RiskMetrics®:

Exponentially Weighted Moving Average

(EWMA)

Oliver Wuensche

Eberhard Karls
Universität
Tübingen

- RiskMetrics® benutzen zur Schätzung von Volatilitäten einen sogenannten EWMA-Schätzer.
- EWMA (exponentially weighted moving average) ist zurückzuführen auf die Methode der **Exponentiellen Glättung**.
- Dabei nimmt das Gewicht von vergangenen Beobachtungen exponentiell ab.
- Gegensatz: Methode der gleitenden Durchschnitte (Gleichgewichtung der Beobachtungen)

Ein n-Perioden EWMA ist definiert als:

$$\frac{x_{t-1} + \lambda x_{t-2} + \lambda^2 x_{t-3} + \cdots + \lambda^{n-1} x_{t-n}}{1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{n-1}}$$

Der Nenner kann auch geschrieben werden als: $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i$

Aus der Summenformel der geometrischen Reihe wissen wir:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert dieser Ausdruck gegen $\frac{1}{1-\lambda}$

$\Rightarrow$ EWMA kann auch ausgedrückt werden durch:

$$(1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}x_{t-i}$$

Für die Volatilitätsschätzung entspricht x_i nun gerade den quadrierten Renditen r_i^2, so dass:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}r_{t-i}^2$$

Aus diesem Ausdruck kann nun eine einfache Rekursionsformel zur Berechnung der $\hat{\sigma}_t^2$ abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_t^2 &= (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2 \\
&= (1-\lambda)\left[r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \cdots\right] \\
&= (1-\lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \left\{(1-\lambda)\left[r_{t-2}^2 + \lambda r_{t-3}^2 + \lambda^2 r_{t-4}^2 + \cdots\right]\right\} \\
&= (1-\lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

Dasselbe gilt für die Kovarianz, die durch eine äquivalente Rekursionsformel ermittelt werden kann:

$$Cov(r_{1,t}, r_{2,t}) = \hat{\sigma}_{12,t} = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{1,t-i} r_{2,t-i}$$

$$\Updownarrow$$

$$Cov(r_{1,t}, r_{2,t}) = \hat{\sigma}_{12,t} = (1-\lambda) r_{1,t-1} r_{2,t-1} + \lambda \hat{\sigma}_{12,t-1}$$

Wie können wir λ interpretieren?

Auf der rechten Seite der Rekursionsformel haben wir zwei Terme:

1. $(1-\lambda)r_{t-1}^2$: **Reaktion der Volatilität auf Marktereignisse**

   $\Rightarrow$ je kleiner λ, desto stärker reagiert die Volatilität auf Marktinformation

2. $\lambda\hat{\sigma}_{t-1}^2$: **Persistenz der Volatilität**

   $\Rightarrow$ ist die Volatilität gestern hoch, so wird sie auch heute hoch sein, egal was am Markt passiert