Beweise und Widerlegungen in der formalen Logik — SS 2008

Definierbarkeit von $\exists$ und $\forall$ — Thomas Piecha

Statt Regelpaare für die Quantoren $\forall$ *und* $\exists$ einzuführen, genügt es, nur für einen Quantor ein Regelpaar anzugeben. Gibt man z. B. Regeln für $\forall$ an, dann kann $\exists x A(x)$ durch $\neg\forall x \neg A(x)$ definiert werden. Der Kalkül NK$'$ unterscheidet sich dann von NK durch das Fehlen der Regeln ($\exists$ I) und ($\exists$ E).

Damit dieser Kalkül gleichwertig zu NK ist, muß folgendes gelten:

(i) $A(t) \vdash_{\mathrm{NK}'} \exists x A(x)$

(ii) Wenn $X, A(a) \vdash_{\mathrm{NK}'} C$, dann $X, \exists x A(x) \vdash_{\mathrm{NK}'} C$, wobei X eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a nicht in C und in keiner Annahme in X vorkommt, von der C abhängt.

Beweis.

(i) Es ist

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \neg A(x)^{\,(1)}}{\neg A(t)}\,(\forall\,\mathrm{E}) \qquad A(t)}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg\forall x \neg A(x)}\,(\to \mathrm{I})_{(1)}$$

Somit gilt mit $\exists x A(x) := \neg\forall x \neg A(x)$, daß $A(t) \vdash_{\mathrm{NK}'} \exists x A(x)$. Obige Ableitung kann durch $\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)}$ abgekürzt werden; man erhält also ($\exists$ I).

(ii) Sei $\begin{matrix} X, A(a) \\ \vdots \\ C \end{matrix}$ eine Ableitung von C aus X und $A(a)$, wobei X eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a nicht in C und in keiner Annahme in X vorkommt, von der C abhängt. Dann gilt wegen

$$\dfrac{\dfrac{\neg\forall x \neg A(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg C^{\,(2)} \qquad \begin{matrix} X, A(a)^{\,(1)} \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg A(a)}\,(\to \mathrm{I})_{(1)}}{\forall x \neg A(x)}\,(\forall\,\mathrm{I})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{C}\,(\bot)_{c\;(2)}$$

unter Verwendung von $\exists x A(x) := \neg\forall x \neg A(x)$, daß $X, \exists x A(x) \vdash_{\mathrm{NK}'} C$.

Obige Ableitung kann durch $\dfrac{\exists x A(x) \qquad \begin{matrix} [A(a)] \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}$ abgekürzt werden; man erhält also ($\exists$ E) (mit entsprechender Eigenparameterbedingung). $\square$

Entsprechend kann man auch $\exists$ als Grundzeichen wählen, und dann $\forall x A(x)$ durch $\neg\exists x \neg A(x)$ definieren. Der Kalkül NK′ unterscheidet sich dann von NK durch das Fehlen der Regeln $(\forall\,\mathrm{I})$ und $(\forall\,\mathrm{E})$.

Damit dieser Kalkül gleichwertig zu NK ist, muß folgendes gelten:

(i) Wenn $X \vdash_{\mathrm{NK}'} A(a)$, dann $X \vdash_{\mathrm{NK}'} \forall x A(x)$, wobei X eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a in keiner Annahme in X vorkommt, von der $A(a)$ abhängt.

(ii) $\forall x A(x) \vdash_{\mathrm{NK}'} A(t)$

Beweis.

(i) Sei $\begin{matrix} X \\ \vdots \\ A(a) \end{matrix}$ eine Ableitung von $A(a)$ aus X, wobei X eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a in keiner Annahme in X vorkommt, von der $A(a)$ abhängt. Dann gilt wegen

$$\cfrac{\cfrac{\exists x \neg A(x)^{\,(2)} \qquad \cfrac{\neg A(a)^{\,(1)} \qquad \begin{matrix} X \\ \vdots \\ A(a) \end{matrix}}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\bot}\,(\exists\,\mathrm{E})_{(1)}}{\neg\exists x \neg A(x)}\,(\to \mathrm{I})_{(2)}$$

unter Verwendung von $\forall x A(x) := \neg\exists x \neg A(x)$, daß $X \vdash_{\mathrm{NK}'} \forall x A(x)$. Obige Ableitung kann durch $\dfrac{A(a)}{\forall x A(x)}$ abgekürzt werden; man erhält also $(\forall\,\mathrm{I})$ (mit entsprechender Eigenparameterbedingung).

(ii) Es ist

$$\cfrac{\cfrac{\neg\exists x \neg A(x) \qquad \cfrac{\neg A(t)^{\,(1)}}{\exists x \neg A(x)}\,(\exists\,\mathrm{I})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{A(t)}\,(\bot)_{c\,(1)}$$

Somit gilt mit $\forall x A(x) := \neg\exists x \neg A(x)$, daß $\forall x A(x) \vdash_{\mathrm{NK}'} A(t)$. Obige Ableitung kann durch $\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)}$ abgekürzt werden; man erhält also $(\forall\,\mathrm{E})$. $\square$