

Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister

Blatt 5

Im Folgenden sei $\top \stackrel{\text{def}}{=} \neg\perp$ und $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie:

- $\vdash \top$
- $\vdash \varphi$ genau dann, wenn $\vdash \varphi \leftrightarrow \top$
- $\vdash \neg\varphi$ genau dann, wenn $\vdash \varphi \leftrightarrow \perp$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
- $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma))$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie:

- $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$
- $\varphi_1 \leftrightarrow \psi_1, \varphi_2 \leftrightarrow \psi_2 \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2)$
- $\varphi_1 \leftrightarrow \psi_1, \varphi_2 \leftrightarrow \psi_2 \vdash (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \leftrightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 3: $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\sigma[\varphi/p] \leftrightarrow \sigma[\psi/p])$

Aufgabe 5 (4 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$