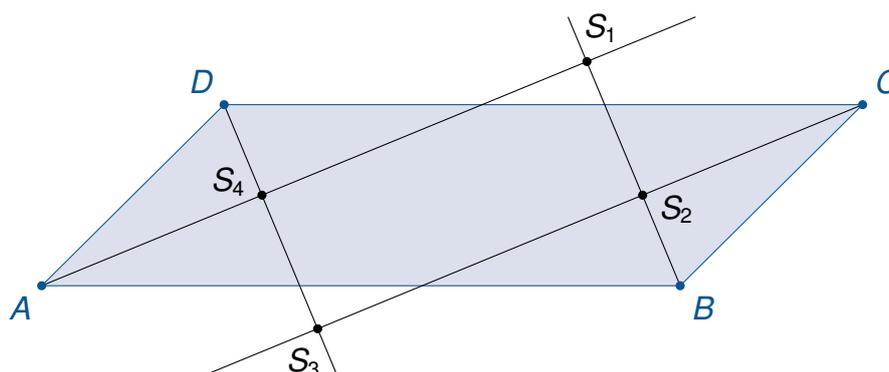
Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

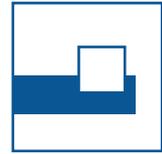
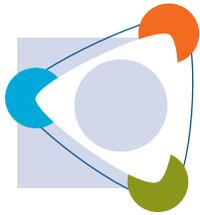


Aufgabe G1

In einem Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ seien die Winkelhalbierenden der Innenwinkel bei A , B , C und D konstruiert. Dabei auftretende Schnittpunkte von Winkelhalbierenden seien so mit S_1 , S_2 , S_3 und S_4 bezeichnet, wie aus der nachstehenden Abbildung ersichtlich wird.



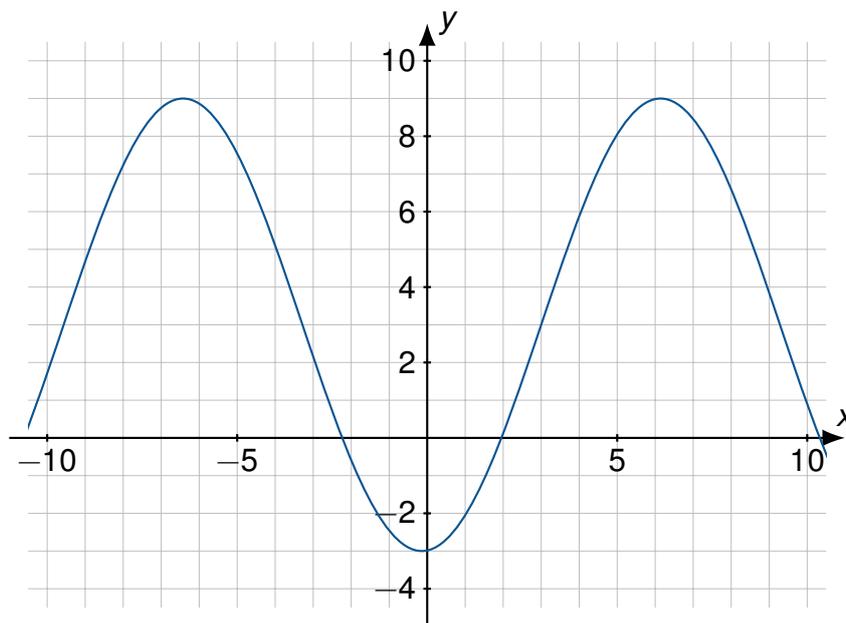
- Beweisen Sie, dass das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ unter diesen Voraussetzungen stets ein Rechteck ist.
- Zusätzlich werde nun vorausgesetzt, dass der Punkt S_1 auf der Strecke CD liegt. Ermitteln Sie das Verhältnis $AB : BC$.



Aufgabe G2

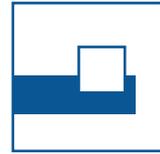
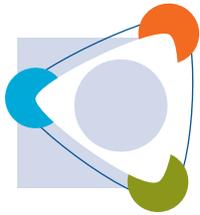
Gegeben ist der Graph einer Funktion

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d.$$



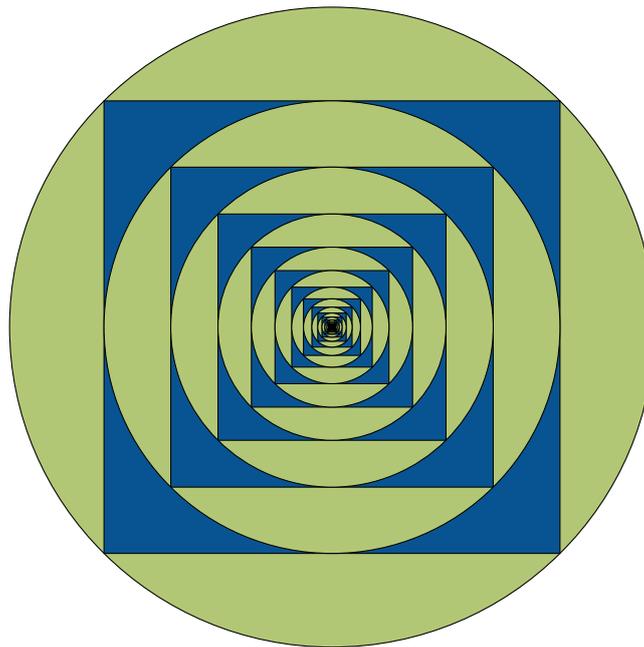
Man schätze (so präzise wie anhand der Abbildung möglich) die Parameter a, b, c, d .

Hinweis: Eine Genauigkeit von 0,5 ist im Zweifel ausreichend.

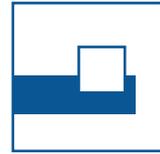
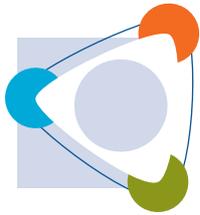


Aufgabe G3

In einen grünen Kreis mit Radius 1 Meter ist ein Quadrat einbeschrieben und blau gefärbt. In dieses Quadrat wird ein Kreis einbeschrieben und grün gefärbt. In diesen wieder ein Quadrat. Wir stellen uns vor, dass das immer so weiter geht.



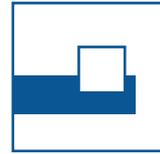
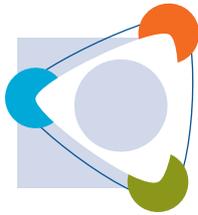
Welcher Anteil der Fläche des großen Kreises ist dann grün gefärbt?



Aufgabe G4

Der Weihnachtsmann hat von seinen Wichteln eine Lichterkette mit 365 Lämpchen geschenkt bekommen. Die Lämpchen sind alle von 1 bis 365 nummeriert und können einzeln ein- und ausgeschaltet werden. An Heiligabend (24.12.) wird die Kette überreicht und alle Lämpchen leuchten. Am darauffolgenden ersten Weihnachtsfeiertag (25.12.) werden zunächst alle Lämpchen ausgeknipst. Am zweiten Tag nach Heiligabend wird jedes zweite Lämpchen wieder eingeschaltet. Am dritten Tag wird jedes dritte Lämpchen umgeschaltet, also ausgeknipst, wenn es leuchtete und angeknipst, wenn es aus war. Und so weiter. Am k -ten Tag nach Heiligabend wird jedes Lämpchen dessen Nummer durch k teilbar ist umgeschaltet.

- Brennt das Lämpchen mit der Nummer 24 am nächsten Heiligabend?
- Brennt das Lämpchen mit der Nummer 144 am nächsten Heiligabend?
- Wieviele Lämpchen leuchten am nächsten Heiligabend **nicht**?



Aufgabe E1

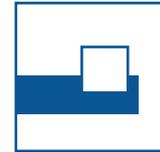
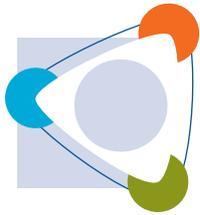
Für eine vierstellige Zahl $abcd$ mit den Ziffern a , b , c und d betrachten wir:

- die Quersumme: $a + b + c + d$
- die alternierende Quersumme: $-a + b - c + d$
- und die gewichtete Quersumme: $4a + 3b + 2c + d$

Für die Zahl 2023 ist die Quersumme 7, die alternierende Quersumme -1 und die gewichtete Quersumme 15.

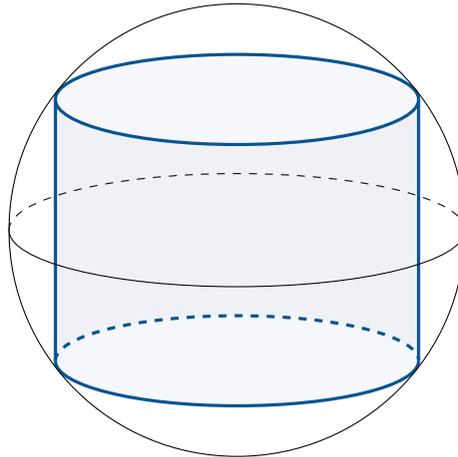
Finden Sie eine weitere vierstellige Zahl $abcd$, bei der die Quersumme, die alternierende Quersumme und die gewichtete Quersumme jeweils den selben Wert ergibt wie bei 2023. Wie viele solche Zahlen gibt es?

Hinweis: Bei einer vierstelligen Zahl $abcd$ darf die erste Ziffer a nicht 0 sein.

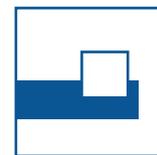
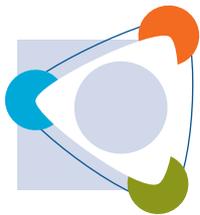


Aufgabe E2

In einer kugelförmigen Tiefseetauchsonde mit Durchmesser 1 Meter soll ein möglichst großer zylinderförmiger Tank eingebaut werden.

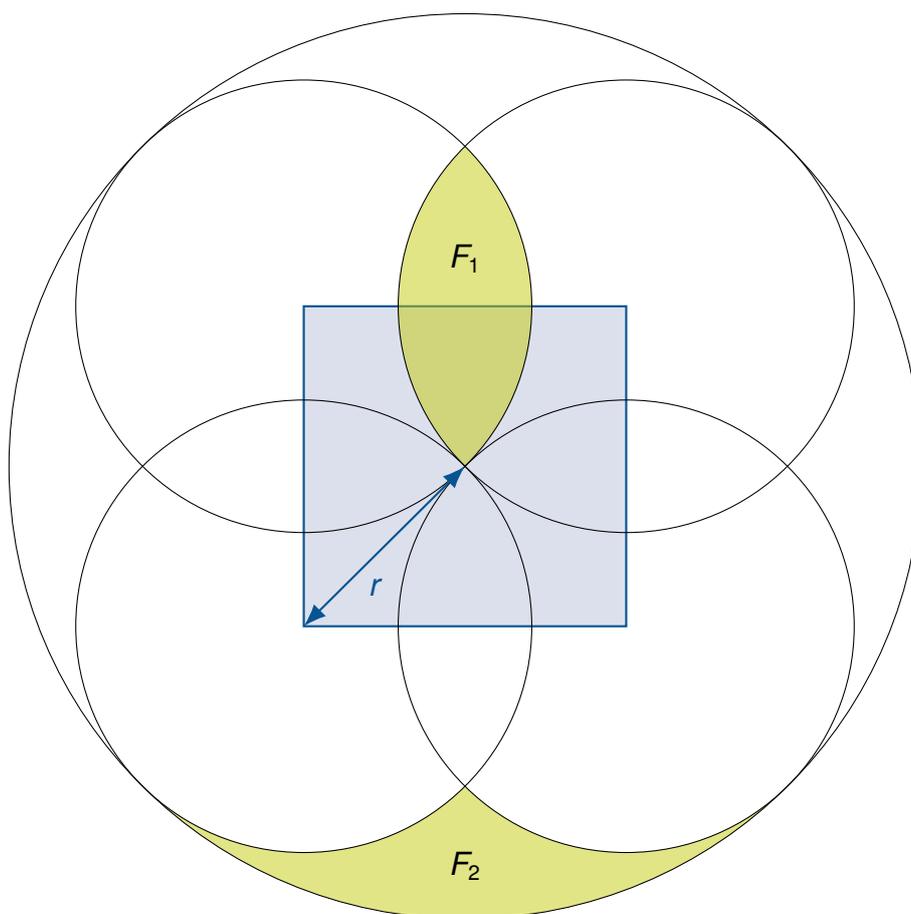


Wie groß muss die Höhe des Zylinders gewählt werden, damit er ein maximales Volumen besitzt? Geben Sie für diesen Fall das Volumen konkret an.

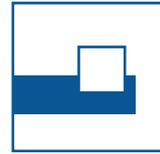
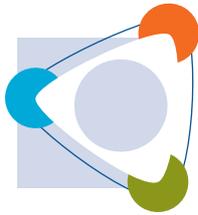


Aufgabe E3

Gegeben sei ein Quadrat, dessen Diagonale Länge $2r$ hat. Um jeden der 4 Eckpunkte des Quadrats wird ein Kreis mit Radius r gezogen, außerdem um den Mittelpunkt des Quadrats ein Kreis mit Radius $2r$. Es entsteht die abgebildete Figur.

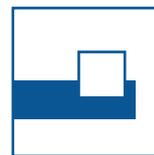
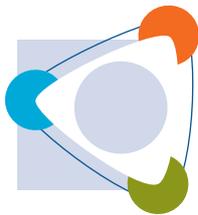


- Zeigen Sie, dass die Flächenstücke F_1 und F_2 gleich groß sind.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von F_1 in Abhängigkeit von r .



Aufgabe E4

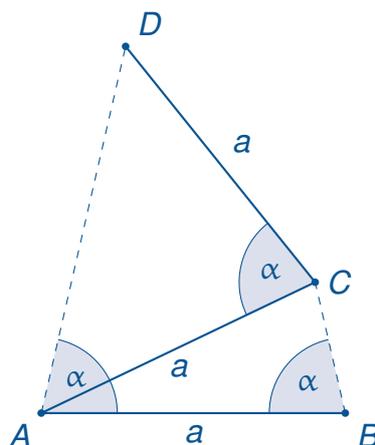
- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen 1, 2, 3 so anzuordnen, dass keine Zahl an ihrem Platz steht (also 1 nicht an erster Stelle, 2 nicht an zweiter, 3 nicht an dritter)?
- b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 so anzuordnen, dass keine Zahl an ihrem Platz steht?

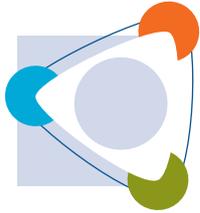


Aufgabe H1

Drei Stäbe der Länge a werden so gelegt, dass entsprechend nachstehender Abbildung ein Viereck $ABCD$ entsteht. Dabei tritt der Winkel α mehrfach auf.

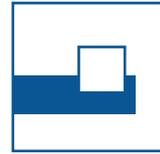
Wie groß ist er?





Tag der Mathematik 2023

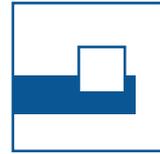
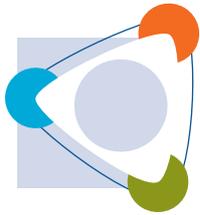
Aufgabe H2



Aufgabe H2

Schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 15 so in die 15 Kästchen, dass die Summe der zwei Zahlen von benachbarten Kästchen jeweils eine Quadratzahl ergibt.

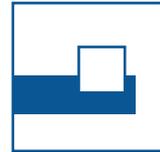
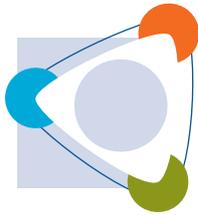
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Aufgabe H3

Frieda hat eine Reise geplant, bei der sie bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h gerade noch rechtzeitig zu einem wichtigen Treffen ankommt. Wegen mehrerer Staus erreicht sie auf der ersten Hälfte der Strecke nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h.

Wie schnell muss Frieda die zweite Hälfte der Strecke im Mittel mindestens zurücklegen, um noch rechtzeitig anzukommen?



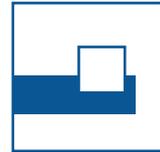
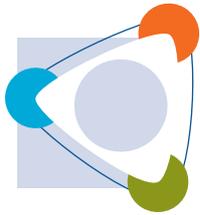
Aufgabe H4

Von einem Polynom

$$P(X) = 71 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

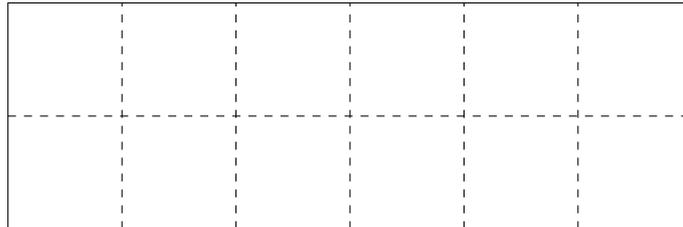
mit einer natürlichen Zahl n und **ganzzahligen** Koeffizienten a_1, \dots, a_n sei bekannt, dass eine natürliche Zahl $y \in \mathbb{N}$ existiert mit $y < 71$ und $P(y) = y$.

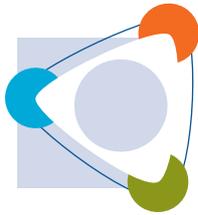
Man bestimme y .



Aufgabe H5

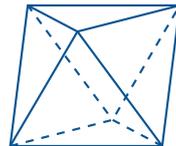
Wie viele Möglichkeiten gibt es, das abgebildete Rechteck der Größe 6×2 mit Steinen der Größe 2×1 oder 1×2 zu füllen?





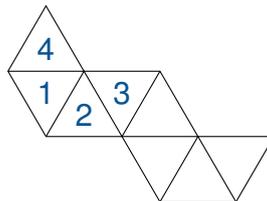
Aufgabe H6

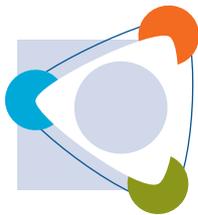
Die Oberfläche eines Oktaeders besteht aus 8 Seitenflächen, die gleichseitige Dreiecke sind. Er hat 6 Ecken, 8 Flächen und 12 Kanten.



Bei einem Oktaederwürfel sind die acht dreieckigen Seitenflächen des Oktaeders so mit den Zahlen 1 bis 8 beschriftet, dass die Augensumme von gegenüberliegenden Seitenflächen immer gleich ist.

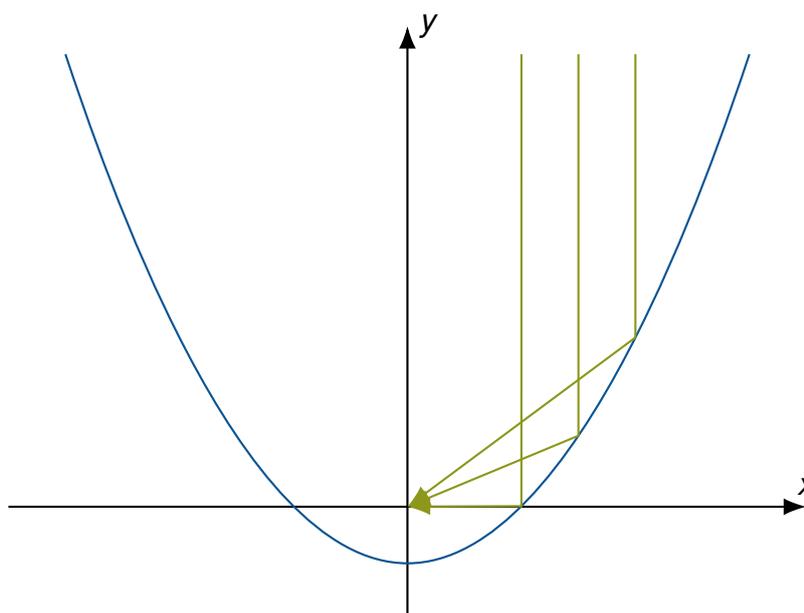
Ergänzen Sie die fehlenden Augenzahlen 5 bis 8 in dem unten abgebildeten Oktaedernetz, sodass daraus ein ordentlicher Oktaederwürfel gefaltet werden kann.





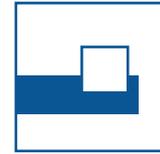
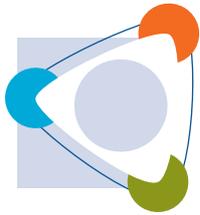
Aufgabe H7

Eine Normalparabel $y = f(x) = x^2$ reflektiert alle senkrecht von oben kommenden Lichtstrahlen in einen Brennpunkt auf der y -Achse, wenn man sich den Graph der Parabel verspiegelt denkt (Parabolspiegel). Gesucht ist eine nach unten verschobene Normalparabel $y = f(x) = x^2 - a$, die alle senkrecht von oben kommenden Lichtstrahlen in den Koordinatenursprung reflektiert.



Wie groß ist die Verschiebung a zu wählen?

Hinweis: Die in der Aufgabenstellung genannte Reflexionseigenschaft der Normalparabel darf ohne Beweis verwendet werden.



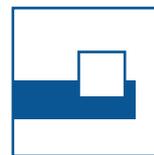
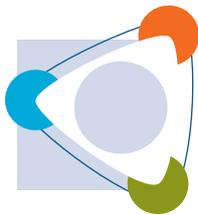
Aufgabe H8

Eine k -stellige natürliche Zahl $n = z_1 z_2 \dots z_k$ mit den Ziffern z_1, \dots, z_k heiÙe ziffernmonoton, wenn für benachbarte Ziffern stets gilt:

$$z_i < z_{i+1}.$$

Beispiel: 123579 ist ziffernmonoton, 12557 nicht da $z_3 = 5 \not< 5 = z_4$.

Wieviele 6-stellige ziffernmonotone natürliche Zahlen gibt es?



Aufgabe H9

Ein Stammbruch ist ein Bruch $\frac{1}{n}$ mit $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a < b \in \mathbb{N}$ kann als Summe von verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden.

Beispiel:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

ist eine solche Stammbruchzerlegung. $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ist hingegen nicht erlaubt.

Finden Sie eine Stammbruchzerlegung von $\frac{3}{7}$, das heißt schreiben Sie $\frac{3}{7}$ als Summe **verschiedener** Stammbrüche.