Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik I — Blatt 9

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2012/13**

Aufgabe 1 (3 + 3 + 2 + 2 + 3 Punkte)

Beweisen Sie, dass für alle $\mathcal{L}$-Formeln φ und alle Variablen x die folgenden Beziehungen gelten (vgl. Satz 10.7 aus dem Skript):

(a) $\exists x \varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg \forall x \neg \varphi$

(b) $\forall x \varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg \exists x \neg \varphi$

(c) $\forall x \forall y \varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \forall y \forall x \varphi$

(d) $\exists x \exists y \varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \exists y \exists x \varphi$

(e) $\exists x \forall y \varphi \models \forall y \exists x \varphi$. Geben Sie außerdem eine Formel φ an mit $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Formen Sie die Formel

$$\neg\big((\forall x \varphi(x) \to (\forall y \psi(y) \to \exists x \varphi(x))) \to \forall x \exists y \sigma(x, y)\big)$$

schrittweise in eine pränexe Normalform um (in φ, ψ, σ kommen keine Quantoren vor).

Aufgabe 3 (4 Zusatzpunkte)

Beweisen Sie das Überführungslemma (Satz 10.10 aus dem Skript): Sei $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ eine beliebige Formel und t ein Term, der in φ für die Variable x frei einsetzbar ist. Dann gilt für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ und jede Belegung v: $[\![\varphi(t)]\!]^{\mathfrak{A}}_v = [\![\varphi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_v]}$.

Abgabe der Aufgaben am 17.1. nach der Vorlesung oder als PDF.