

Aufgabe 1 (1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie in NK':

- a) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \sigma \vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$
- b) $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi$
- c) $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma))$
- d) $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \phi \rightarrow \neg\psi$

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie in NK:

- a) $\phi \leftrightarrow \psi \vdash \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$
- b) $\neg\phi \rightarrow \psi \vdash \phi \vee \psi$

Aufgabe 3 (4 Punkte)Zeigen Sie, dass mit $\Gamma \vdash \phi$ und $\Delta, \phi \vdash \psi$ auch $\Gamma, \Delta \vdash \psi$ gilt.**Aufgabe 4** (6 Zusatzpunkte)

Für eine Formel ϕ sei ϕ_1, \dots, ϕ_n eine minimale (d.h. nur aus Teilformeln von ϕ bestehende) Bildungsfolge für $\phi_n = \phi$. Seien weiterhin q_1, \dots, q_n neue atomare Aussagensymbole. Die Formel ψ sei dann die Konjunktion von q_n und den konjunktiven Normalformen der folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} (q_i \vee q_j) &\leftrightarrow q_k \quad \text{für } \phi_k = (\phi_i \vee \phi_j) \\ (q_i \wedge q_j) &\leftrightarrow q_k \quad \text{für } \phi_k = (\phi_i \wedge \phi_j) \\ \neg q_i &\leftrightarrow q_k \quad \text{für } \phi_k = \neg\phi_i \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ϕ und ψ erfüllbarkeitsäquivalent sind.