PD. Dr. Klaus Reinhardt **Universität Tübingen, WS 09/10**

Übungen zur Mathematischen Logik I
Blatt 10

Aufgabe 40: Formen Sie die folgende Formel schrittweise in eine PNF um. Geben Sie dabei an, welche logischen Äquivalenzen Sie verwenden und gegebenenfalls, wo ein Substitutionstheorem zusätzlich eingeht.

$$\neg\big(\exists x\phi(x,y) \wedge (\forall y\psi(y) \to \phi(x,x)) \to \exists x\forall y\sigma(x,y)\big)$$

Aufgabe 41: Beweisen Sie das Überführungslemma (Skript, Satz 10.10). Setzen Sie dafür formale Sprachen mit genau den Junktoren $\to$ und $\perp$ und dem einzigen Quantor $\forall$ und beliebiger Signatur voraus.

Aufgabe 42: Sei P ein zwei-stelliges Relationszeichen. Zeigen Sie, dass die Formel $\neg\exists y\forall x(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(x,x))$ allgemeingültig ist. Zeigen Sie zudem, dass aus der Formel $\exists y\forall x\phi$ die Formel $\forall x\exists y\phi$ folgt. Beweisen Sie außerdem durch Angabe eines Gegenbeispiels (und Nachweis, dass es eines ist), dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 43: Zeigen Sie im Kalkül NK$'$ die folgenden Behauptungen über Ableitbarkeit:

(a) $\vdash \forall x(\phi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\phi(x) \to \forall x\psi(x))$
(b) $\vdash \forall x\phi(x) \to \neg\forall x\neg\phi(x)$
(c) $\vdash \forall x(\phi \to \psi(x)) \to (\phi \to \forall x\psi(x))$, sofern $x \notin \mathrm{FV}(\phi)$

Hinweis: Beachten Sie die Bedingungen an die Variablen bei der Anwendung der Regeln für die Quantoren und notieren Sie diese.

Abgabe der Aufgaben am Do. 21.1.2010 nach der Vorlesung