

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Geben Sie für folgende Ableitungen an, welche Formelvorkommen maximal sind, und normalisieren Sie die Ableitungen. Geben Sie dabei jeweils zwei Reduktionen mit allen erforderlichen Kontraktionsschritten an. (Der Parameter a komme in keiner Annahme in \mathcal{D} vor, von der die Prämisse einer Anwendung von $(\forall I)$ abhängt.)

(a)

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 \frac{\forall x P(x, a)}{P(b, a)} (\forall E) \\
 \frac{P(b, a)}{\forall y P(y, a)} (\forall I) \\
 \frac{\forall y P(y, a)}{P(a, a)} (\forall E) \\
 \frac{P(a, a)}{\forall z P(z, z)} (\forall I) \\
 \frac{\forall z P(z, z)}{P(b, b)} (\forall E)
 \end{array}
 \quad (4 \text{ Punkte})$$

(b)

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{D} \\
 \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A^{(3)} \quad \frac{B}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)}{(A \rightarrow B) \rightarrow A} (\rightarrow E) \quad \mathcal{D} \\
 \frac{\frac{A}{(A \rightarrow B) \rightarrow A} (\rightarrow I) \quad \frac{B}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)}{A \wedge A} (\wedge I) \quad \frac{\neg A^{(2)} \quad A^{(1)}}{\perp} (\perp)_c \\
 \frac{\neg A \wedge A}{\neg A} (\wedge E) \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A^{(3)} \quad \frac{B}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)^{(1)}}{A} (\rightarrow E) \\
 \frac{\perp}{A} (\perp)_c^{(2)} \\
 \frac{\perp}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} (\rightarrow I)^{(3)}
 \end{array}
 \quad (5 \text{ Punkte})$$

(c) (x nicht frei in A)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow \forall x B(x) \quad A^{(1)}}{\forall x B(x)} (\rightarrow E) \\
 \frac{\forall x B(x)}{B(a)} (\forall E) \\
 \frac{B(a)}{A \rightarrow B(a)} (\rightarrow I)^{(1)} \quad \mathcal{D} \\
 \frac{A \rightarrow B(a)}{B(a)} (\rightarrow E) \\
 \frac{B(a)}{A \rightarrow B(a)} (\rightarrow I) \\
 \frac{A \rightarrow B(a)}{\forall x (A \rightarrow B(x))} (\forall I) \\
 \frac{\forall x (A \rightarrow B(x))}{A \rightarrow B(a)} (\forall E)
 \end{array}
 \quad (6 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) $\forall x(A \rightarrow B(x)) \vdash_{\text{NK}} A \rightarrow \forall x B(x)$ (x nicht frei in A) (2 Punkte)

(b) $A \rightarrow \exists x B(x) \vdash_{\text{NK}} \exists x(A \rightarrow B(x))$ (x nicht frei in A)

Hinweis: Verwenden Sie den Beweis einer aussagenlogischen Formel. (3 Punkte)