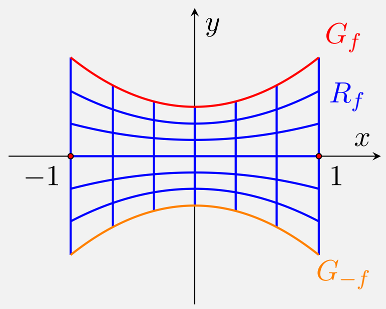
3.2 Rotationsvolumen

Funktionen fahren Karussel

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 + 1.$$

Wir betrachten nun den Graphen G_f der Funktion f auf dem Intervall $[-1, 1]$. Rotiert der Graph nun um die $x-$Achse, so entsteht ein dreidimensionaler Körper R_f, dessen Volumen V wir berechnen können.



Merke

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Wird der Graph der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ um die $x-$Achse rotiert, so heißt der dabei entstehende Körper *Rotationskörper* R_f von f auf dem Intervall $[a, b]$.

Funktionen fahren Karussel

Betrachten wir wieder die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 + 1.$$

Wir wollen nun das Volumen V des Rotationskörpers R_f von f auf dem Intervall $[a, b]$ berechnen.
Wir erinnern uns daran, wie die Fläche unter dem Funktionsgraphen G_f von f während der Einführung des Integrals genähert wurde.
Analog lässt sich nun auch für den Rotationskörper R_f und dessen Volumen vorgehen. Wir nähern diesen durch n Zylinder des Radius Δx an. Das Volumen V_{Z_n} eines solchen Zylinders an der Stelle x ist hierbei gegeben durch

$$V_{Z_n} = \pi * (f(x))^2 * \Delta x.$$

Nun verfeinern wir diese Zerlegung des Rotationskörpers und erhalten so Zylinder mit immer kleinerem Radius Δx. Diese nähern das Volumen des Rotationskörpers beliebig nahe an. Der Grenzwert über die Summe all dieser Zylinder

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \pi (f(\frac{b-a}{n} * i))^2 * \frac{b-a}{n}$$

liefert uns nun die Formel für das Volumen des Rotationskörpers.

Merke

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Das Volumen V des *Rotationskörpers* R_f von f auf dem Intervall $[a, b]$ ist gegeben durch

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

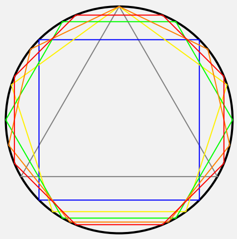
Aufgabe 3.0

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$ gegeben. Bestimme das Volumen V des Rotationskörpers R_f von f auf dem Intervall $[-1, 1]$.

3.3 Bogenlänge

Den Umfang eines Kreises bestimmen

Wir wollen den Umfang eines Kreises mit Radius r bestimmen.
Hierzu nähern wir diesen durch regelmäßige Vielecke im Inneren des Kreises an.



Aufgabe 3.1

Wir betrachten das obige Beispiel erneut.

(a) Weshalb ist der Umfang der regulären Vielecke stets größer bzw. kleiner als der des Kreises?

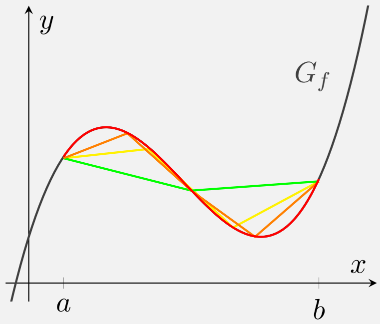
(b) Der Umfang u_n der regulären $n-$Ecke mit Radius r kann durch die Formel

$$u_n = 2 \cdot n \cdot \sin(\frac{\pi}{n}) \cdot r$$

beschrieben werden. Wie kann der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} u_n$ dieser Formel intepretiert werden?

Klappt das auch bei Funktionen?

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Analog zum Falle des Kreis lässt sich auch hier die Bogenlänge der Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ durch lineare Funktionen nähern.



Merke

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für die *Bogenlänge* l des Funtkionsgraphen G_f auf dem Intervall $[a, b]$ gilt

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Aufgabe 3.2

Berechne die Bogenlänge der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.

(a) Mit $f(x) = x$ und $I = [0, 5]$.

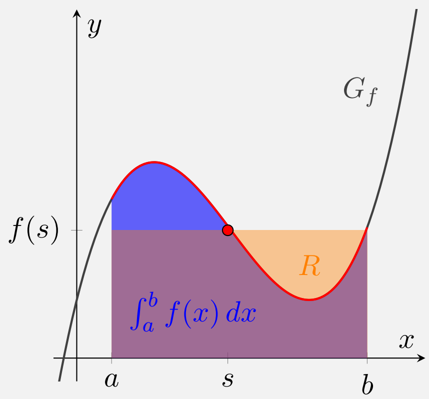
(b) Mit $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ und $I = [0, 13]$.

(c) Mit $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $I = [1, 4]$.

3.4 Mittelwertsatz

Das Integral durch Rechtecke beschreiben

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I = [a, b]$ ein Intervall.
Dann können wir ein Rechteck R mit Grundseite $[a, b]$ finden, welches den gleichen Flächeninhalt hat wie das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.
Wir beobachten, dass es stets mindestens einen Punkt $s \in [a, b]$ gibt an dessen Stelle die Funktion f den selben Wert wie die Höhe des Rechtecks hat. Die Höhe des Rechteckes ist hierbei durch den linearen Mittelwert der Funktion f auf dem Intervall I gegeben.



Merke

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist ihr *linearer Mittelwert* m auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Aufgabe 3.3

Bestimme den linearen Mittelwert der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.

(a) Mit $f(x) = x$ und $I = [0, 5]$.

(b) Mit $f(x) = e^x + 1 \cdot \sqrt{x}$ und $I = [0, 3]$.

(c) Mit $f(x) = \sin(x)$ und $I = [0, \pi]$.

Merke

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $[a, b]$ ein Intervall. dann existiert ein $s \in [a, b]$, so dass gilt

$$f(s) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Aufgabe 3.4

Gegeben sei eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Form

$$f(x) = cx + d \qquad c, d \in \mathbb{R}.$$

Bestimme das $s \in [a, b]$, so dass

$$f(s) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

gilt.

Aufgabe 3.5

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass bei gegebener Funktion f mit Stammfunktion F gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Der Mittwelwertssatz der Differentialrechnung besagt, dass es ein $x \in (a, b)$ gibt mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Leite den Mittelwertsatz der Integralrechnung aus diesen beiden Sätzen her.