Neuntes Übungsblatt (Grundlagen Wahrscheinlichkeitstheorie)

1. Ein einfaches Beispiel für ein Zufallsexperiment ist das Werfen eines (fairen) Würfels (sechs Seiten, Zahlen von 1 bis 6) und das gleichzeitige Werfen einer (fairen) Münze (mit Kopf oder Zahl).

   Beschreiben Sie den Ereignisraum, die Menge S, welche die Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments enthält.

   A bezeichne das Ereignis „Augenzahl eines Wurfes größer 3 und die Münze zeigt Kopf“ und B das Ereignis „Augenzahl kleiner gleich 3 und Münze zeigt Zahl“.

   - Schreiben Sie die Ereignisse A und B ausführlich in Mengenschreibweise
   (d.h. Elementarereignisse, die zum Ereignis gehören, aufführen).

   - Was bedeuten inhaltlich die Ereignisse $A \cup B$ und $A \cap B$?

   - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$ und $P(A \cap B)$, mit Hilfe des Laplace‘schen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\frac{g}{m}$, wobei g die Anzahl der für das jeweilige Ereignis günstigen Elementarereignisse enthält und m die Zahl der möglichen Elementarereignisse. Welche Annahme müssen Sie hierzu treffen?

   - Berechnen Sie $P(A \cup B)$ nochmals unter Verwendung des Additionssatzes.

2. Ein Marketing-Beispiel: Sie interessieren sich im Rahmen einer Produkteinführung dafür, Wahrscheinlichkeitsaussagen zu treffen, unter anderem für

   Ereignis A: Eine zufällig ausgewählte Person hat unseren Werbespot für das Produkt im Fernsehen gesehen.

   Ereignis B: Die zufällig ausgewählte Person hat das Produkt gekauft, oder beabsichtigt es zu kaufen.

   Die interessierenden Ereignisse werden in der folgenden Ereignismenge zusammengefaßt
   $E = \{A, B, A \cap B, A \cup B, \overline{A}, \overline{B}, ..\}$
   Wählen Sie (subjektive) Wahrscheinlichkeiten $P(\cdot)$, für die in E explizit aufgeführten Ereignisse, so daß die Kolmogorov‘schen Axiome erfüllt sind.

   Entspricht die folgende Zuordung von Wahrscheinlichkeiten
   $P(A) = 0{,}8$ $P(\overline{A}) = 0{,}2$ $P(B) = 0{,}3$ $P(\overline{B}) = 0{,}7$ $P(A \cap B) = 0{,}2$ $P(A \cup B) = 0{,}85$ den Kolmogorov’schen Axiomen? Wenn nicht, wo liegt das Problem?

3. Zeigen Sie, daß gilt:

   $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

   Lösungshinweise:
   a) Definieren Sie zunächst $P(A') = P(A \cup B)$ und wenden Sie den Additionssatz auf das Ereignis $A' \cup C$ an.
   b) Ein Distributivgesetz aus der Mengentheorie besagt: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.