Klausur Mathematische Logik

22. Februar 2008

Max Mustermann

1234567

- **Klausur erst nach Aufforderung aufschlagen!**
- Mobiltelefone bitte ausschalten!
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Insgesamt sind 60 Punkte erreichbar. Die Klausur gilt mit 20 Punkten als bestanden.
- Aus der Aussagenlogik (Aufgaben 1–5) und der Prädikatenlogik (Aufgaben 6–12) sind jeweils mindestens 10 Punkte zu erreichen. Aus den Übungen werden dabei jeweils bis zu 9 Punkte angerechnet. Aufgabe 12 liefert Zusatzpunkte zum prädikatenlogischen Teil.
- Eine Abgabe ist vor Ablauf der 90 Minuten *nicht* möglich. Bleiben Sie bitte auf Ihrem Platz, bis alle Klausuren eingesammelt wurden.
- Verwenden Sie nur die Blätter des Klausurbogens für Ihre Lösungen. Auf den beiden letzten Blättern finden Sie zusätzlichen Platz.

☐ Ich möchte das Resultat dieser Klausur mit meiner Matrikelnummer als Schlüssel auf einer Webseite einsehen können.

____

Datum, Name

	AL	PL
1		×
2		×
3		×
4		×
5		×
6	×	
7	×	
8	×	
9	×	
10	×	
11	×	
12	×	
Üb		
Σ		
Note		

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie zu dieser Aussage sämtliche Teilaussagen und deren jeweiligen Rang an:

$$\neg(p \rightarrow (\neg(\neg r \vee p) \vee q)) \rightarrow (r \wedge q)$$

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 2 (2 + 4 Punkte)

Geben Sie disjunktive und konjunktive Normalformen für diese Aussage an:

$$\neg(p \to (\neg(\neg r \vee p) \vee q)) \to (r \wedge q)$$

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Geben Sie eine nur die logischen Zeichen $\wedge, \vee, \rightarrow$ und $\perp$ benutzende Aussage φ an, welche die folgende Wahrheitstafel besitzt:

p	q	r	φ
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 4 (2 + 4 Punkte)

Leiten Sie in NK her:

a) $p \to q, r \to \neg q \vdash \neg(p \land r)$

b) $p \to r, q \to s \vdash p \lor q \to r \lor s$

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Beweisen Sie:

> $\varphi \wedge \psi$ ist genau dann in einer maximal konsistenten Aussagenmenge enthalten, wenn φ und ψ darin enthalten sind.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot^2, \times, + \rangle$, und sei eine Sprache der entsprechenden Signatur gegeben, deren Konstantenzeichen genauso lauten wie die korrespondierenden Funktionen und Prädikate der Struktur. Weiterhin sei $v(x_1) = 2$, $v(x_2) = -1$ und $v(x_3) = 1$. Werten Sie schrittweise aus:

$$[\![(x_1 \times x_2)^2 + x_3]\!]_v^{\mathfrak{A}}$$

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Es sei φ eine Formel, welche die Variablen x_1, x_2 und x_3 frei enthalte. Zeigen Sie:

$$\models \exists x_1 \forall x_2 \varphi(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 \exists x_1 \varphi(x_1, x_2)$$

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Geben Sie eine zu der folgenden Formel äquivalente Formel in pränexer Normalform an:

$$\forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists x P(x, x)$$

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 9 (2 + 4 Punkte)

Leiten Sie in NK her:

a) $\forall x \neg \varphi(x) \to \neg \forall x \varphi(x)$

b) $\neg \forall x \varphi(x) \to \exists x \neg \varphi(x)$ [Bemerkung: In NK ist $\exists$ ein Grundzeichen.]

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 10 (1 + 1 + 4 Punkte)

Wann ist eine Aussagenmenge widerspruchsfrei? Was besagt der Modellexistenzsatz? Leiten Sie den Vollständigkeitssatz aus dem Modellexistenzsatz her.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 11 (1 + 3 Punkte)

Was besagt der Kompaktheitssatz? Beweisen Sie ihn aus dem Vollständigkeitssatz.

Max Mustermann
1234567

Aufgabe 12 (3 + 3 Zusatzpunkte)

Gegeben sei eine Sprache mit einem einstelligen Funktionszeichen als einziger Konstante. Gilt folgendes (Begründung)?

a) $\models \exists x(\exists y(x \doteq fy) \rightarrow \exists y(ffz \doteq fy))$

b) $\models \exists x(\exists y(x \doteq fy) \rightarrow \exists y(ffy \doteq fy))$