Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II SS 08

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 2**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß folgende Formeln nur Modelle mit endlichem Individuenbereich haben:

a) $\forall X[\forall x\forall y\forall z\forall u(X(x,y) \wedge X(z,u) \to (x \doteq z \leftrightarrow y \doteq u)) \wedge \forall x\exists y X(x,y) \to \forall y\exists x X(x,y)]$

b) $\forall X(\forall x\forall y\forall z(X(x,y) \wedge X(y,z) \to X(x,z)) \wedge \forall x\neg X(x,x) \wedge \exists x\exists y X(x,y) \to \exists x\forall y\neg X(x,y))$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Prüfen Sie, ob folgende Ausdrücke

(1) in allen Modellen der Logik 2. Stufe

(2) in allen Standardmodellen der Logik 2. Stufe

gültig sind (Begründung oder Gegenmodell):

a) $\forall X\exists x X(x)$

b) $\exists X\forall x X(x)$

c) $\forall Y\forall x(\forall X X(x) \to Y(x))$

d) $\forall Y\forall X\forall y(\forall x X(x) \to Y(y))$

e) $\forall X\forall x\forall y(x \doteq y \to \neg(X(x) \wedge \neg X(y)))$

f) $\forall X\forall x\exists Y\forall y(X(x,y) \leftrightarrow Y(x))$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Geben Sie eine Ableitung an zu:

$$\vdash_2 \phi \vee \psi \leftrightarrow \forall X^0((\phi \to X^0) \wedge (\psi \to X^0) \to X^0)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie Ableitungen an zu:

a) $\vdash_2 x = x$

b) $\vdash_2 x = y \to y = x$

c) $\vdash_2 x = y \wedge y = z \to x = z$

d) $\vdash_2 x = y \to (\phi(x) \to \phi(x))$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Beweisen Sie $\forall^2\exists$ in der Form

$$\frac{\forall X^n\varphi}{\varphi[\psi/X^n]}$$

aus $\forall^2\exists$ und dem Komprehensionsschema.