

Sechstes Übungsblatt (Regressionsanalyse)

Aufgabe 1: Regressionsmodell

y_v	x_v
2	3
3	4
4	9

Berechnen Sie die Parameter eines einfachen linearen Regressionsmodells $y_v = b_0 + b_1 x_v + e_v$. Dies ist der kleinstmögliche Datensatz, den Sie sinnvoll mit der Methode der kleinsten Quadrate bearbeiten können.

a) Schreiben Sie die Kleinstquadrate-Zielfunktion $Q = \sum_{v=1}^n (y_v - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_v)^2$ einmal mit Summenzeichen und einmal ausführlich unter Verwendung der Daten.

b) Schreiben Sie auch die Bedingungen erster Ordnung $\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0$ und $\frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0$ für ein Minimum der Zielfunktion ausführlich und mit Hilfe des Summenzeichens.

c) Berechnen Sie die Kleinstquadrate-Schätzer \hat{b}_0 und \hat{b}_1 , indem Sie die Bedingungen erster Ordnung nach \hat{b}_0 und \hat{b}_1 auflösen.

d) Tragen Sie y_v und $\hat{y}_v = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_v$ in einem Streudiagramm mit 45 Gradline ab. Zeichnen Sie $\hat{e}_v = y_v - \hat{y}_v$ in Ihrem Schaubild ein.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass aus der Minimierung von

$$Q = \sum_{v=1}^n (y_v - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_v)^2 \text{ folgt, dass}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{c_{xy}}{s_x^2}$$

$$\sum_{v=1}^n \hat{e}_v = 0 \text{ mit } \hat{e}_v = y_v - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_v \text{ und } \hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x}$$

$$c_{\hat{e}x} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \hat{e}_v (x_v - \bar{x}) = 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n y_v = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \hat{y}_v = \bar{\hat{y}} \text{ mit } \hat{y}_v = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_v$$

$$\frac{1}{n} \sum (y_v - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum (\hat{y}_v - \bar{\hat{y}})^2 + \frac{1}{n} \sum \hat{e}_v^2$$

Aufgabe 3: Eine Studentin der Wirtschaftswissenschaften absolviert ein Praktikum in der Marketingabteilung eines Unternehmens. In ihrem Projektteam wurde der folgende Zusammenhang von Marketingausgaben und Umsatz postuliert:

$$U = \alpha \cdot M^\beta \cdot u$$

wobei M die Marketingausgaben für ein Produkt bezeichnen und U dem Umsatz des Produktes (in der gleichen Periode). u ist eine unerklärte Restkomponente. α und β sind unbekannte Modellparameter.

Die Studentin hat die Aufgabe, die Parameter α und β zu schätzen und die Erklärungsgüte des Modells zu überprüfen.

a) Zunächst linearisiert die Praktikantin das Modell und überführt es in die Form $Y = b_0 + b_1 X + e$. Wie geht sie dabei vor? Welchen Variablen im Originalmodell entsprechen die abhängige Variable Y und die erklärende Variable X im linearisierten Modell?

Die Praktikantin erhebt dann Daten bezüglich Marketingausgaben und Umsatz für verschiedene Produkte des Unternehmens und berechnet die folgenden empirischen Momente: Das arithmetische Mittel der (transformierten) Beobachtungen der abhängigen Variablen ist $\bar{y} = 40,2$, das arithmetische Mittel der (transformierten) Beobachtungen erklärender Variablen ist $\bar{x} = 3,2$. Außerdem berechnet Sie $s_{xy} = 0,004$ und $s_x^2 = 8,2$.

b) Berechnen und interpretieren Sie den Kleinstquadrateschätzer \hat{b}_1 .

c) Das Bestimmtheitsmaß der Regression ist 0,03. Interpretieren Sie diesen Wert.