Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 11**

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bezogen auf einen festen Ähnlichkeitstyp seien Γ, Δ Klassen von Aussagen und $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ Klassen von Strukturen. Zeigen Sie:

a) $Mod(\Gamma \cup \Delta) = Mod(\Gamma) \cap Mod(\Delta)$,

b) $Th(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = Th(\mathcal{K}_1) \cap Th(\mathcal{K}_2)$,

c) $\mathcal{K} \subseteq Mod(\Gamma)$ genau dann, wenn $\Gamma \subseteq Th(\mathcal{K})$,

d) $Mod(\Gamma \cap \Delta) \supseteq Mod(\Gamma) \cup Mod(\Delta)$,

e) $Th(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2) \supseteq Th(\mathcal{K}_1) \cup Th(\mathcal{K}_2)$.

Zeigen Sie im Falle von (d) und (e), dass keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien Γ und $\mathcal{K}$ wie oben. Zeigen Sie:

a) $\Gamma \subseteq Th(Mod(\Gamma))$,

b) $\mathcal{K} \subseteq Mod(Th(\mathcal{K}))$,

c) $Th(Mod(\Gamma))$ ist eine Theorie, die durch Γ axiomatisiert wird.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei P ein zweistelliges Prädikatensymbol. Zeigen Sie, dass $Mod(\sigma)$ nur unendliche Modelle enthält, wobei $\sigma = \forall x \neg P(x,x) \wedge \forall xyz(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es sei $\tau = \sigma \vee \forall xy(x \doteq y)$. Zeigen Sie:

a) $Mod(\tau)$ hat unendliche Modelle,

b) $Mod(\tau)$ hat ein endliches Modell,

c) $Mod(\tau)$ hat keine beliebig großen endlichen Modelle.