

Kapitel 1

Elektrostatik

1.1 Vorbemerkungen

Im letzten Semester hatten Sie die Newtonsche Gravitationskraft als eine fundamentale Kraft kennengelernt. Sie wirkt zwischen allen massebehafteten Körpern und ist stets anziehend.

Das **Newtonsche Gravitationsgesetz** lautete für zwei Körper (Massenpunkte) mit Massen m_1 und m_2 :

$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.1)$$

Hierbei sind \vec{r}_1 und \vec{r}_2 Abstandsvektoren, die vom Ursprung eines (z. B. kartesischen) Koordinatensystems zu den Massenschwerpunkten der beiden Körper 1 und 2 zeigen. Der Vektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist der Verbindungsvektor zwischen den beiden Massenschwerpunkten, der von Körper 1 nach Körper 2 zeigt und r ist dessen Betrag. $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ist die Gravitationskonstante. Die Indizes "1" und "2" an \vec{F}_{12}^G deuten an, dass die Gravitationskraft vom Körper 2 ausgeht und auf Körper 1 wirkt. \vec{F}_{12}^G zeigt von m_1 nach m_2 , ist also anziehend. \vec{F}_{12}^G fällt außerdem quadratisch mit dem Abstand der beiden Körper ab. Die Eigenschaft "Masse" eines Körpers ist ein Maß dafür, wie stark dieser einen zweiten Körper anzieht.

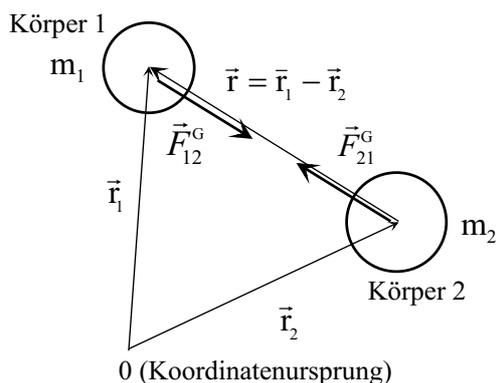


Abbildung 1.1: Zur Gravitationskraft zwischen zwei Körpern 1 und 2.

Ganz entsprechend können wir die Kraft \vec{F}_{21}^G betrachten, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt. Aus (1.1) erkennt man sofort, dass $\vec{F}_{21}^G = -\vec{F}_{12}^G$ gilt. \vec{F}_{21}^G und \vec{F}_{12}^G sind also entgegengesetzt gleich, was letztlich einen speziellen Fall des 3. Newtonschen Axioms darstellt.

Die Newtonsche Gravitationskraft ist eine extrem schwache Kraft. Dies erkennen wir auch ohne Rechnung daran, dass es der Masse der gesamten Erde bedarf, um auf einen Menschen eine Kraft von ca. 750 N in Richtung Erdmittelpunkt auszuüben. Die Gravitationskraft ist z. B. für die Bewegung der Planeten um die Sonne verantwortlich und sorgt dafür, dass Planeten wie die Erde oder auch die Sonne die Gestalt einer Kugel annehmen. Sie ist aber viel zu schwach, um Materie auf kleineren Skalen "im Inneren" zusammenzuhalten. So können wir beispielsweise an einen wenige Zentimeter dicken Stahlstab durchaus ein Gewicht von mehreren Tonnen hängen, bevor dieser zerbricht. Es muss also zwischen den Bestandteilen der Materie Kräfte geben, die erheblich stärker sind als die Gravitationskraft.

Hier stellt sich die Frage, warum wir diese Kräfte nicht ohne weiteres wahrnehmen können, bzw. warum diese Kräfte die Gravitationskraft auf großen Maßstäben nicht völlig überdecken. Grundsätzlich gibt es zwei mögliche Antworten:

1. die Kräfte wirken nur auf sehr kurzen Abständen, fallen also wesentlich schneller ab als die Gravitationskraft
2. die Kräfte fallen zwar langsam ab, "neutralisieren" sich aber in irgend einer Form auf großen Skalen.

Beide Formen von Kräften existieren. In späteren Kursen werden Sie die "starke Kraft" kennenlernen, die zwischen den Bestandteilen des Atomkerns auf Abständen von nur ca. 10^{-15} m wirkt. Ähnliche Eigenschaften hat die "schwache Kraft", die z. B. beim radioaktiven Zerfall (β -Zerfall) eine Rolle spielt. Sie ist zwar durchaus nicht schwach, wirkt aber nur auf extrem kleinen Abständen. Die elektrostatischen Kräfte, die wir im folgenden betrachten werden, sind vom zweiten Typ. Sie können sowohl abstoßend als auch anziehend sein. Im Allgemeinen sind Körper makroskopischer Größe elektrisch neutral, die elektrostatischen Kräfte kompensieren sich im Inneren des Körpers.

1.2 Die Coulomb-Kraft

Versuch: Wenn wir ein Wolltuch (Katzenfell) an einem Kunststoffstab reiben und Stab und Wolltuch anschließend trennen, so stellen wir fest, dass sich beide anschließend relativ stark anziehen. Umgekehrt stoßen sich zwei geriebene Kunststoffstäbe ab.

Wir haben hier offensichtlich eine neue Kraft beobachtet (die "elektrostatische Kraft" oder die "Coulomb-Kraft"), die uns hier in Form von "Reibungselektrizität" entgegengetreten ist. Wir können jetzt dem Stab bzw. dem Wolltuch ganz in Analogie zu den Massen bei der Gravitationskraft eine neue Eigenschaft zuschreiben, die ein Maß dafür ist, wie stark dieser Körper einen anderen anzieht oder abstößt. Wir nennen diese Eigenschaft die "**elektrische Ladung**" Q . Die **Einheit der elektrischen Ladung** ist das "**Coulomb**" (C).

Der Kunststoffstab trage die Ladung Q_1 , das Wolltuch die Ladung Q_2 . Ganz in Analogie zum Newtonschen Gravitationsgesetz können wir vermuten, dass auch die Coulombkraft einem Gesetz der Form

$$\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = \text{const.} \cdot f(r) \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.2)$$

gehört. Wir setzen also an¹, dass die Coulomb-Kraft in Richtung des Verbindungsvektors \vec{r} zwischen den Massen wirkt, einem uns noch unbekanntem Abstandsgesetz $f(r)$ gehorcht und symmetrisch in den Ladungen Q_1 und Q_2 aufgebaut ist. $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$ ist so angesetzt, dass wie beim Gravitationsgesetz $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = -\vec{F}_{21}^{\text{Coulomb}}$ ist, d. h. das dritte Newtonsche Axiom weiterhin gilt.

Im Gegensatz zur Gravitationskraft kann die Coulombkraft sowohl anziehend als auch abstoßend sein. Dies können wir durch unterschiedliche Vorzeichen der Ladungen Q_1 und Q_2 ausdrücken. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Ladung des Wolltuchs als positiv ansetzen, die Ladung des Kunststoffstabs als negativ. Zwei gleichnamig geladene Körper (z. B. zwei Kunststoffstäbe) stoßen sich ab. $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$ muss also in Richtung \vec{r} zeigen, d. h. die Konstante in (1.2) muss positiv sein. Für ungleichnamige Ladungen ist $Q_1 Q_2 < 0$, $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$ ist antiparallel zu \vec{r} gerichtet, die beiden Körper ziehen sich an.

Historisch gesehen war es ein weiter Weg, von der Beobachtung von Phänomenen wie der Reibungselektrizität zu einem Verständnis der Grundbausteine der Materie zu gelangen. Wir wollen diesen Weg an dieser Stelle nicht nachzeichnen. Heute wissen wir, dass die Atome aus Elektronen und Atomkernen aufgebaut sind, wobei sich die Atomkerne aus Neutronen und Protonen zusammensetzen. Neutronen und Protonen setzen sich ihrerseits aus elementaren Quarks zusammen. Elektronen und Protonen (bzw. die Quarks) sind die Träger der elektrischen Ladung. Die **Ladung eines Elektrons** beträgt $-e \approx -1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, die **Ladung der Protonen** $+e \approx +1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Ein elektrisch neutrales Atom enthält eine gleiche Anzahl von Protonen und Elektronen. Ionisiert man ein Atom (d. h. man entfernt Elektronen), so wird dieses positiv geladen.

Die Reibungselektrizität können wir nun qualitativ wie folgt erklären: Beim engen Kontakt des Wolltuchs mit dem Kunststoffstab treten einige Elektronen aus dem Wolltuch in den Stab über. Bei der Trennung von Stab und Tuch bleiben diese Elektronen im

¹Dies muss nicht notwendig so sein. Magnetische Kräfte haben beispielsweise eine kompliziertere Form, aber auch Scheinkräfte wie die Corioliskraft, die wir im letzten Semester kennengelernt haben.

Stab, dieser trägt dann eine negative Ladung, während das Tuch positiv geladen wird. Dass die Elektronen aus dem Tuch in den Stab übertraten und nicht umgekehrt können wir an dieser Stelle noch nicht beweisen. Tatsächlich ist es auch möglich, durch Reiben eines Porzellanstabs Elektronen in das Tuch übertreten zu lassen. Ein mit dem Wolltuch geriebener Porzellanstab und ein aufgeladener Kunststoffstab ziehen sich an, was die umgekehrte Aufladung der beiden Stäbe demonstriert.

An dieser Stelle stellt sich die Frage, wie sich die elektrischen Ladungen in einem gegebenen Material (Kunststoffstab, Metallstab, Gase, Flüssigkeiten usw.) verteilen. In einem Festkörper wie einem Metall- oder Kunststoffstab sind die Atome auf einem regelmäßigen Gitter angeordnet. Elektronen, die sich in der Nähe der Kerne auf "inneren Schalen" befinden, bleiben im allgemeinen fest an die Gitterbausteine gebunden, während sich die äußeren Elektronen über den gesamten Festkörper ausbreiten können. In Metallen können sich diese Elektronen frei bewegen, in Isolatoren dagegen nicht ohne weiteres².

In Gasen sind stets einige Atome ionisiert. Wie wir im letzten Semester diskutiert haben, sind die Geschwindigkeiten der Gasatome bzw. -moleküle über einen weiten Bereich verteilt (Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung). Einige dieser Atome besitzen eine kinetische Energie, die groß genug ist, um beim Stoß mit einem anderen Gasatom dieses zu ionisieren. Damit liegen auch in einem insgesamt neutralen Gas einige frei bewegliche Elektronen bzw. Ionen vor.

Auch in Flüssigkeiten sind einige Atome bzw. Moleküle ionisiert. Insbesondere sind etwa in Wasser eine Reihe von Salzen (z. B. NaCl) gelöst, wobei die Na^+ -Ionen einfach positiv ($Q = +e$), die Cl^- -Ionen einfach negativ ($Q = -e$) geladen sind. Auch das Wasser selbst spaltet teilweise in H^+ -Ionen (d. h. einfach positiv geladene Protonen) und OH^- -Ionen auf.

Die freie Beweglichkeit von Elektronen in Metallen können wir leicht experimentell demonstrieren.

Versuch: Berühren wir ein metallisches "Braunsesches Elektrometer" (s. Abb. 1.2) mit einem geladenen Porzellanstab, so schlägt das drehbar geladene Blättchen des Elektrometers aus.

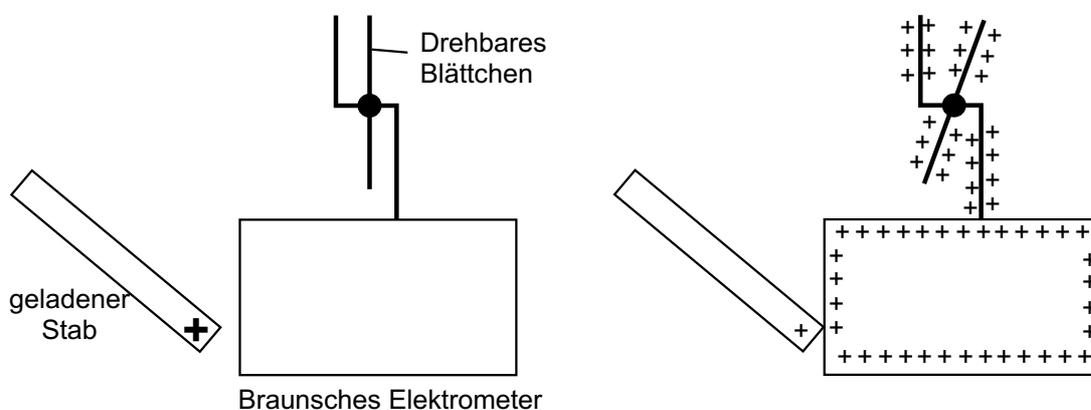


Abbildung 1.2: Das Braunseche Elektrometer

²Auf genauere Details, wie sich Elektronen in einem Isolator bewegen können, wollen wir hier nicht eingehen.

Bei Berührung des Elektrometers mit dem Stab treten Elektronen auf den Stab über, so dass das Elektrometer selbst positiv geladen wird. In dem Elektrometer können sich Elektronen wie in jedem Metall frei ausbreiten, so dass die positive Aufladung nicht auf die Kontaktstelle beschränkt bleibt, sondern sich über das gesamte Elektrometer verteilt. Da sich gleichnamige³ Ladungen abstoßen, dreht sich das Plättchen. Aus dem selben Grund ist die positive Ladung auf eine dünne Oberflächenschicht des Metalls beschränkt.

Ganz ähnlich funktioniert das Blättchenelektroskop (Abb. 1.3). Hier werden durch die aufgebrachte Ladung zwei leicht biegbare metallische Blättchen voneinander weggespreizt.

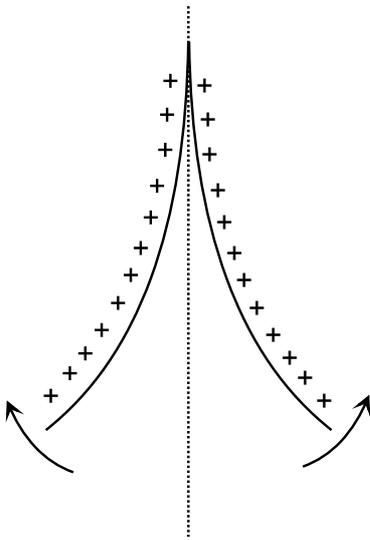


Abbildung 1.3: *Blättchenelektroskop*

Das Braunsche Elektrometer und das Blättchenelektroskop lassen sich auch zur *quantitativen* Bestimmung der aufgebrachten Ladung verwenden. Wir wollen aber an dieser Stelle auf eine quantitative Auswertung des Ausschlags der Elektrometer verzichten.

Statt dessen zeigen wir noch qualitativ, wie sich das Elektrometer bei Berührung mit verschiedenen, anfänglich ungeladenen Gegenständen verhält:

- bei Berührung mit einem neutralen Kunststoffstab, einem trockenen Holzstab oder einem Porzellanstab passiert nichts; die Ladungen bleiben auf dem Elektrometer
- bei Berührung mit einem Metall, einem feuchten Holz oder einem wassergefüllten Hohlrohr geht der Ausschlag des Elektrometers zurück, d. h. die Ladungen können abfließen. Das gleiche gilt, wenn wir die Luft durch einen Bunsenbrenner in der Nähe des Elektrometers erhitzen, da dann in der Luft zahlreiche freie Ladungen erzeugt werden.

Dies zeigt nochmals, dass Metalle bzw. der Wasserfilm auf dem Holzstab Ladungen leiten können, gute Isolatoren wie der Kunststoffstab dagegen nicht.

³Das Elektrometer hätte auch beim Aufbringen einer negativen Ladung ausgeschlagen, was wir durch Berührung mit dem Kunststoffstab zeigen.

Wenn wir mit dem wassergefüllten Rohr ein weiteres, zunächst ungeladenes Elektrometer berühren, so schlägt dieses aus. Wir haben also mit dem Rohr Ladungen von einem Elektrometer zu einem anderen transportiert.

Die Übertragung von Ladungen auf ein neutrales Objekt demonstrieren wir weiterhin durch einen mit Graphit überzogenen, an einer Schnur hängenden Ball, der vor einer geladenen Platte hängt. Der Ball ist zunächst neutral. Nachdem er die Platte berührt hat, wird er von der Platte abgestoßen. Der Ball wird von der Platte abgestoßen, wobei die abstoßende Kraft offensichtlich in Richtung des Verbindungsvektors zwischen den Ladungen wirkt, wie wir bei unserem Ansatz (1.2) bereits unterstellt hatten.

Wir wollen nun die Abstandsabhängigkeit $f(r)$ der elektrostatischen Kraft mittels einer Balkenwaage genauer untersuchen.

Versuch: Auf dem Waagearm einer Balkenwaage befindet sich eine geladene Kugel (Ladung Q_1) (s. Abb. 1.4). Ihr gegenüber wird in einem bestimmten Abstand r eine Kugel mit der Ladung Q_2 angebracht. Auf Q_1 wirkt die Coulombkraft $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$, die wir durch Gegengewichte so kompensieren, dass der Abstand r konstant bleibt. Durch die Gegengewichte lässt sich $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$ quantitativ messen. Misst man $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$ für verschiedene Abstände r , so findet man, dass $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$ *quadratisch* mit dem Abstand zwischen den Ladungen abnimmt.

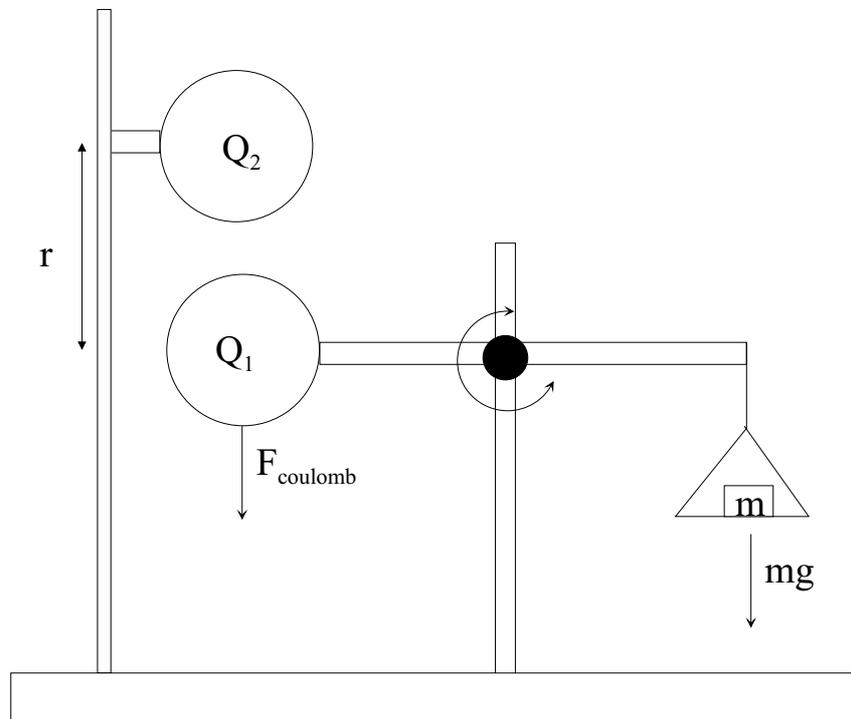


Abbildung 1.4: Waage zur Messung des quadratischen Abstandsgesetzes $f(r)$. Für $Q_1 = Q_2 = 0$ steht der Balken der Waage waggerecht. Nach Aufladung der beiden Kugeln (Abstand: r) wird die Masse m benötigt, um den Balken wagerecht zu halten. Bei Halbierung des Abstands r wird hierfür das vierfache Gewicht $4m$ benötigt.

Mit diesem experimentellen Ergebnis können wir in (1.2) $f(r) = 1/r^2$ setzen. $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$ gehorcht also dem gleichen Abstandsgesetz wie das Newtonsche Gravitationsgesetz.

Wir erhalten:

$$\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = \text{const.} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.3)$$

Es bleibt noch die Konstante festzulegen.

Im cgs-System wählt man: $\text{const.} = 1$, also

$$\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{Coulomb-Kraft, cgs-System}) \quad (1.4a)$$

Mit dieser Definition hat die Ladung die Einheit $\text{N}^{1/2}\text{m}$.

Im SI-System, das wir stets verwenden wollen, wählt man: $\text{const.} = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, also

$$\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{Coulomb-Kraft, SI-System}) \quad (1.4b)$$

Hierbei ist ε_0 die **Influenzkonstante** oder **elektrische Feldkonstante**. Sie hat den Zahlenwert

$$\varepsilon_0 = 8.8543 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (1.5)$$

Diese Definition, die das Coulomb als eigenständige Einheit einführt, ist im Moment noch nicht sehr einsichtig. Wir werden aber in den nachfolgenden Abschnitten sehen, dass sie durchaus Sinn macht.

1.3 Das Coulombsche Gesetz, elektrostatisches Feld

Zur Einführung verschiedener Grundbegriffe betrachten wir zunächst einmal die Kraft, die zwischen zwei Ladungen q_1 an der Position \vec{r}_1 und q_2 an der Position \vec{r}_2 wirkt. Aus der Experimentalphysik ist das Coulombsche Gesetz für diese Kraft bekannt. Danach wirkt auf die Ladung q_1 durch die Wechselwirkung mit der Ladung q_2 die Kraft

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (1.6)$$

Dieses Coulombsche Gesetz beinhaltet insbesondere die folgenden Aussagen:

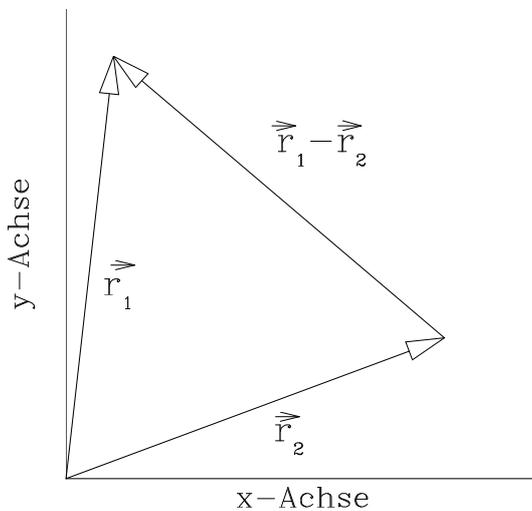


Abbildung 1.5: Kraft auf Ladung 1 von 2

- Die Stärke der Kraft ist proportional dem Produkt der beteiligten Ladungen: $|\vec{F}_{12}| \sim q_1 q_2$.
- Die Stärke der Kraft ist invers proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen: $|\vec{F}_{12}| \sim |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2}$.
- Die Richtung der Kraft ist parallel beziehungsweise antiparallel zum Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie von der Position \vec{r}_2 zur Position der Ladung, auf die die Kraft ausgeübt wird (\vec{r}_1), siehe auch Abbildung 1.1: $\vec{F}_{12} \sim \hat{e}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$.
- Haben also beide Ladungen das gleiche Vorzeichen (die Proportionalitätskonstante k im Coulombschen Gesetz ist positiv), so wird die Ladung q_1 durch die Kraft \vec{F}_{12} abgestoßen. Haben die beiden Ladungen unterschiedliches Vorzeichen (sei z. B. q_1 die Ladung eines Elektrons, d. h. $q_1 < 0$, und q_2 die Ladung eines Protons, $q_2 > 0$), so wird die Ladung q_1 von der Ladung q_2 angezogen.

Das Coulombsche Gesetz ist natürlich verträglich mit den Newtonschen Gesetzen der Mechanik. So gilt für die Kraft, die von der Ladung q_1 auf die Ladung q_2 ausgeübt wird („actio = reactio“)

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (1.7)$$

Das Coulombsche Gesetz stellt eine Beziehung her zwischen mechanischen und elektrostatischen Größen. Daher kann diese Beziehung benutzt werden, um die Einheiten, in denen wir die die Ladungen angeben wollen, festzusetzen.

In dem von uns verwendeten *SI System* setzen wir die Konstante

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0 = 8,854 \dots 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}. \quad (1.8)$$

Dabei steht "C" für Coulomb, der Einheit, in der Ladungen angegeben werden sollen. Zwei Ladungen vom Betrag $|q_1| = |q_2| = 1 \text{ C}$ im Abstand $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 1 \text{ m}$ üben nach dem Coulombgesetz (1.6) eine Kraft aus vom Betrag

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} = 8,988 \dots 10^9 \text{ N}.$$

Betrachtet man N Ladungen, die sich an den Stellen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ befinden, so gilt nach dem Superpositionsprinzip für die Kraft auf eine Probeladung q am Ort \vec{r} :

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.9)$$

Ziel ist es, eine Messgröße für das Kraftfeld zu finden, das durch die N Ladungen q_i an den Positionen \vec{r}_i erzeugt wird. Der Betrag dieser Kraft ist abhängig von der Größe der Probeladung q . Ausserdem wird das Einbringen einer Probeladung die Verteilung der anderen Ladungen und damit das Feld der N Ladungen beeinflussen. Deshalb definiert man das *elektrische Feld* \vec{E} an der Stelle \vec{r} :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}}. \quad (1.10)$$

Die Grenzwertbildung drückt aus, dass die Probeladung q verschwindend klein sein muss, um die Ladungsverteilung, die das Kraftfeld erzeugt, nicht zu stören.

Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld, für das die aus der Mechanik bekannten Transformationseigenschaften gelten. Beispielsweise beschreibt man also die Transformation des elektrischen Feldes bei einer Drehung des Koordinatensystems durch die Multiplikation mit der zugehörigen Drehmatrix.

Graphisch darstellen lässt sich das elektrische Feld durch *Feldlinien*, die folgende Eigenschaften besitzen:

- a) Die Richtung der Feldlinien gibt die Richtung des \vec{E} -Feldes an der Position der Feldlinien an.
- b) Die Zahl der Feldlinien durch eine Einheitsfläche senkrecht zu ihnen ist ein Maß für den Betrag von \vec{E} an dieser Stelle.
- c) Da eine positive Probeladung von positiven Punktladungen abgestoßen wird, sind diese positiven Punktladungen Ausgangspunkte von Feldlinien. Entsprechend sind negative Punktladungen Endpunkte von Feldlinien. Man spricht auch von *Quellen* und *Senken* des elektrischen Feldes.

Das elektrische Feld von N Punktladungen berechnet sich nach dem Superpositionsprinzip zu

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.11)$$

Statt diskreter Punktladungen treten oft kontinuierliche Ladungsverteilungen auf. An die Stelle der Summation tritt nun die Integration über die räumliche Verteilung der Ladung. Diese bezeichnen wir als *Ladungsdichte* $\rho(\vec{r}')$, die die Ladung pro Volumen an \vec{r}' im infinitesimalen Volumenelement $d^3\vec{r}'$ angibt. Die Ladungsdichte wird also angegeben in Einheiten von Ladung pro Volumen. Wir erhalten für das elektrische Feld einer Ladungsverteilung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.12)$$

Integriert man die Ladungsdichte über ein Volumen V , so erhält man die Gesamtladung in diesem Volumen:

$$\int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') = Q.$$

1.3.1 Die Delta-Funktion

Wie lässt sich die Ladungsdichte von einzelnen Punktladungen mathematisch beschreiben? Man benutzt dafür die *Delta-Funktion*, die von Paul Dirac in Analogie zum Kronecker-Symbol δ_{ik} als Verallgemeinerung für kontinuierliche Indizes eingeführt wurde. Es ergibt sich für die Ladungsdichte von Punktladungen:

$$\rho(\vec{r}') = \sum_i q_i \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i),$$

wobei die \vec{r}_i die Orte bezeichnen, an denen die einzelnen Punktladungen angebracht sind. Im folgenden soll auf die wichtigsten Eigenschaften der Delta-Funktion eingegangen werden. Genaugenommen ist sie weder eine *Funktion* im üblichen Sinne noch im Riemannschen Sinne integrierbar. Sie stellt jedoch ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel dar und wird exakt im Rahmen der Distributionentheorie behandelt.

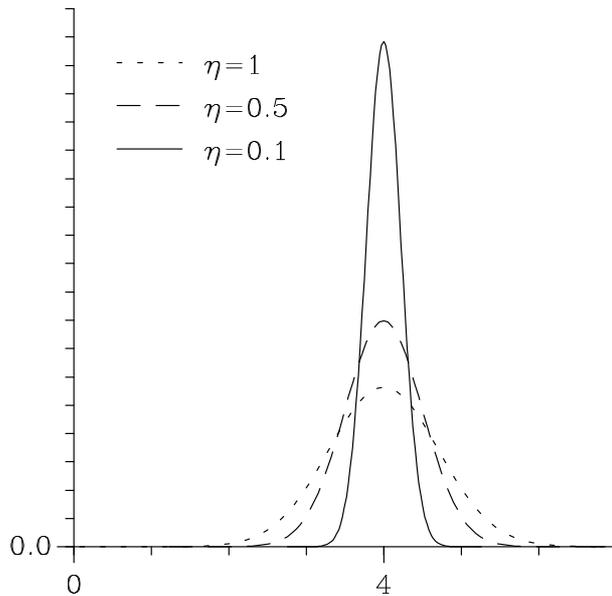
1. Betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall. Eine Definitionsgleichung für die Delta-Funktion lautet

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Man kann sich die Delta-Funktion aus einer Folge von Gauß-Kurven entstanden denken, deren Halbwertsbreite η immer kleiner wird, der Flächeninhalt jedoch gleich bleibt (vgl. Figur 1.2):

$$\delta(x - a) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - a)^2}{\eta}\right).$$

Der Vorfaktor $1/\sqrt{\pi\eta}$ ist ein Normierungsfaktor, der dafür sorgt, dass das Integral über die ganze reelle Achse für die jeweilige Gauß-Kurve immer auf 1 normiert ist.

Abbildung 1.6: δ Funktion als Grenzfall von Gauß Funktionen ($a=4$)

3. Ist das Argument der Delta-Funktion eine Funktion $y(x)$, die im betrachteten Intervall $[a, b]$ bei x_i eine einfache Nullstelle besitzt (d.h. $y(x_i) = 0, y'(x_i) \neq 0$), so gilt:

$$\delta(y(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{d}{dx} y \right|_{x_i}}.$$

Beispiel: $y(x) = x^2 - a$, mit den Nullstellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{a}$. Einsetzen:

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = |2x|_{x_{1/2}} = 2\sqrt{a}$$

$$\delta(x^2 - a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} (\delta(x - \sqrt{a}) + \delta(x + \sqrt{a})).$$

4. Im dreidimensionalen Fall gelten

$$\delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \vec{r}' = \vec{r} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellt man die Vektoren im Argument der Delta-Funktion durch kartesische Koordinaten dar, so ergibt sich die Delta-Funktion im 3-dimensionalen Raum als Produkt

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0).$$

Die Darstellung ist etwas komplizierter im Fall von krummlinigen Koordinaten (u, v, w) . In diesem Fall betrachten wir einen Ansatz für die Delta-Funktion der Form:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \Gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \cdot \delta(v - v_0) \cdot \delta(w - w_0). \quad (1.13)$$

Falls \vec{r}_0 im betrachteten Integrationsvolumen V liegt muss gelten

$$\begin{aligned} 1 &= \int_V d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \int_V du dv dw \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \cdot \delta(v - v_0) \cdot \delta(w - w_0) \end{aligned}$$

Dabei erhalten wir durch die Anwendung der Substitutionsregel für das Volumenelement d^3r im zweiten Teil dieser Gleichung

$$d^3r = dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw$$

die Funktionaldeterminante oder auch Jakobideterminante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{vmatrix}$$

Dabei haben wir für die Ableitungen die abkürzende Schreibweise benutzt:

$$\partial_u x = \frac{\partial x}{\partial u}. \quad (1.14)$$

Es ist klar, dass die Gleichung (1.13) und folgende genau dann erfüllt wird, wenn wir in dem Ansatz (1.13) einsetzen

$$\Gamma(u, v, w) = \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Big|_{r_0} \right)^{-1}$$

Mit dieser Regel ergibt sich zum Beispiel für die Delta-Funktion in Kugelkoordinaten

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \vartheta_0} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0).$$

1.4 Differentialoperatoren und Integralsätze

Es sollen nun einige mathematische Voraussetzungen geschaffen werden, die für die Beschreibung elektrostatischer (und elektrodynamischer) Effekte notwendig sind.

Als **Beispiel** zur Motivation wollen wir zunächst die mathematische Beschreibung der Ladungserhaltung diskutieren: Sei V ein Volumen mit der Oberfläche O und der Raumladungsdichte $\varrho(\vec{r})$. Die Gesamtladung in diesem Volumen V ($Q(V)$) ist also das Integral der Ladungsdichte über das Volumen V :

$$Q(V) = \int_V \varrho(\vec{r}) dV$$

Ändert sich nun diese Ladung in V mit der Zeit ($dQ/dt \neq 0$), so kann dies wegen der Ladungserhaltung nur so geschehen, dass durch die Oberfläche von V ein Strom \vec{j} fließt. Übersetzt in die Sprache der Mathematik bedeutet dies:

$$\frac{d}{dt} Q(V) = \frac{d}{dt} \int_V \varrho(\vec{r}) dV = - \oint_O \vec{j} \cdot d\vec{f} \quad (1.15)$$

Das letzte Integral ist ein **Flächenintegral**, das als "Wächter" beobachtet, wieviel Ladung durch die Oberfläche in das Volumen hineinfließt (der Integrand $\vec{j} \cdot d\vec{f}$ muss dann negativ sein) oder aus diesem herausfließt (der Integrand ist in diesem Fall positiv, d.h. \vec{j} hat eine Komponente parallel zu $d\vec{f}$). Bei der Definition des Flächenintegrals sollte also der Vektor $d\vec{f}$ senkrecht zur Oberfläche stehen und nach aussen weisen.

1.4.1 Das Flächenintegral

Mit dem Flächenintegral (auch Flussintegral)

$$\Phi = \int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad (1.16)$$

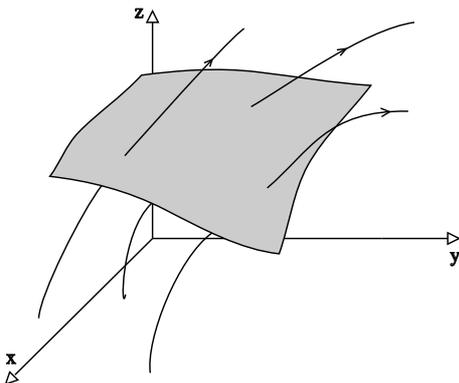


Abbildung 1.7: Flächenintegral eines Vektorfeldes

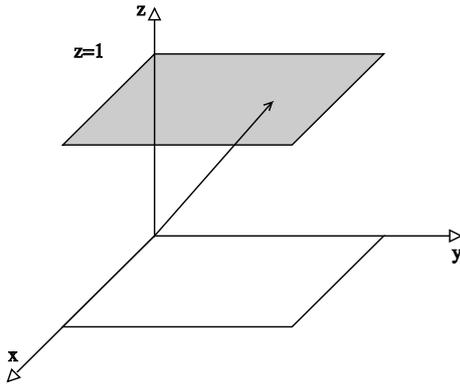


Abbildung 1.8: Parametrisierung der Abbildung des Einheitsquadrates

wird der Fluss von \vec{A} durch F beschrieben, wobei \vec{A} ein beliebiges Vektorfeld und F eine Fläche im dreidimensionalen Raum sein soll. (s. Abb 1.7). Dabei ist der Betrag von $d\vec{f}$ ein infinitesimales Flächenstück, dessen Richtung senkrecht zur Fläche steht. Zur Berechnung von Φ muss die Fläche parametrisiert und anschließend $d\vec{f}$ bestimmt werden.

a) Analog der Parametrisierung eines Linienintegrals wird auch hier die Fläche F parametrisiert dadurch dass wir die Ortsvektoren, die auf dieser Fläche enden, als Funktion von 2 Parametern darstellen:

$$F := \{\vec{r}(u, v); \quad u \in [u_0, u_1], \quad v \in [v_0, v_1]\}$$

Dabei ist die Parametrisierung $(\vec{r}(u, v))$ eine Abbildung der ebenen Fläche UV in die gekrümmte Fläche F im \mathcal{R}^3 .

Beispiele :

1. Sei F ein Einheitsquadrat parallel zur x - y -Ebene durch $z = 1$ (s. Abb. 1.8), so lautet die entsprechende Flächenparametrisierung

$$F_{\square} = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} u \in [u_0, u_1] \\ v \in [v_0, v_1] \end{array} \right\}.$$

2. Sei F_0 die Oberfläche einer Kugel mit Radius R , dann lautet die Flächenparametrisierung

$$F_0 = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \vartheta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$$

b) Nachdem wir zunächst einmal die Fläche parametrisiert haben, wollen wir nun die Differentialform $d\vec{f}$ bestimmen. Dazu konstruieren wir zunächst einmal in jedem Punkt der Fläche 2 linear unabhängige Vektoren, $d\vec{a}$ und $d\vec{b}$, die tangential zur Fläche stehen:

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \\ d\vec{b} &= \vec{r}(u, v + dv) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Damit ist

$$d\vec{f} = \pm d\vec{a} \times d\vec{b}.$$

Forderung : Das Vorzeichen soll so gewählt werden, dass $d\vec{f}$ bei geschlossenen Flächen nach aussen zeigen soll.

Betrachten wir die Kugelfläche: Mit der Parametrisierung nach obigem Beispiel gilt

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta = R \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta, \\ d\vec{b} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ \implies d\vec{f} &= \pm R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta \cos \varphi \\ \sin^2 \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi \\ &= +R^2 \sin \vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

blabla Das positive Vorzeichen ergibt sich mit der oben genannten Forderung, dass die Flächennormale $d\vec{f}$ einer geschlossenen Oberfläche nach aussen weist.

c) Mit diesen Überlegungen folgt nun für das Flächenintegral über eine Kugelfläche O mit einem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = a\vec{r}$

$$\begin{aligned} \oint_O \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi aR\hat{e}_r R^2 \sin \vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi \\ &= aR^3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi aR^3. \end{aligned}$$

1.4.2 Divergenz

Mit dieser Definition des Flächenintegrals können wir nun Aussagen machen, an welchen Stellen ein Vektorfeld \vec{A} Quellen besitzen muss. Analog zu dem Beispiel, dass das Vektorfeld \vec{A} den Fluss einer Flüssigkeit beschreibt, sagen wir, dass das Vektorfeld \vec{A} in all den Volumina eine Quelle haben muss, aus denen mehr herausfließt als hineinfließt. Bei diesen Volumina ist also das Integral des Vektorfeldes über die Oberfläche des Volumens positiv. Liefert dieses Oberflächenintegral einen negativen Wert, so sagen wir, dass das Vektorfeld in dem betrachteten Volumen eine Senke besitzt. Um die Quellen (Senken) genauer zu lokalisieren, betrachten wir eine Folge von Volumina ΔV , die alle einen Punkt \vec{r}_0 enthalten, und deren Volumen kleiner wird. Dies erlaubt uns die Quellstärke oder **Divergenz** des Vektorfeldes im Punkte \vec{r}_0 zu definieren als

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_O \vec{A}(\vec{r}_0) \cdot d\vec{f}, \quad (1.17)$$

wobei das Integral jeweils über die Oberfläche von ΔV zu berechnen ist. Für diese Definition gilt also:

- $\operatorname{div} \vec{A}$ ist eine skalare Größe,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) > 0 \iff \vec{A}$ hat Quellen in \vec{r}_0 ,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) < 0 \iff \vec{A}$ hat Senken in \vec{r}_0 ,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) = 0 \iff \vec{A}$ ist quellenfrei in \vec{r}_0 .

Die Definition 1.17 ist natürlich sehr umständlich für eine explizite Berechnung der Quellstärke. Wie wir aber in der folgenden Behauptung sehen, gibt es sehr einfache Methoden zur Berechnung der Divergenz.

Behauptung: Beschreibt man das Vektorfeld \vec{A} in kartesischen Koordinaten und kartesischen Einheitsvektoren \hat{e}_i

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z && \text{so gilt:} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \vec{A} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

auch hier haben wir zur Abkürzung für die Ableitungen die Schreibweise von (1.14) gewählt. Die Schreibweise der Divergenz mit dem Nabla Operator $\vec{\nabla}$ erinnert an die Berechnung des Gradienten eines skalaren Feldes u in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} u$$

Beweis: Zum Beweis betrachten wir eine Folge von kubischen Volumina mit dem Punkt \vec{r}_0 in einer Ecke und Seiten gegeben durch die Intervalle $[x_0, x_0 + \Delta x]$, $[y_0, y_0 + \Delta y]$, $[z_0, z_0 + \Delta z]$ (siehe auch Figur 1.5). Das Volumen dieser Würfel ist $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

Das Integral des Vektorfeldes \vec{A} integriert über die Oberfläche O dieses Würfels lässt sich aufteilen in die Beiträge über die 6 Teilflächen des Würfels: F_i

$$\int_O \vec{A} \cdot d\vec{f} = \sum_i \int_{F_i} \vec{A} \cdot d\vec{f}, \quad F_i: \text{Oberflächen von } V.$$

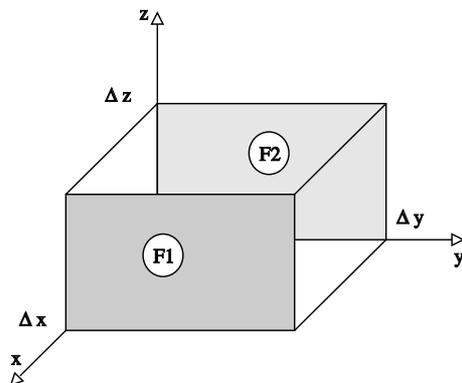


Abbildung 1.9: Das Volumen ΔV zum Berechnung der Divergenz in kartesischen Koordinaten

Für die Flächen F_1 und F_2 (beide parallel zur yz Ebene) gilt nach geeigneter Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
 \int_{F_1, F_2} \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \int_{F_1} \vec{A}(x_0 + \Delta x, y, z) \cdot d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{A}(x_0, y, z) \cdot d\vec{f} \\
 &= \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} A_x(x_0 + \Delta x, y, z) dy dz + \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} -A_x(x_0, y, z) dy dz \\
 &= \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \left[A_x(x_0, y, z) dx dz + \frac{\partial A_x(\vec{r}_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 A_x(\vec{r}_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + (-A_x(x_0, y, z)) \right] dy dz
 \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile $A_x(x_0 + \Delta x, y, z)$ nach Taylor entwickelt wurde. Da $\Delta x \ll 1$ gelten soll, kann die Reihe nach der ersten Ordnung abgebrochen werden.

$$\begin{aligned}
 \implies \int_{F_1, F_2} \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \int \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta x dy dz \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta x \Delta y \Delta z \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta V.
 \end{aligned}$$

Analog erhält man die Flächenintegrale für die vier weiteren Flächen. Eingesetzt in die Definition der Divergenz (1.17) folgt:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_O \vec{A}(\vec{r}_0) \cdot d\vec{f} \\
 &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) + \frac{\partial}{\partial y} A_y(\vec{r}_0) + \frac{\partial}{\partial z} A_z(\vec{r}_0) \right) \Delta V
 \end{aligned}$$

Achtung: Diese Darstellung der Divergenz gilt nur in kartesischen Koordinaten!

In Kugelkoordinaten gilt z.B.:

$$\text{mit } \vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\vartheta \hat{e}_\vartheta + A_\varphi \hat{e}_\varphi \quad (1.18)$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi. \quad (1.19)$$

Obwohl also die Divergenz in Kugelkoordinaten recht wüst aussieht, kann es sich als zweckmäßig herausstellen mit ihr zu rechnen.

Beispiel: Als Beispiel für die Berechnung der Divergenz in verschiedenen Koordinatensystemen betrachten wir die Kraft auf eine Probeladung $q = 1$ Coulomb an der Position \vec{r} , die durch Ladung $q_1 = 1$ C an der Position in $\vec{r}_1 = \vec{0}$ ausgeübt wird:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_1}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

a) in kartesischen Koordinaten gilt:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}; \quad F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}; \quad F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}.$$

$$\text{Mit } \text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z \quad \text{ist dann}$$

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \right) = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt natürlich nur für Vektoren $\vec{r} \neq 0$, da im Fall $\vec{r} = 0$ auch der Nenner identisch 0 wird, die Divergenz von \vec{F} ist also in diesem Fall noch nicht definiert.

b) in Kugelkoordinaten gilt:

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r; \quad F_\vartheta = F_\varphi = 0!$$

Mit (1.19) ist also

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (1.20)$$

was offensichtlich einfacher zu rechnen ist. Auch hier ist natürlich der Vorbehalt zu machen, dass wir nur Vektoren $\vec{r} \neq 0$ betrachten; den Fall $\vec{r} = 0$ werden wir weiter unten noch einmal aufgreifen

1.4.3 Der Gaußsche Integralsatz

Sei O die Oberfläche eines Volumens V und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Der Gaußsche Integralsatz ist nun eine Umrechnungsbeziehung zwischen Flächen- und Volumenintegral :

$$\boxed{\oint_O \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_V \text{div} \vec{A} dV} \quad (1.21)$$

Die linke Seite der Gleichung stellt den Fluss des Vektorfeldes aus der geschlossenen Oberfläche O dar, die rechte Seite der Gleichung ist das Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes im ganzen Volumen V .

Beweis: Wegen der Linearität des Integrals gilt

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV = \sum \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \int_{\Delta V_i} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV$$

wo V in n Teile ΔV_i zerlegt wurde, die das ganze Volumen V ausschöpfen.

Dann folgt bei immer feinerer Zerlegung die Riemannsche-Summe (mit \vec{r}_i einem Punkt in V_i)

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV &= \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta V_i \\ &\stackrel{\text{(Glg. 1.17)}}{=} \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{\Delta V_i} \oint_O \vec{A} \cdot d\vec{f} \Delta V_i = \int_O \vec{A} \cdot d\vec{f}; \end{aligned}$$

letzteres, da sich die beiden Integrale über die gemeinsame Grenzfläche zweier aneinandergrenzender Volumina wegen ihrer antiparallelen Flächennormalen gegenseitig kompensieren. \square

Mit den nun gewonnenen mathematischen Kenntnissen noch einmal zurück zur Kontinuitätsgleichung (1.15), die wir zu Beginn dieses Abschnittes formuliert haben. Wir hatten gesagt, dass die zeitliche Änderung der Ladung in einem Volumen V begleitet sein muss von einem entsprechenden Strom \vec{j} durch die Oberfläche des konstanten Volumens

$$\frac{d}{dt} Q(V) = \frac{d}{dt} \int_V \varrho(\vec{r}) dV = - \oint_O \vec{j} \cdot d\vec{f} = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

wobei wir bei dem letzten Teil dieser Gleichung den Gaußschen Satz angewandt haben. Da diese Gleichung für alle Volumina V gelten muss, können wir die Integranden der beiden Volumenintegrale in dieser Beziehung gleich setzen oder auch schreiben

$$\boxed{\frac{d}{dt} \varrho(\vec{r}) + \operatorname{div} \vec{j} = 0.} \quad (1.22)$$

Dies ist die **differentielle Form der Kontinuitätsgleichung**, die im übrigen nicht nur in der Elektrodynamik eine Rolle spielt.

Mit den oben eingeführten Werkzeugen lässt sich noch folgende interessante Behauptung beweisen:

Sei \vec{F} ein Vektorfeld mit $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r$, dann ist

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}). \quad (1.23)$$

Beweis: Bereits in Gleichung (1.20) haben wir gezeigt, dass $\operatorname{div} \vec{F}$ identisch 0 ist für alle Vektoren $\vec{r} \neq 0$. Betrachten wir nun eine Kugel mit Radius R , Volumen V um $\vec{r} = 0$, dann ist

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \oint_O \vec{F} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^2} \hat{e}_r R^2 \sin \vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0}$$

Wobei $R = r$ mit der Begründung benutzt wurde, dass die Kugeloberfläche in den Aufpunkt \vec{r} gelegt wird.

Mit der Definition der δ -Funktion folgt die Behauptung. □

1.4.4 Die Rotation

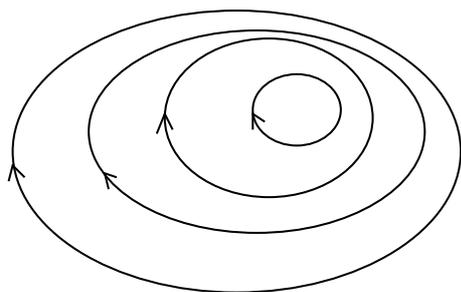


Abbildung 1.10: Nicht-wirbelfreies Vektorfeld $\vec{A}_1: \oint_\tau \vec{A}_1 \cdot d\vec{s} \neq 0$

Ähnlich wie bei dem oben definierten Flächenintegral müssen wir auch bei der Berechnung des Wegintegrals für ein Vektorfeld \vec{A} entlang eines Weges τ zunächst einmal den Weg parametrisieren, in dem wir die Folge von Vektoren, die unseren Weg τ definieren darstellen als Funktion einer Variablen t , unter die wir uns zB. die Zeit vorstellen können, die bei der “Wanderung” entlang des Weges vom Startwert t_0 bis zum Endwert t_1 anwächst:

$$\tau := \{\vec{r}(t); \quad t \in [t_0, t_1]\}$$

Mit dieser Parametrisierung berechnet sich das Wegintegral

$$\int_\tau \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (1.24)$$

Solche Linienintegrale sind uns bereits in der Mechanik begegnet, ist zB. \vec{A} ein Kraftfeld, so ergibt das Integral in Gleichung (1.24) die Arbeit, die in diesem Kraftfeld entlang des Weges τ geleistet wird.

Ist das Vektorfeld \vec{A} charakterisiert durch geschlossene Feldlinien, wie das in Abbildung 1.10 der Fall ist, so sagt man das Vektorfeld \vec{A} besitzt Wirbel in Anlehnung zB. an das Strömungsfeld eines Flusses. In diesem Fall ist das Linienintegral des Vektorfeldes

\vec{A} entlang des Weges, der durch die Feldlinie bezeichnet ist sicher von 0 verschieden (für die Vektoren \vec{A} und $d\vec{r}$ tragen nur die parallelen Komponenten bei).

Dementsprechend definiert man die Wirbelstärke oder Rotation eines Vektorfeldes an einem Punkt \vec{r}_0 als einen Vektor $\text{rot}\vec{A}(\vec{r}_0)$, dessen Projektion in Richtung eines Einheitsvektors \hat{n} berechnet werden kann durch

$$\hat{n} \text{rot}\vec{A}(\vec{r}_0) := \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.25)$$

wobei die Flächen ΔF eine Folge von Flächen bilden, die alle den Punkt \vec{r}_0 enthalten und deren Flächennormale in Richtung von \hat{n} weist. Das Integral in (1.25) ist dann das Linienintegral über den Rand der Fläche ΔF , wobei der Umlauf entsprechend der "rechten Hand Regel" so zu führen ist, dass die Flächennormale parallel zu \hat{n} steht.

Bei der Benutzung von kartesischen Koordinaten kann die Rotation einfach berechnet werden gemäß :

Behauptung:

$$\text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

Beweis: den Beweis führen wir nur für die x -Komponente, für die anderen Komponenten ergibt sich der Beweis entsprechend: $(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \hat{e}_x \text{rot}\vec{A}$. (\hat{e}_x steht senkrecht auf der y - z -Ebene). Mit (1.25) folgt dann

$$\hat{e}_x \text{rot}\vec{A} = \lim_{\Delta F_{yz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F_{yz}} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Betrachten wir nun die in Abbildung 1.11 dargestellte Parametrisierung der Fläche ΔF_{yz} , so ergibt sich

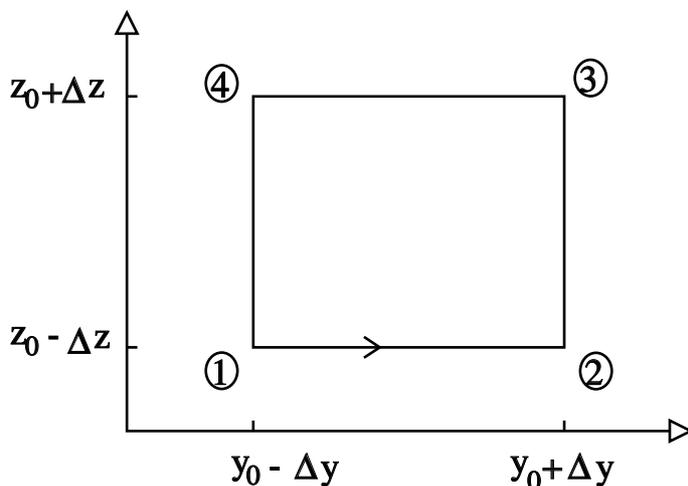


Abbildung 1.11: Parametrisierung der $x = x_0$ -Fläche

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 A_y dy + \int_2^3 A_z dz + \int_3^4 A_y dy + \int_4^1 A_z dz \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \int_1^2 A_y dy &= \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} A_y(x_o, y, z_o - \Delta z) dy \\ &= \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} \left[A_y(x_o, y, z_o) dy + (-\Delta z) \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dots \right] dy \\ \text{und } \int_3^4 A_y dy &= - \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} A_y(x_o, y, z_o + \Delta z) dy \\ &= \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} \left[A_y(x_o, y, z_o) dy + (\Delta z) \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dots \right] dy. \end{aligned}$$

Analoges gilt für die Wege 2 nach 3 und 4 nach 1, wobei die Taylorentwicklung stets nach dem linearen Glied abgebrochen wurde.

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \left[A_y(x_o, y, z_o) dy + (-\Delta z) \frac{\partial A_z}{\partial y} - A_y(x_o, y, z_o) dy + \Delta z \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] dy \\ &+ \int_2^3 A_z dz + \int_4^1 A_z dz = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) 4\Delta y \Delta z \\ \iff \hat{e}_x \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \lim_{\Delta F_{yz} \rightarrow 0} \frac{4\Delta y \Delta z}{\Delta F_{yz}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Der Beweis für die y - und z -Komponente folgt auf die gleiche Weise.

Achtung:

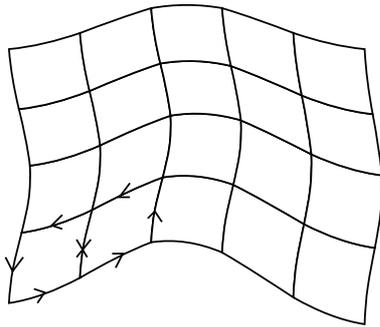
Auch die Rotation sieht in anderen Koordinaten anders aus und muss entsprechend abgeändert werden!

1.4.5 Der Stokessche Integralsatz

Ähnlich wie der Gaußsche Integralsatz ein Volumen- in ein Flächenintegral umwandelt, verbindet der Stokessche Integralsatz Flächen- und Linienintegrale:

$$\boxed{\oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f}} \quad (1.27)$$

Es sei τ der Rand der Fläche F ; $d\vec{f}$ und der Umlaufsinn von τ sind einander im Sinne einer Rechtsschraube zugeordnet.

Abbildung 1.12: Zerlegung einer gekrümmten Fläche in kleine Flächenelemente ΔF_i

Beweis: Wir denken uns F in kleine Flächenstücke ΔF_i zerlegt, also gilt (s. Abb. 1.12):

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \sum_i \int_{\Delta F_i} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f}.$$

Man lässt nun die Flächenstücke ΔF_i immer kleiner werden, das bedeutet, dass die Wirbelstärke $\operatorname{rot} \vec{A}$ in diesen Flächenelementen ΔF_i konstant gesetzt werden kann. Also lässt sich das Integral als Riemann-Summe schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\Delta F_i} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} &= \lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \sum_i \hat{n}_i \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \Delta F_i \\ &= \lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta F_i \frac{1}{\Delta F_i} \oint_{\tau_i} \vec{A} d\vec{s} \end{aligned}$$

letzteres gilt nach der Definition der Rotation nach Glg (1.25).

Beachtet man nun, dass sich an allen Grenzlinien zwischen 2 Flächen ΔF_i die Linienintegrale wegen der gegenläufigen Integrationsrichtung wegheben, so verbleibt nur das Linienintegral über den äusseren Rand der Gesamtfläche F . Damit ist (1.27) bewiesen.

Mit der Definition der Rotation und dem Stokesschen Satz kann man nun auf einfache Weise nachweisen ob Kraftfelder konservativ sind.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{A}(\vec{r}) \text{ wirbelfrei} &\iff \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{0} \\ &\implies \oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} = 0 \end{aligned}$$

Dabei ist F eine beliebige Fläche und τ der orientierte Rand dieser Fläche. Wähle nun zwei Punkte P_1 und P_2 auf dem Rand τ . Sei der Weg W_1 der Integrationsweg $W_1 \hat{=} P_1 \rightarrow P_2$ und $W_2 \hat{=} P_2 \rightarrow P_1$, wobei beide Weg in gleicher Richtung durchlaufen werden sollen wie entlang durch das Wegintegral über die geschlossene Kurve τ vorgegeben (siehe Abbildung 1.13). Dann gilt:

$$\oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1, W_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s} + \int_{P_2, W_2}^{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1, W_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{P_1, -W_2}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

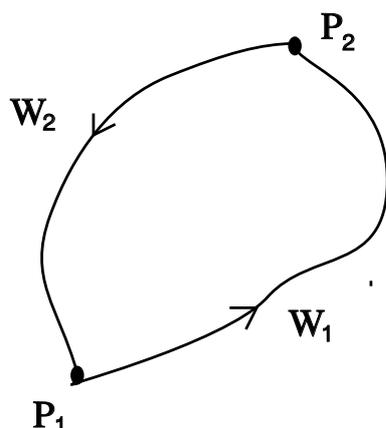


Abbildung 1.13: Zur Wegunabhängigkeit des Integrales über \vec{A}

Das Minuszeichen in der letzten Gleichung erhalten wir durch Umkehrung des Weges W_2 . Wir haben also gezeigt, dass bei wirbelfreien Feldern das Linienintegral vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 unabhängig ist vom Weg den wir dabei wählen (Beachte, dass der Beweis gültig ist für alle Flächen F , d.h. für alle geschlossenen Wege τ). Hängt der Wert des Linienintegrals aber nur von den Endpunkten ab, so können wir eine Funktion Φ bestimmen mit:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = -[\Phi(P_2) - \Phi(P_1)] = -\int_{P_1}^{P_2} d\Phi = -\int_{P_1}^{P_2} \text{grad}\Phi(\vec{r})d\vec{r}. \quad (1.28)$$

Damit haben wir also gezeigt, dass sich jedes wirbelfreie Vektorfeld \vec{A} als negativer Gradient eines Skalarfeldes darstellen lässt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r}). \quad (1.29)$$

Das Minuszeichen in dieser Beziehung ist natürlich nur eine Frage der Konvention. Kraftfelder \vec{A} , die die Bedingung (1.29) erfüllen werden in der Mechanik "konservative Kraftfelder" genannt, weil bei der Bewegung eines Teilchens in einem solchen Kraftfeld die Energie erhalten bleibt.

Zur Vervollständigung wiederholen wir an dieser Stelle die wichtigsten Eigenschaften des Gradient Operators:

1. Mit dem Gradient Operator können wir das Differential $d\Phi$ umschreiben: $d\Phi = \text{grad}\phi \cdot d\vec{r}$.
2. $\text{grad}\Phi(\vec{r}_0)$ lässt sich als Vektor interpretieren, der am Punkt \vec{r}_0 in die Richtung weist, in der das skalare Feld Φ am stärksten ansteigt. Die Länge dieses Vektors entspricht dem Betrag dieses stärksten Anstiegs.
3. In der kartesischen Darstellung kann man den Gradienten berechnen als

$$\text{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \Phi$$

Behauptung:

Wir wollen nun zeigen, dass aus der Definition 1) die Eigenschaften 2) und 3) folgen:

Beweis:

Es gilt: $d\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \Phi(\vec{r})$.

Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung liefert

$$\begin{aligned} d\Phi(\vec{r}) &= \text{grad}\Phi \cdot d\vec{r} \\ &= \Phi(\vec{r}) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz - \Phi(\vec{r}) \\ &= \begin{pmatrix} \partial\Phi/\partial x \\ \partial\Phi/\partial y \\ \partial\Phi/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \partial\Phi/\partial x \\ \partial\Phi/\partial y \\ \partial\Phi/\partial z \end{pmatrix} \right| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

wobei der Winkel α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{\nabla}\Phi$ und $d\vec{r}$ ist. Damit ist klar, dass der Anstieg von Φ , d.h. $d\Phi$ genau dann maximal ist, wenn der Vektor $d\vec{r}$ in Richtung von $\text{grad}\Phi$ weist. Damit ist der Beweis erbracht.

Zweimaliges Anwenden des Nabla-Operators führt auf den Laplace-Operator Δ :

$$\begin{aligned} \text{div} \cdot \text{grad}\Phi(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \Delta\Phi(\vec{r}) \\ \iff \Delta &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Achtung!

Wie bei dem Nabla-Operator muss auch der Laplace-Operator nach Wahl des Koordinatensystems angepasst werden !

1.4.6 Eindeutigkeitssatz**Zerlegungssatz, Eindeutigkeitssatz**

Sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld, das mit genügend hoher Ordnung im Unendlichen verschwindet. der Zerlegungssatz sagt nun: $\vec{A}(\vec{r})$ lässt sich in einen rotationsfreien (longitudinalen) Teil $\vec{A}_r(\vec{r})$ und einen divergenzfreien (transversalen) Teil $\vec{A}_d(\vec{r})$ Teil zerlegen, wobei gilt:

$$1) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_r(\vec{r}) + \vec{A}_d(\vec{r}) \quad (1.31)$$

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}_r(\vec{r}) = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_d(\vec{r}) = 0 \quad (1.32)$$

Der **Eindeutigkeitssatz** besagt, dass jedes Vektorfeld eindeutig bestimmt ist, wenn seine Divergenz (1.17) und seine Rotation (1.25) für **jeden** Raumpunkt \vec{r} bekannt ist. Auf den Beweis des Zerlegungssatzes und des Eindeutigkeitssatzes soll hier verzichtet werden.

1.4.7 Zusammenfassung

Wir fassen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

- 1.) $\operatorname{div} \vec{A}$: Aussage über die Quelledichte von \vec{A}
- 2.) $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r = \oint_O \vec{A} d\vec{f}$: Gaußscher Integralsatz
- 3.) $\operatorname{rot} \vec{A}$: Aussage über das Wirbelverhalten von \vec{A}
- 4.) $\int_F \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{f} = \oint_\tau \vec{A} d\vec{s}$: Stokescher Integralsatz
- 5.) $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \iff \vec{A} = \vec{\nabla} \psi \iff \vec{A}$ lässt sich als Gradientenfeld darstellen
- 6.) Ein Vektorfeld ist eindeutig charakterisiert durch seine Quelledichte ($\operatorname{div} \vec{A}$) und die Wirbelstärke ($\operatorname{rot} \vec{A}$).

1.5 Die Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass ein Vektorfeld, wie zB. das elektrische Feld \vec{E} , charakterisiert ist durch seine Quellen und Wirbel. In diesem Abschnitt wollen wir nun die entsprechenden Feldgleichungen diskutieren für den Fall der Elektrostatik, das bedeutet: für den Fall, dass das elektrische Feld durch eine statische, zeitunabhängige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ generiert wird. Wir nehmen also an, dass es keine Ströme gibt. In diesem Fall ist das elektrische Feld charakterisiert durch die folgenden Feldgleichungen:

$$\text{a) } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{b) } \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{c) } \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'.$$

Sie sollen im folgenden erläutert werden.

zu a)

- (i) Befinde sich bei $\vec{r} = 0$ eine Punktladung, dann erzeugt sie, wie wir bereits im Abschnitt 1.1 gesehen haben, das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Für dieses elektrische Feld gilt nach Gleichung (1.23)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \delta(\vec{r} - 0).$$

- (ii) Betrachten wir nun eine Punktladung q_i , die sich nicht notwendigerweise im Ursprung, sondern an der Stelle \vec{r}_i befindet, dann gilt entsprechend nach einer Verschiebung des Koordinatensystems

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q_i}{\epsilon_0} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

- (iii) Befinden sich schließlich mehrere Punktladungen q_i an den verschiedenen Stellen \vec{r}_i , so gilt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}.$$

Zur Interpretation: Betrachten wir das Volumenintegral der Divergenz des elektrischen Feldes über ein endliches Volumen V mit einer Oberfläche $\mathcal{O}(V)$

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \operatorname{div} \vec{E} &= \int d^3\vec{r} \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{Q(V)}{\varepsilon_0} \\ &= \oint_{\mathcal{O}(V)} \vec{E} d\vec{f} \end{aligned}$$

Das Volumenintegral über die Divergenz gibt also anschaulich die Zahl der auslaufenden vermindert um die Zahl der einlaufenden Feldlinien an. Die in V befindliche Ladung $Q(V)$, beziehungsweise ρ , bezeichnet also bis auf den Faktor $1/\varepsilon_0$ die Quellen bzw. die Senken des elektrischen Feldes.

zu c)

Es gilt

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.33)$$

Dies können wir leicht nachvollziehen, wenn wir in kartesischen Koordinaten für die x-Komponente schreiben

$$\begin{aligned} \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_x &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} \\ &= -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für die y- und z-Komponente. Damit erhält man für das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\nabla \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\nabla \phi(\vec{r}). \end{aligned}$$

zu b)

Kann man aber nun das elektrische Feld als Gradienten eines Skalarfeldes Φ darstellen.

so gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi \\ &= -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z - \partial_z \partial_y \\ \partial_z \partial_x - \partial_x \partial_z \\ \partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x \end{pmatrix} \Phi \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

wobei wir in der zweitletzten Zeile Rotation und Gradient in kartesischer Darstellung benutzt haben.

Für die explizite Berechnung des elektrischen Feldes aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung betrachten wir nun den wichtigen Spezialfall, dass die Ladungsverteilung **kugelsymmetrisch** ist: Sei also $\rho(\vec{r})$ symmetrisch gegenüber einer Drehung um den Koordinatenursprung. Die Ladungsverteilung ρ hängt also nur vom Betrag von \vec{r} ab. Durch diese Ladungsverteilung ist keine Raumrichtung ausgezeichnet. Deshalb kann es auch für das elektrische Feld keine ausgezeichnete Richtung geben und es gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(|\vec{r}|) \cdot \hat{e}_r.$$

Wie läßt sich $E(|\vec{r}|)$ aus der Ladungsverteilung $\rho(|\vec{r}|)$ bestimmen, ohne den „Umweg“ über die Berechnung des Potentials Φ zu nehmen?

Zum einen gilt bei der Integration über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r

$$\oint_{\text{Kugel}} \vec{E} d\vec{f} = E(|\vec{r}|) \cdot 4\pi r^2,$$

zum anderen gilt nach dem Satz von Gauß und den Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{f} &= \int_V \operatorname{div} \vec{E} d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ &= \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man das elektrische Feld

$$|\vec{E}(|\vec{r}|)| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q(V)}{r^2}.$$

Wie das Ergebnis zeigt, ist das von ρ erzeugte Feld im Abstand r vom Koordinatenursprung identisch mit dem Punktladung $Q(V)$, die sich im Ursprung befindet. Die Ladung $Q(V)$ ist gerade die gesamte Ladung, die sich in der Kugel vom Radius r befindet.

Dieses Ergebnis entspricht dem Resultat bei der Berechnung der Gravitationsanziehung einer ausgedehnten kugelsymmetrischen Massenverteilung. Auch dort haben wir gesehen,

dass diese Anziehung identisch ist mit der Anziehung durch eine entsprechende Punktmasse im Koordinatenursprung.

Die Poisson-Gleichung

Wie wir gesehen haben sind die Quellen des \vec{E} -Feldes durch die Ladungsverteilung ρ gegeben und das elektrostatische Feld lässt sich als Gradient eines Skalarfeldes schreiben. Zusammengefasst ergibt dies:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla\phi) = -\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Die Beziehung

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}} \quad (1.34)$$

wird als *Poisson-Gleichung* bezeichnet. In ladungsfreien Raumbereichen ($\rho = 0$) geht sie über in die *Laplace-Gleichung*

$$\boxed{\Delta\phi = 0.}$$

1.5.1 Bedeutung des elektrostatischen Potentials und Energieinhalt des elektrischen Feldes

Um die Bedeutung des Skalarfeldes Φ zu erläutern, berechnen wir die mechanische Arbeit, die aufgebracht werden muss, um eine Probeladung q von \vec{a} nach \vec{b} zu bringen:

$$\begin{aligned} W_{ab} &= - \int_a^b \vec{F} d\vec{s} \\ &= - \int_a^b q \cdot \vec{E} d\vec{s} \quad \text{Definition von } \vec{E} \\ &= q \cdot \int_a^b \nabla\Phi d\vec{s} \\ &= q \cdot \int_a^b d\Phi \quad \text{Definition des grad} \\ &= q \cdot (\Phi(b) - \Phi(a)). \end{aligned}$$

Die aufzubringende Arbeit ist also nur von den Endpunkten der Verschiebung, nicht aber von dem zurückgelegten Weg abhängig. $q \cdot \phi(\vec{r})$ gibt die potentielle Energie einer Ladung q in einem Feld \vec{E} an der Position \vec{r} an.

Das Potential Φ ist vergleichbar (bis auf die Ladung der Probeladung) mit dem bereits bekannten mechanischen Potential des konservativen Kraftfeldes.

Energieinhalt des elektrischen Feldes

Wir betrachten eine Verteilung von N Ladungen q_i , die sich an den Stellen \vec{r}_i befinden.

Wie groß ist die Energie, die aufgebracht werden muss, um die Ladungen zu plazieren? Zur Beantwortung dieser Frage machen wir ein Gedankenexperiment und bringen die einzelnen Ladungen in der Reihenfolge ihrer Nummerierung an ihre Positionen.

Sei W_1 die benötigte Arbeit, um q_1 aus dem Unendlichen nach $\vec{r} = \vec{r}_1$ zu transportieren. Da der Raum bisher ladungsfrei ist, also noch kein \vec{E} -Feld vorhanden ist, kann man die Ladung kräftefrei verschieben, und somit gilt $W_1 = 0$. Ist aber die Ladung q_1 an der Position \vec{r}_1 so ergibt sich ein elektrostatisches Potential

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}.$$

Um die Ladung q_2 im Feld der Ladung q_1 nach \vec{r}_2 zu bringen, benötigt man die Arbeit

$$\begin{aligned} W_2 &= q_2 \cdot (\Phi_1(\vec{r}_2) - \Phi_1(\vec{r} \rightarrow \infty)) \\ &= q_2 \cdot \Phi_1(\vec{r}_2), \end{aligned}$$

wobei wir das Potential so normieren, dass es für $\vec{r} \rightarrow \infty$ verschwindet. Für die weiteren Ladungen ergibt sich

$$\begin{aligned} W_3 &= q_3 \cdot (\Phi_1(\vec{r}_3) + \Phi_2(\vec{r}_3)) \quad \text{mit} \quad \Phi_2(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \\ &\vdots \\ W_n &= q_n \cdot (\Phi_1(\vec{r}_n) + \dots + \Phi_{n-1}(\vec{r}_n)). \end{aligned}$$

Somit erhält man die Gesamtenergie, die man aufwenden muß, um *alle* N Ladungen zu plazieren:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^N W_i \\ &= \sum_{i=2}^N q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^N q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^N q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^N q_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^N q_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}. \end{aligned}$$

Beim Übergang von diskreten Ladungen zur einer stetigen Ladungsverteilung ρ wird die

Summation durch eine Integration ersetzt:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \int \underbrace{d^3\vec{r}' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= \Phi(\vec{r})} \cdot \rho(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}) \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} \Delta\Phi \cdot \phi \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int (\Delta\Phi \cdot \phi + (\nabla\Phi)^2 d^3\vec{r}) + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\Phi)^2 d^3\vec{r} \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\oint_{\mathcal{O}(V)} (\nabla\phi)\phi d\vec{f}}_{= 0 \text{ für } V \rightarrow \mathbf{R}^3} + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi)^2 d^3\vec{r}.
 \end{aligned}$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile wurde die Poissongleichung 1.34 angewandt. Beim Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile wurde benutzt, dass

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \phi \Delta \phi + (\nabla \phi)^2$$

ist und dann der Satz von Gauß benutzt. Der erste Summand der letzten Zeile verschwindet, da

$$\phi \sim \frac{1}{r} \text{ für } r \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \nabla \phi = \frac{\partial}{\partial r} \phi \sim \frac{1}{r^2}.$$

Für das Produkt von beiden gilt

$$\phi \cdot \nabla \phi \sim \frac{1}{r^3} \quad \text{und} \quad \phi \cdot \nabla \phi d\vec{f} \sim \frac{1}{r}.$$

Für $r \rightarrow \infty$ verschwindet der letzte Ausdruck. Man erhält also

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi)^2 d^3\vec{r} \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d^3\vec{r}.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Daraus folgt für die Energiedichte, also der Energieinhalt des elektrischen Feldes pro Volumen:

$$w = \epsilon_0 \vec{E}^2 / 2. \tag{1.36}$$

1.6 Ladungen in Metallen; Influenz

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst betrachten, wie sich Ladungen in geladenen metallischen⁴ Objekten anordnen und welche allgemeinen Aussagen sich über das elektrische Feld an der Oberfläche von Metallen treffen lassen. Wir werden danach untersuchen, wie sich anfänglich ungeladene Metalle in der Nähe von Ladungen verhalten.

1.6.1 Massiver geladener metallischer Körper

Als erstes Beispiel betrachten wir einen metallischen Körper (z. B. eine Kugel), der zunächst ungeladen ist, und auf den wir dann Elektronen aufbringen⁵. Wie wir wissen, stoßen sich gleichnamige Ladungen ab. Die zusätzlichen Elektronen werden also bestrebt sein, sich möglichst weit voneinander zu entfernen. Dies gelingt dadurch, dass sie sich in einer dünnen Schicht in der Nähe der Oberfläche ansammeln. Man kann zeigen, dass die Dicke dieser Schicht nur wenige Atomlagen beträgt.

Wie ordnen sich die **Ladungen innerhalb der Oberflächenschicht** an? Auch hier stoßen sich die Ladungen ab. Im Fall einer Kugel lässt sich bereits aus Symmetriegründen erraten, dass sich die Ladungen homogen über die Oberfläche verteilen werden. Für allgemeinere Geometrien müssen wir das elektrische Feld betrachten, das durch die Ladungen erzeugt wird. Solange dieses eine Komponente \vec{E}_{\parallel} parallel zur Oberfläche hat, wirken Kräfte auf die Ladungen, die diese verschieben. Eine stabile Anordnung wird erst dann erreicht, wenn \vec{E}_{\parallel} verschwindet, d. h. **das elektrische Feld senkrecht zur Oberfläche** steht. Aus dem gleichen Grund ist ersichtlich, dass **das Innere des Metalls feldfrei** sein muss. Wäre \vec{E} im Inneren ungleich null, würden sich die Ladungen wiederum solange bewegen, bis verschwindet.

Wir demonstrieren das Ergebnis, dass \vec{E} senkrecht auf geladenen Metalloberflächen steht, durch Abbildung der Feldlinien um das in Abb. 1.14 gezeigte Objekt im mit Weizengries gefüllten Ölbad (s. Abb. 1.15):

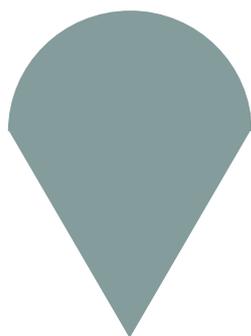
Man erkennt, dass die Feldlinien an der Rundung und der Spitze Ecken besonders dicht liegen. Entsprechend ist hier die auch Ladungsdichte am höchsten.

Wir stellen nun die geladene Spitze vor eine ebene metallische Platte, die entgegengesetzt geladen ist. Auch im Gesamtsystem Spitze/Platte stehen die Feldlinien senkrecht auf den Metalloberflächen, wobei die Feldüberhöhung an der Spitze klar zu erkennen ist (Abb. 1.15). An solchen Spitzen kann die Feldstärke sogar derart groß werden, dass Elektronen aus dem Metall an die Luft bzw. ins Vakuum austreten können. Diese **”Feldemission”** wird beispielsweise eingesetzt, um einen Strahl freier Elektronen im Elektronenmikroskop zu erzeugen.

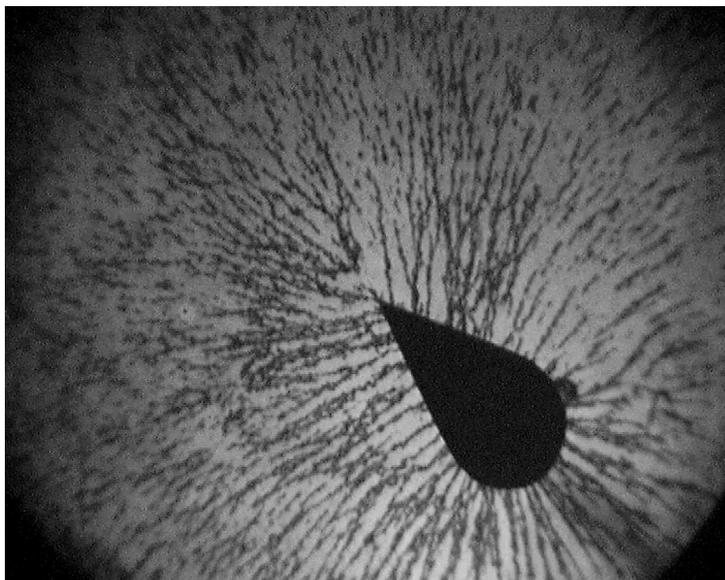
Wir haben bislang implizit angenommen, dass wir sehr viele Elektronen auf das Metall aufgebracht haben, d. h. wir kümmerten uns nicht um die Quantisierung der Ladung in

⁴Etwas allgemeiner können wir von ”Leitern” sprechen und damit alle Materialien zusammenfassen, in denen sich Ladungsträger frei bewegen können. Dies schließt auch Materialien wie sog. Halbleiter oder Halbmetalle ein.

⁵Wir könnten auch Elektronen entfernen und damit, etwas schlampig ausgedrückt, positive Ladungen ”aufbringen”.



(a)



(b)

Abbildung 1.14: *Feldlinien um ein metallisches Objekt. (a) Schematische Darstellung des Objekts. (b) Abbildung der Feldlinien im Objekte*

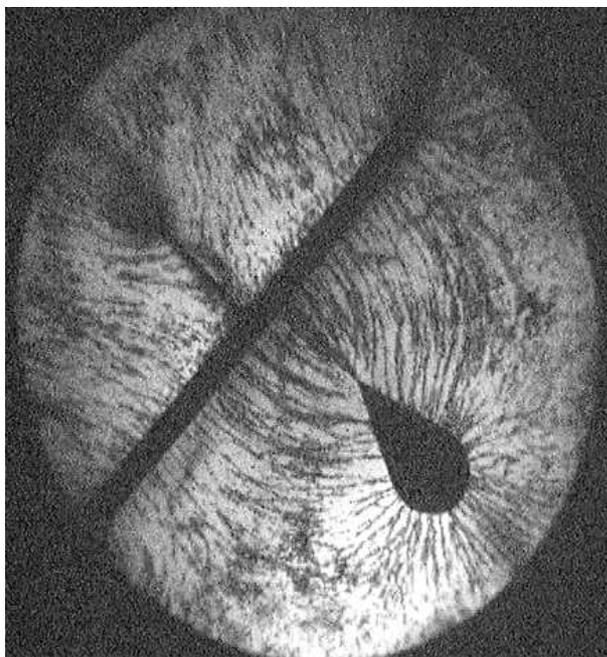


Abbildung 1.15: *Feldlinien zwischen einer metallischen geladenen Spitze und einer entgegengesetzt geladenen metallischen Platte.*

Vielfachen der Elementarladung e . Was wäre passiert, wenn wir nur sehr wenige Elektronen (z. B. nur eines) aufgebracht hätten? Auch dann hätten sich die bereits im Metall befindlichen 10^{24} Elektronen so lange von der Zusatzladung wegbewegt, bis das elektrische Feld wiederum senkrecht auf der Oberfläche gestanden wäre. An einem gegebenen Ort der Oberfläche kompensieren die (positiven) Ladungen der Gitterionen nicht mehr vollständig die Ladung der jetzt dichter gepackten Elektronen. Die Ladung des zusätzlichen Elektrons wurde gewissermaßen kontinuierlich über die Oberfläche "verteilt".

1.6.2 Geladener metallischer Hohlraum

Ganz analog zum Inneren eines massiven Leiters verschwindet das elektrische Feld auch im Inneren eines metallischen Hohlraums (solange sich in diesem keine Zusatzladungen befinden). Feldlinien, die über den Hohlraum hinweg zu Ladungen an einer anderen Stelle des Hohlraums führen würden, würden wiederum zu einer Verschiebung der Ladungen im Metall führen.

Feldfreie metallische Kammern werden oft **”Faradaykäfig”** oder **”Abschirmkammern”** genannt (Faraday hatte die Feldfreiheit mittels eines Käfigs demonstriert). Man verwendet Abschirmkammern oft, um Messungen durchzuführen, die gegen elektrische Störfelder sehr empfindlich sind. Wie sich metallische Hohlräume bei Anwesenheit äußerer Ladungen verhalten, werden wir weiter unten (Abb. 1.25) darstellen.

Wir demonstrieren die Feldfreiheit metallischer Hohlräume in mehreren Versuchen:

1. Elektrometer im Faradaykäfig:

Ein Braunsch'sches Elektrometer steht auf einer geladenen Metallplatte und zeigt einen Ausschlag. Stellt man jetzt einen Käfig auf die Platte, so geht der Ausschlag auf null zurück. Dagegen schlägt ein weiteres Elektrometer aus, das auf der Außenseite des Käfigs angebracht ist (s. Abb. 1.16). Trennt man jetzt Käfig und Platte, so verbleiben Ladungen auf der Platte wie auf dem Käfig, beide Elektrometer schlagen aus.

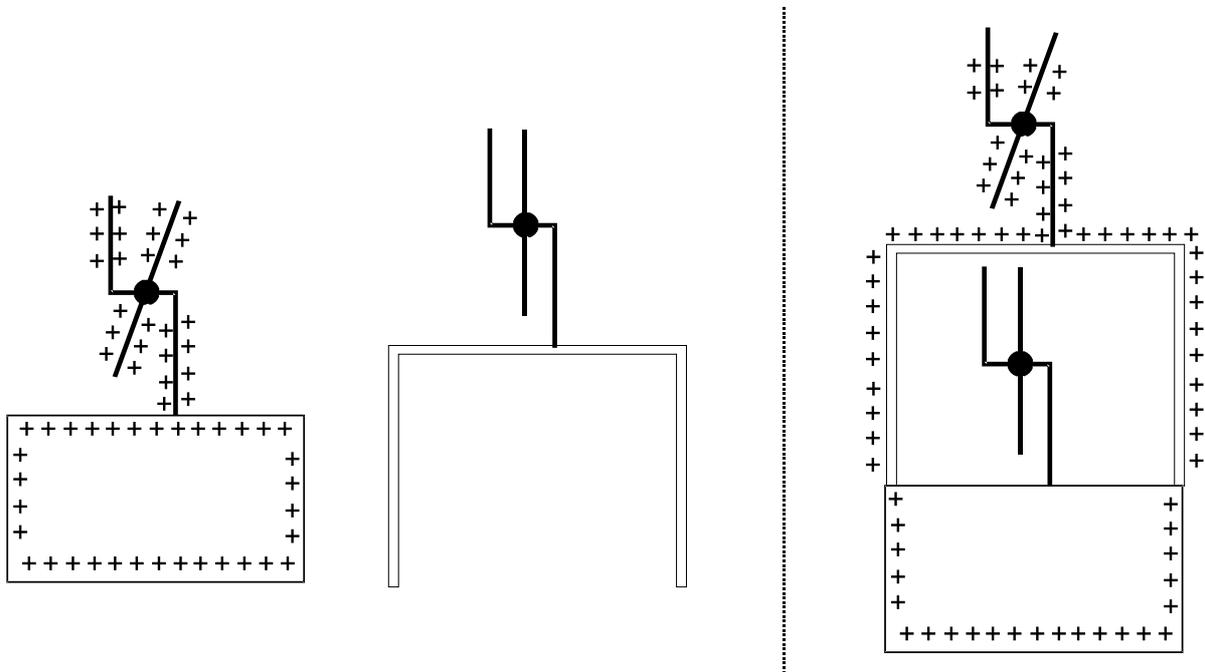


Abbildung 1.16: Zum Prinzip des Faraday-Käfigs. Die ”+” Zeichen kennzeichnen symbolisch die Ladungsverteilung. Deren Zahl ist wie auch in den nachfolgenden Zeichnungen rein willkürlich.

2. Darstellung der Feldlinien um verschieden geformte geschlossen verbundene Drähte: Ring, Viereck, Stern

In allen Fällen bleibt das Innere der Körper feldfrei. Außen stehen die Feldlinien senkrecht auf dem Metall, wobei die Feldlinien an den Ecken besonders dicht liegen (Abb. 1.17).

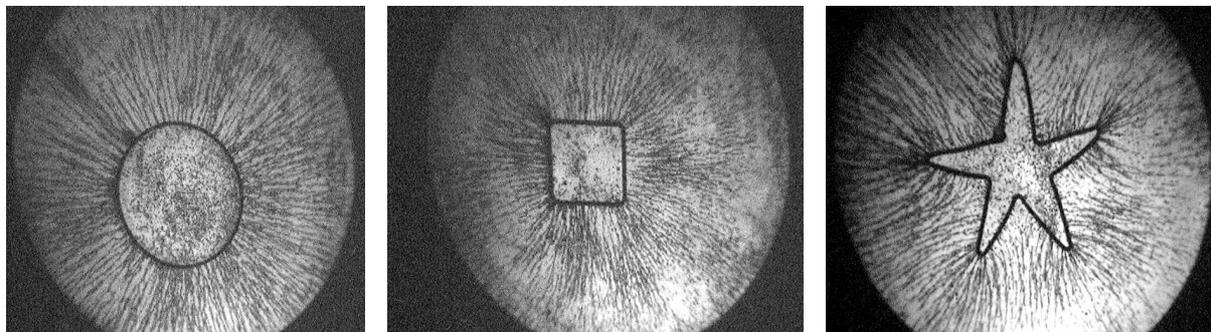


Abbildung 1.17: *Feldlinien um verschieden geformte Hohlräume.*

Die Feldfreiheit metallischer Hohlräume werden beim **Van-de-Graaf-Generator** (Abb. 1.18) ausgenutzt. Über eines Spitze S1 wird auf ein endlos umlaufendes Gummiband Ladung aufgesprüht. Die Spitze S2 leitet diese Ladung auf die Innenfläche einer metallischen Kugel. Von dort fließt die Ladung sofort auf die Außenfläche der Kugel, das Innere bleibt (weitgehend) feldfrei. Man kann die Kugel so lange aufladen, bis die elektrische Feldstärke an der Kugeloberfläche einen kritischen Wert überschreitet, oberhalb dem die aufgebracht Ladungen durch das umgebende Medium (im Versuch: Luft) abfließen kann (Funkenschlag). In Luft beträgt die kritische Feldstärke⁶ ca. $2 \cdot 10^6$ V/m.

Mit Van-de-Graaf-Generatoren können elektrische Spannungen (Potenzialdifferenzen) im Megavoltbereich erzeugt werden. Mit diesen Spannungen können dann elektrische geladenen Teilchen auf entsprechend hohe Energien beschleunigt werden.

Abb. 1.19 zeigt zwei Personen, die durch einen van-de-Graaf Generator aufgeladen wurden. An den Haaren erkennt man wiederum, dass sich gleichnamige Ladungen abstoßen.

In einem weiteren Versuch bringen wir im Ölbad eine Punktladung ins Zentrum eines neutralen, elektrisch isolierten Rings (Abb. 1.20). Es gehen Feldlinien von der Punktladung radial zum Ring, wie man es entsprechend des Gaußschen Satzes auch erwarten kann. Die Feldlinien treten scheinbar durch den Ring hindurch und setzen sich außerhalb des Rings in radialer Richtung fort. Da der Ring selbst elektrisch neutral ist, muss dies nach dem Gaußschen Satz erwartet werden. In einem Kugelvolumen (bzw. in 2 Dimensionen: Kreis), das den Ring mit einschließt, ist nach wie vor die Punktladung enthalten. Die von ihr ausgehenden Feldlinien durchdringen auch das Kugelvolumen. Auf der anderen Seite sollte im Leitermaterial selbst kein Feld vorliegen. Diesen scheinbaren Widerspruch klären wir im nächsten Abschnitt.

1.6.3 Influenz

Wir betrachten zunächst eine Punktladung vor einer ungeladenen, von der Außenwelt elektrisch isolierten, Metallplatte. Die Platte sei unendlich ausgedehnt. Ohne Anwesenheit der Metallplatte gehen von der (als positiv angenommenen) Punktladung in radialer

⁶Man bezeichnet eine Potenzialdifferenz $\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)$ als Spannung und gibt dieser im SI-System die Einheit Volt (V). Das elektrische Feld, das sich als $-\vec{\nabla}\phi$ berechnet, hat entsprechend die Einheit V/m.

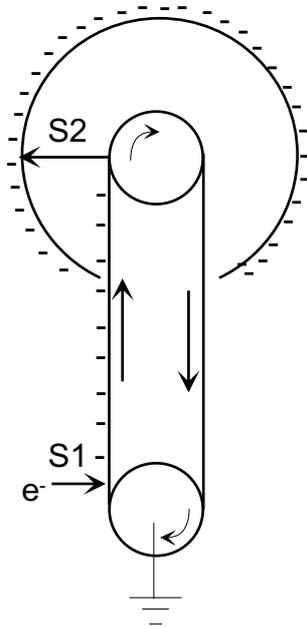


Abbildung 1.18: Das Prinzip des van-de-Graaf Generators



Abbildung 1.19: Elektrische Aufladung am van-de-Graaf Generator. Quelle: <http://www.ph.ed.ac.uk/scifun/Activities/FunPhysics/vandg.html>

Richtung Feldlinien aus. Diese würden eine in die Nähe gebrachte Metallplatte unter schiefen Winkeln schneiden (Abb. 1.21(a)), was zu einem Feld im Inneren des Leiters führen würde und ebenfalls die Bedingung verletzt, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Metalloberfläche steht. In der Platte bewegen sich daher Elektronen so auf die der Punktladung zugewandten Seite zu, dass, wie in Abb. 1.21(b) schematisch angedeutet, beide Bedingung erfüllt werden. Da die Platte insgesamt neutral ist, entsteht auf der gegenüberliegenden Seite ein Überschuss an negativen Ladungen, diese Plattenseite wird positiv aufgeladen. Auch von diesen Ladungen gehen wiederum Feldlinien aus. Man kann die Platte zusätzlich mit einer elektrisch leitenden Verbindung zur Erde (einer Erdung) versehen. Die Erde stellt letztlich ein Ladungsreservoir dar, aus dem Elektronen in die Platte nachströmen, so dass die positive Ladung auf der Rückseite der Platte kompensiert wird (Abb. 1.21(c)).

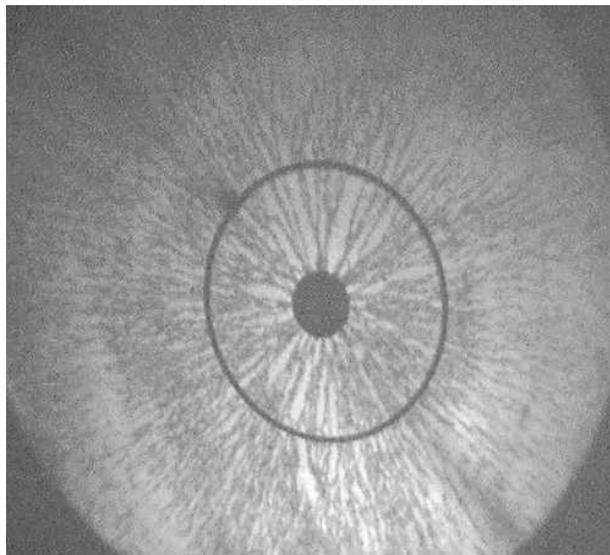


Abbildung 1.20: Feldlinien um eine Punktladung, die von einem elektrisch neutralen metallischen Ring umschlossen ist.

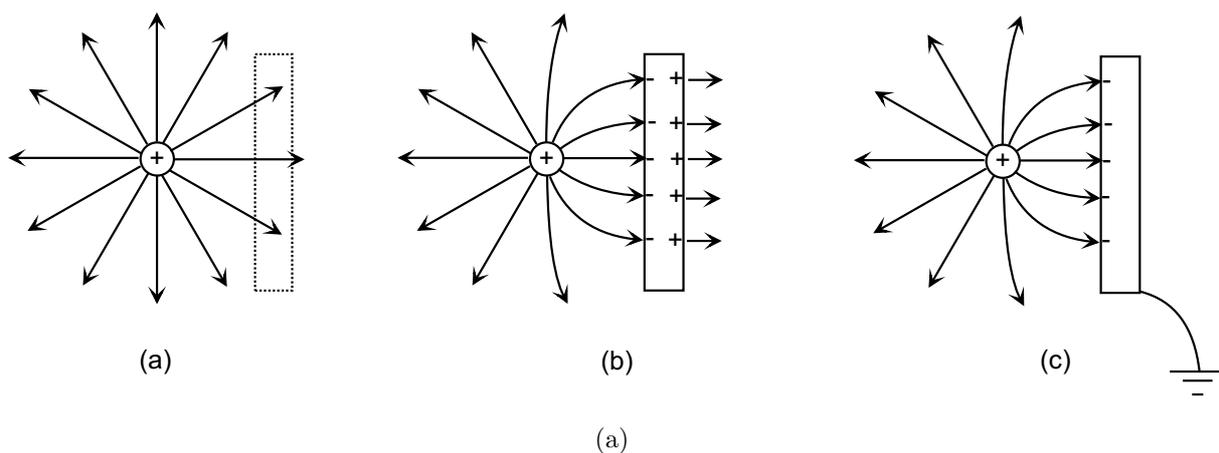


Abbildung 1.21: *Influenz*: Punktladung vor einer metallischen Platte: (a) Platte noch nicht vorhanden; (b) ungeerdete, insgesamt elektrisch neutrale Platte; (c) geerdete Platte.

Das elektrische Feld zwischen der Platte und der Punktladung lässt sich quantitativ mit der Methode der "Spiegelladungen" bestimmen, wie im Theorieteil vorgeführt wird. Die Methode wird auch eingesetzt, um auch allgemeinere Feldverteilungen, etwa von mehreren Punktladungen, zu berechnen.

1.7 Randwertprobleme

Wir haben gesehen, dass sich aus einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ mit

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

berechnen läßt. Hierbei muß $\rho(\vec{r}')$ allerdings für *alle* \vec{r}' im Universum bekannt sein.

In der Regel ist die Ladungsverteilung aber nur in einem begrenzten Volumen V bekannt. Ist ausserdem noch eine Information über Eigenschaften des Potentials auf der Oberfläche dieses Volumens gegeben, so spricht man von einem *Randwertproblem der Elektrostatik*. Je nach der vorgegebenen Information über das Potential auf der Grenzfläche oder Randfläche des Volumens unterscheidet man zwei Fälle:

1. Neben der Ladungsverteilung im Volumen V ist auch der Wert des Potentials auf dem Rand vorgegeben. Dies bezeichnet man als das *Dirichletsche Randwertproblem*.
2. Ist dagegen neben der Ladungsverteilung in V die Komponente des Potentialgradienten, die senkrecht zur Oberfläche steht bekannt, bezeichnet man dies als *von Neumannsches Randwertproblem*. In diesem Fall ist also auf der Oberfläche von V die Komponente des elektrischen Feldes ($\vec{E} = -\text{grad}\Phi$) vorgegeben, die senkrecht zu dieser Oberfläche steht.

Ziel dieser Randwertprobleme ist es aus den vorgegebenen Informationen (Ladungsdichte in V plus Information über den Rand) das Potential ϕ und damit das elektrische Feld im gesamten Volumen V zu bestimmen. Weiter unten in diesem Paragraphen werden wir zeigen, dass die gerade definierten Randwertprobleme (Dirichlet und v. Neumann) eindeutige Lösungen besitzen.

1.7.1 Beispiele, Spiegelladungsmethode

Zunächst soll aber ein Beispiel für das Randwertproblem von Dirichlet betrachtet werden. Mit Hilfe der sogenannten *Spiegelladungsmethode* werden wir ein Potential finden, für das gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{Poisson Gleichung} & \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}), \quad \text{für alle } \vec{r} \text{ aus } V \\ \text{Randbedingung} & \phi(\vec{r}') = \phi_{\text{Rand}}(\vec{r}') \quad \text{für alle } \vec{r}' \text{ des Randes} \end{array} \quad (1.37)$$

Als **Beispiel** betrachten wir eine Punktladung q , die sich an der Stelle $\vec{x}_0 = (x_0, 0, 0)$ befindet (Abb. 1.22) In der y - z -Ebene befindet sich eine unendlich weit ausgedehnte Metallplatte vernachlässigbarer Dicke. Diese Metallplatte sei geerdet, also gilt $\phi = 0$ auf der Platte. Das betrachtete Volumen V ist also der Raum mit $x > 0$ und als Randbedingung geben wir vor, dass das Potential auf dem Rand (d.h. auf der Metallplatte und für $\vec{r} \rightarrow \infty$) gleich 0 wird.

Um den Potentialverlauf im ganzen rechten Halbraum und die auf der Metallplatte induzierte Ladung zu bestimmen, greifen wir auf die Spiegelladungsmethode zurück und

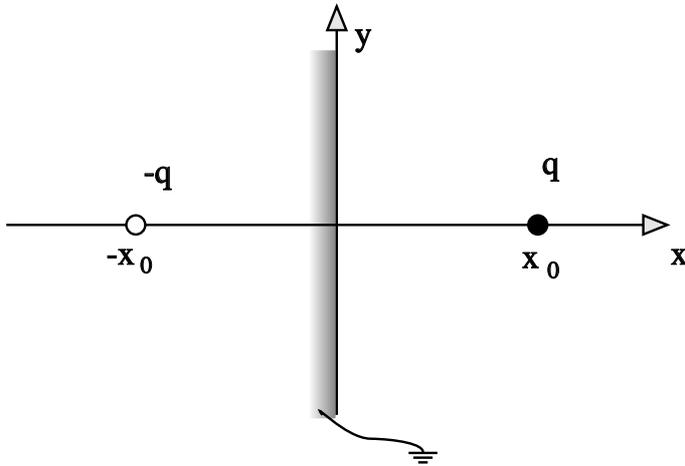


Abbildung 1.22: Beispiel für die Lösung eines Randwertproblems mit Hilfe einer Spiegelladung

behaupten, dass das Dirichletsche Randwertproblem gelöst ist, wenn wir der Ladung q eine Spiegelladung mit der Ladung $-q$ an der Position $-\vec{x}_0$ gegenüberstellen (siehe auch Abb. 1.22). Zu zeigen ist also, dass die Gleichungen (1.37) erfüllt werden durch den Ansatz für das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{x}_0|} - \frac{q}{|\vec{r} - (-\vec{x}_0)|} \right].$$

Der zweite Term entspricht dem Beitrag der *Spiegelladung* in $-\vec{x}_0$. Zu überprüfen ist nun, ob $\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{r} - \vec{x}_0)$ für alle \vec{r} im rechten Halbraum erfüllt ist. Dazu betrachten wir zunächst einmal

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}_0|} \stackrel{(1.33)}{=} -\operatorname{div} \frac{(\vec{r} - \vec{x}_0)}{|\vec{r} - \vec{x}_0|^3} \stackrel{(1.23)}{=} -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{x}_0). \quad (1.38)$$

Damit ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{r} - \vec{x}_0) - \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0}(-q)\delta(\vec{r} + \vec{x}_0)}_{=0 \text{ im rechten Halbraum}} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}). \end{aligned}$$

Die Poisson-Gleichung ist also erfüllt. Betrachten wir jetzt das Verhalten von ϕ auf dem Rand, also auf der Metallplatte (die Randbedingung für $\vec{r} \rightarrow \infty$ ist sicher erfüllt). Auf der Metallplatte bei $x = 0$ aber gilt

$$\begin{aligned} \phi\left(\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Randbedingung erfüllt. Mit der Spiegelladungsmethode ist es uns also gelungen, einen Potentialverlauf zu finden, der die Bedingungen erfüllt. Allgemein besteht diese Methode darin, Ladungen ausserhalb des betrachteten Bereiches so zu bestimmen, dass sie zusammen mit den vorgegebenen Ladungen innerhalb des betrachteten Bereiches ein Potential erzeugen, das die Randbedingungen erfüllt.

Durch das Vorhandensein der Ladung q in \vec{x}_0 werden in die Metallplatte Ladungen induziert. Ist also q positiv, so werden Elektronen in der Metallplatte durch die Coulombwechselwirkung in die Nähe der Ladung q gezogen. Da diese Ladungsträger in der Metallplatte frei beweglich sind und die Platte geerdet ist, können Elektronen zufließen. Es entsteht also eine induzierte negative Ladung in der Metallplatte. Die Effekte dieser induzierten Ladung werden durch die Spiegelladung dargestellt. Um uns von diesem Sachverhalt zu überzeugen, berechnen wir nun das elektrische Feld in der Nähe der Trennfläche:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{für } \vec{r} = (0, y, z),$$

für die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \phi \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2yq}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2yq}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} \\ &\stackrel{x=0}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2yq}{2\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2yq}{2\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Genau so gilt auch

$$E_z = 0$$

Hätte das elektrische Feld eine Komponente parallel zur Metalloberfläche, so würden die frei beweglichen Ladungsträger in der Metallfläche sich diesen Kraftkomponenten entsprechend bewegen. Für die x-Komponente gilt aber im rechten Halbraum:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \phi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x+x_0)}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} \\ &\stackrel{x=0}{=} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qx_0}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} \end{aligned}$$

Da aber im linken Halbraum das elektrische Feld gleich Null ist enden diese Feldlinien senkrecht auf der Metallwand. In der Wand gibt es also Quellen beziehungsweise Senken des elektrischen Feldes. Diese Quellen und Senken sind die diskutierten induzierten Ladungen.

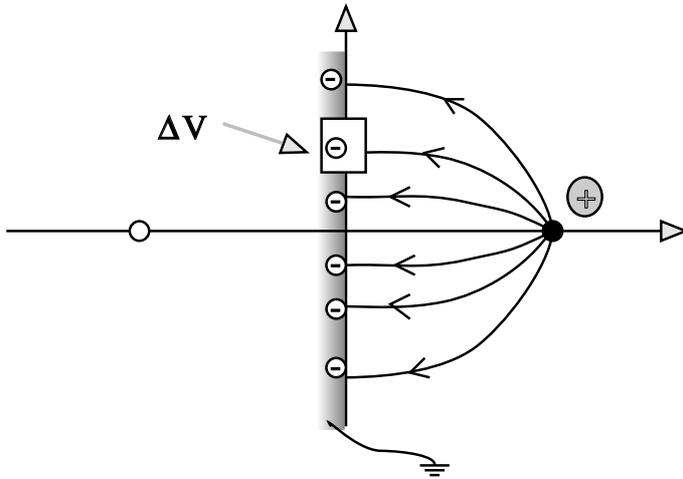


Abbildung 1.23: Zur Berechnung der induzierten Flächenladung

Wie groß ist nun diese Oberflächenladung σ ?

Um diese zu berechnen, wählen wir ein Volumenelement, ΔV (siehe auch Abb. 1.23), welches aus der Metallplatte ein infinitesimales Flächenstück herausschneidet und eine Fläche ΔF parallel zur Metallfläche besitzt. Da es ein elektrisches Feld nur senkrecht zur rechten Fläche ΔF dieses Volumenelementes gibt, gilt

$$\begin{aligned}
 \oint_{O(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{E} \, d^3\vec{r} \\
 &= \int_{\Delta V} \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \, d^3\vec{r} \\
 &= \frac{\Delta F \cdot \sigma}{\varepsilon_0} \\
 \Rightarrow \sigma(\eta) &= \oint_{O(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\Delta F} \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{\Delta F} \Delta F \cdot \left(-\frac{2qx_0}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x_0^2 + \eta^2}^3} \right),
 \end{aligned}$$

wobei $\eta = \sqrt{y^2 + z^2}$ den Abstand vom Ursprung bezeichnet. Man erkennt, dass die Flächenladungsdichte σ im Ursprung ein Maximum besitzt.

Als letztes soll die Gesamtladung berechnet werden, die in die Metallplatte induziert wird:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma(\eta) \, d\eta \, \eta \, d\varphi \\
 &= -\frac{2q}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{\eta \cdot x_0}{\sqrt{x_0^2 + \eta^2}^3} \, d\eta \\
 &= -q.
 \end{aligned}$$

Die induzierte Ladung ist betragsmäßig gleich der Punktladung und auf der Wand „verteilt“.

1.7.2 Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass ein Potential ϕ , das eine Lösung des Randwertproblems von Dirichlet darstellt, stets eindeutig bestimmt ist. Bei der Lösung des v. Neumannschen Randwertproblems ist das Potential bis auf eine ortsunabhängige Konstante bestimmt.

Wie bereits zu Beginn dieses Paragraphen gesagt wurde, ist bei einem v. Neumannschen Problem die Normalenableitung des Potentials gegeben. Damit gelten für diese Randwertprobleme folgende Bestimmungsgleichungen:

- i) $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$
- ii) $\partial\phi/\partial\hat{n} = -\vec{E} \cdot \hat{n}$, \hat{n} ist dabei der Normalenvektor auf dem Rand von V .

Haben wir nun ein Potential gefunden, das diese Anforderungen erfüllt, so werden wir zeigen, dass dieses Potential bis auf eine Konstante eindeutig ist. Da aber eine Konstante im Potential, das daraus berechnete Feld nicht beeinflusst ($\vec{E} = -\text{grad}\phi$), ist das \vec{E} -Feld eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien ϕ_1 und ϕ_2 zwei Lösungen eines Dirichletschen oder v. Neumannschen Randwertproblems. Wir definieren $u = \phi_1 - \phi_2$. Nach Voraussetzung gilt dann:

$$\Delta u = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} + \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0, \quad \text{für alle } \vec{r} \in V.$$

Betrachten wir nun das Integral

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}u) d^3\vec{r} &= \int_V (\vec{\nabla}u\vec{\nabla}u + u \underbrace{\Delta u}_{=0}) d^3\vec{r} \\ &= \int_V (\vec{\nabla}u)^2 d^3\vec{r} \\ &\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \oint_{\partial(V)} (u\vec{\nabla}u) d\vec{f} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung gilt im Fall des Dirichletschen Randwertproblems, da dann ja nach Voraussetzung $u = \phi_1 - \phi_2$ für alle Punkte auf dem Rand verschwindet also auch das Integral über $u\vec{\nabla}u$ gleich 0 wird. Im Fall des v. Neumannschen Randwertproblems gilt aber für alle Randpunkte von V

$$\text{da } \vec{\nabla}u d\vec{f} = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\vec{f} = \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial \hat{n}} - \frac{\partial\phi_2}{\partial \hat{n}} \right] d\vec{f} = 0$$

(Beachte: auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen keine Vektoren) und damit verschwindet das Integral der Funktion $u\vec{\nabla}u$ integriert über die Oberfläche von V ebenfalls. Wir haben also in beiden Fällen gezeigt, daß

$$\int_V (\vec{\nabla}u)^2 d^3\vec{r} = 0$$

Daraus folgt $\vec{\nabla}u = 0$ für alle \vec{r} in V . Also ist $u = \text{const.}$

Im Fall des Dirichlet-Problems wird diese Konstante 0, da ja u auf dem Rand bereits den konstanten Wert 0 annimmt. \square

1.8 Versuche zur Influenz

Zur Influenz von Ladungen in Metallen zeigen wir mehrere Versuche:

- Wir bringen einen geladenen, an einer Schnur hängenden Ball in die Nähe einer ungeladenen Platte (vgl. auch Abschnitt 1.2). Es entwickeln sich Feldlinien in Analogie zur Abb. 1.21(b). Die resultierende attraktive Kraft zwischen Platte und Ball führt zu einer Anziehung des Balls.
- Bringt man einen (negativ) geladenen Stab in die Nähe eines ungeladenen Braunschens Elektrometers, so schlägt dieses bereits aus, bevor der Stab das Elektrometer berührt (vgl. Abb. 1.24). Es sammeln sich im Elektrometer Elektronen in Stabnähe an. Dadurch wird der Rest des insgesamt neutralen Elektrometers positiv geladen. Diesen Effekt hatten wir in Abschnitt 1.2 (Abb. 1.2) noch unterschlagen.

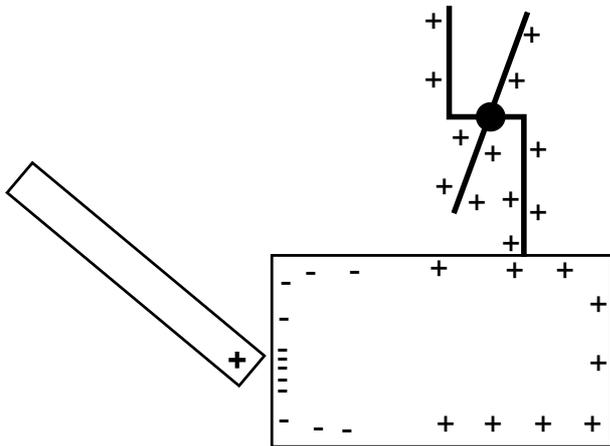


Abbildung 1.24: *Influenz: Ein geladener Stab befindet sich in der Nähe eines Braunschens Elektrometers, ohne dieses zu berühren.*

Entfernt man den geladenen Stab, so verschwindet der Ausschlag des Elektrometers, da dieses ja insgesamt neutral war. Wir erden jetzt das Elektrometer und bringen dann den Stab in dessen Nähe. Das Elektrometer schlägt wiederum aus. Jetzt fließen aber in Analogie zu Abb. 1.21(c) Elektronen auf das Elektrometer, die dieses negativ aufladen. Entfernen wir jetzt die Erdung und entfernen anschließend den geladenen Stab, so bleibt das Elektrometer negativ geladen.

- Auch den leitenden Ring der Abb. 1.20 betrachten wir nochmals bei Anwesenheit zusätzlicher Ladungen. Der Ring ist jetzt geerdet. Wenn sich eine Punktladung außerhalb des Rings befindet, bilden sich Feldlinien zwischen Ring und der Ladung aus, das Ringinnere bleibt feldfrei (Abb. 1.25(a)). Der Ring schirmt also auch diese Felder ab. Wenn die Punktladung in das Ringinnere gebracht wird, gehen von dieser Feldlinien aus, die an der Ringinnenwand enden, das Ringäußere (und auch der Ring selbst) bleibt feldfrei (Abb. 1.25(b)) im Gegensatz zur Abb. 1.20, wo an der Ringaußenseite induzierte Ladungen das Feld in den Außenraum fortsetzten.
- Wir bringen zwei elektrisch leitende und sich berührende Kugeln in das Feld eines Konduktors (Abb. 1.26) und trennen diese dort. Durch Influenz wurde eine der Kugeln positiv geladen, die andere negativ; die Ladungen bleiben auf den Kugeln auch nach ihrer Trennung erhalten. Wenn wir mit einer der beiden Kugeln ein

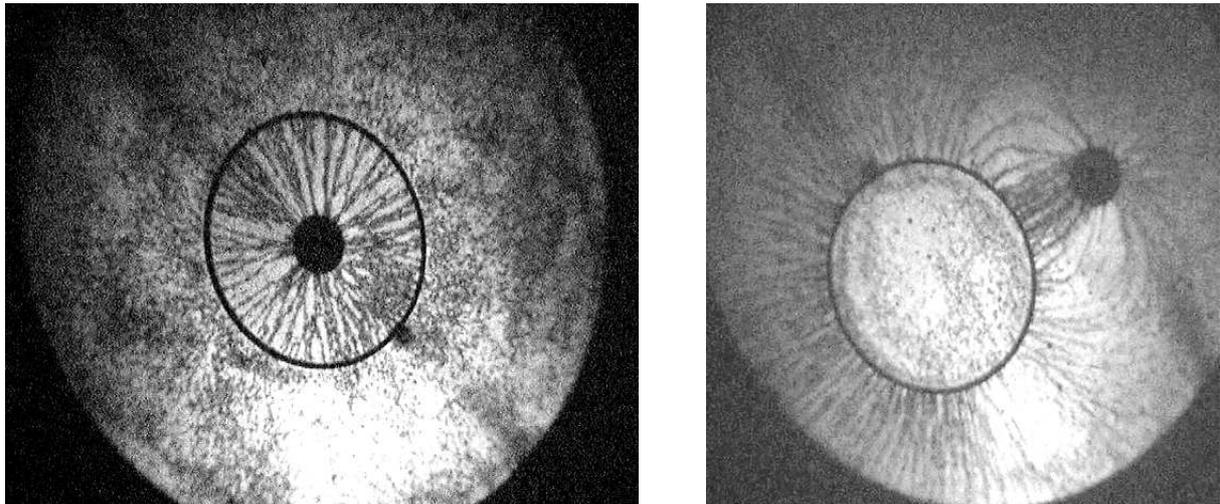


Abbildung 1.25: Feldlinien einer Punktladung in der Nähe eines geerdeten metallischen Rings.

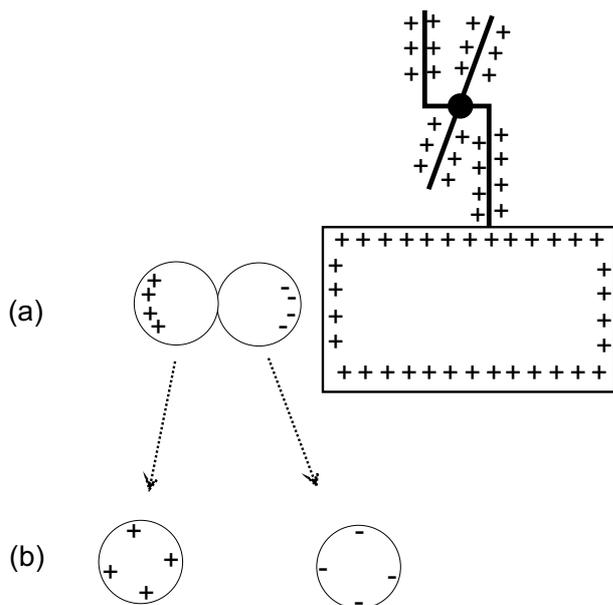


Abbildung 1.26: Trennung induzierter Ladungen

vormalig neutrales Elektrometer berühren, so schlägt dieses aus, die Berührung mit der zweiten Kugel neutralisiert das Elektrometer wieder.

Zum Abschluss dieses Abschnitts erläutern wir das Prinzip der **Influenzmaschine** (s. Abb. 1.27), die wir in bereits mehreren Versuchen zur Aufladung unterschiedlichen Gegenständen verwendet haben. Ein Gerät dieser Art wurde bereits 1865 von Holz in Berlin vorgestellt. Sie nutzt das Prinzip der Trennung von durch Influenz erzeugter Ladungen auf trickreiche Weise.

Die Maschine besteht aus zwei gegeneinander laufenden Scheiben (A), auf denen voneinander isolierte leitende Segmente (Staniolstreifen) aufgebracht sind.

Auf den beiden Glassäulen (D) befinden sich Konduktoren zur Ladungsaufnahme, die mit einem mit Saugbüschel versehenen Arm die Ladung von den Staniolbelägen absaugen. Jede Scheibe besitzt einen Konduktor mit zwei Metallbüscheln. Die Maschine erregt sich selbst. Ist irgendein Staniolbelag z.B. der vorderen Scheiben zufällig elektrisch negativ geladen, so erregt er in einem bei ihm vorbei rotierenden Belag durch Influenz der hinteren Scheibe positive Ladung, die durch Abfließen der Elektronen über die Bürsten in den Konduktor kommt. Bei weiterer Drehung induziert diese positive Ladung auf der hinteren Scheibe auf den Staniolstreifen der vorderen Scheibe negative Ladung, die durch Elektronenfluss über die Bürsten aus dem vorderen Konduktor kommt. Durch die versetzte Anbringung der Bürsten schaukelt sich das gegenseitige Aufladen der Konduktoren immer mehr auf. Diese Ladung sammelt sich nun in den Konduktoren und den "Leydener Flaschen"⁷ (B). Bei zu großer Spannung springt dann Ladung in Form eines kräftigen Funkens zwischen den Elektrodenkugeln über.

(Erklärungstext: http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U_materialien/leifiphysik/web_ph10/versuche/01_ladung/influenzmaschine/influenzmasch.html)

⁷Auszug aus: <http://www.wundersamessammelsurium.de/Elektrisches/LeydenerFlasche/index.html>: Die "Leydener Flasche" (auch: Kleist'sche Flasche, Kleist'sche Verstärkungsflasche) wurde 1745 von Ewald Jürgen von Kleist und dann 1746 noch einmal von dem Physiker Pieter van Musschenbroek (Cunaeus) an der Universität Leyden erfunden (Kleist und Musschenbroek agierten unabhängig voneinander). Mit der Leydener Flasche konnte erstmals elektrische Ladung gesammelt, verstärkt, aufbewahrt und transportiert werden. Diese Flasche besteht aus einem oben offenen zylindrischen Nichtleiter (ein Glasgefäß) und trägt auf seiner Innen- und Außenfläche gegeneinander isoliert zwei leitende Schichten (aufgeklebtes Stanniol). Die innere Schicht ist zu bequemerem Aufladen der "Flasche" mit einer Metallstange verbunden, die nach außen ragt. Wird die Flasche über die Stange negativ aufgeladen, so entsteht durch Influenz am äußeren Belag eine positive Ladung. Die verdrängten Elektronen entweichen in die Erde, wenn die Flasche nicht isoliert steht.

Damals war es beliebt, einer Menschenkette einen elektrischen Schlag (den sogenannten Kleist'schen Stoß) zu versetzen. Man erfreute sich an den zuckenden und springenden Opfern. In einem Physiklehrbuch bemerkt Lichtenberg dazu: "Zu Paris glaubte man vor einigen Jahren gefunden zu haben, daß der Stoß immer bey "frigidis et impotentibus" aufhöre. Der Graf von Artois, der davon hörte, berief dazu die Castraten der Oper; und man fand die Beobachtung falsch. Auf diese Weise ist die Elektrisiermaschine um die Ehre gekommen, dereinst als ein nützliches Instrument in den Versammlungs-Sälen der Consistorien und Ehegerichte zu prangen."

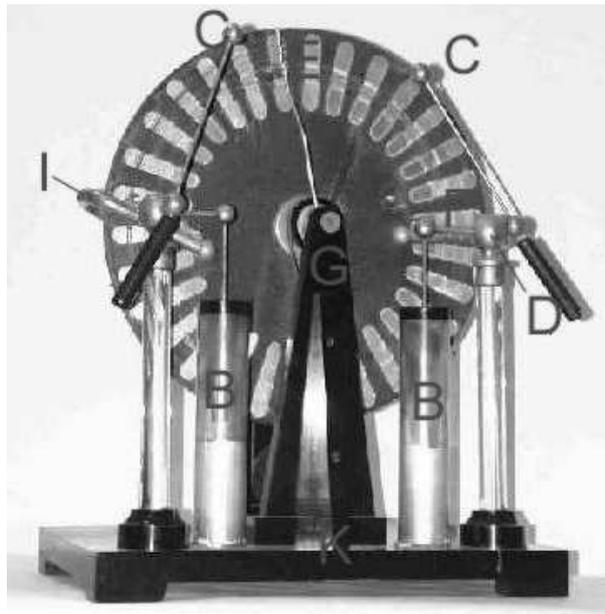


Abbildung 1.27: Die Influenzmaschine.

A: Scheiben;

B: Leydener Flaschen;

C: Elektroden mit Funkenüberschlag;

D: Ausgleichskonduktoren;

E: Saugbüschel;

F: Kontakt zu den Leydener Flaschen;

G: Hartgummibalken (Scheiben-Lager);

I: Kontakt zu gegenüberliegenden Büscheln;

K: Klemmen zur Stromentnahme

Quelle: http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U_materialien/leifiphysik/web_ph10/versuche/01_ladung/influenzmaschine/influenzmasch.html

1.9 Multipolentwicklung

Ziel der Multipolentwicklung ist es, das elektrische Feld einer Ladungsverteilung anzugeben, die nicht auf einem Punkt konzentriert ist sondern in einem kleinen Bereich um den Koordinatenursprung lokalisiert ist. Dies bedeutet, dass die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ nur für Vektoren \vec{r} mit kleinem Betrag von Null verschieden ist. Als Beispiel betrachten wir die Ladungsverteilung eines Atomkernes. Aus der Sicht der Elektronen, die diesen Atomkern in einem Atom umgeben, ist diese Ladungsverteilung in erster Näherung punktförmig und trägt die Gesamtladung Ze mit Z der Kernladungszahl, also der Zahl der Protonen im Kern, und e die Elementarladung eines Protons. Bei genauerer Untersuchung stellt sich aber heraus, dass die Ladung des Atomkernes nicht punktförmig ist. Berechnet man mit den Methoden der Quantenmechanik die stationären Lösungen der Schrödingergleichung für die Elektronen im Feld des Atomkernes, so hängen die Ergebnisse für die Energien dieser stationären Lösungen ein wenig von der genauen Form der Ladungsverteilung ab. Aus der charakteristischen Strahlung des Atoms erhält man die Information über die Differenzen dieser Energien und damit im Prinzip auch Information über die Ladungsverteilung des Atomkernes. Genauere Daten erhält man aus Experimenten, bei denen Elektronen an der Ladungsverteilung des Kernes gestreut werden.

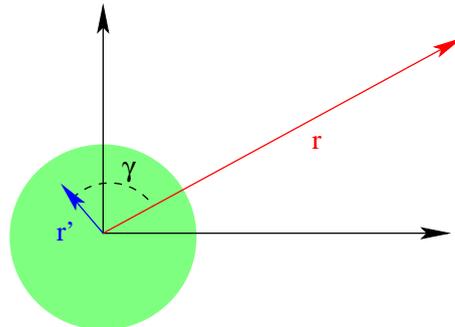


Abbildung 1.28: Koordinaten für die Berechnung des Potentials einer lokalisierten Ladungsverteilung

Im folgenden wollen wir eine lokalisierte Ladungsverteilung im feldfreien Raum betrachten. Für das elektrostatische Potential, das von dieser Ladungsverteilung erzeugt wird, gilt:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.39)$$

Da wir uns für das Potential an Stellen \vec{r} ausserhalb der Ladungsverteilung, die am Koordinatenursprung lokalisiert sein soll, interessieren, gilt $r > r'$, der Abstand des Beobachtungspunktes \vec{r} vom Zentrum der Ladungsverteilung ist sehr groß im Vergleich zu den Abständen r' von Punkten an denen sich Ladungen befinden (siehe auch Abb 1.28). Für diesen Fall betrachten wir nun die Funktion

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}}, \quad (1.40)$$

wobei γ den Winkel zwischen den Vektoren \vec{r} und \vec{r}' bezeichnet. Diese Funktion in (1.40) bestimmt nach (1.39) den Einfluss einer Ladung am Ort \vec{r}' auf das elektrostatische Potential ϕ am Ort \vec{r} . Um eine geeignete Approximation für diese Funktion zu finden, schreiben wir sie um auf die Form

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\chi \cos \gamma + \chi^2}} \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{r'}{r},$$

wobei χ Werte annimmt die sehr klein sind im Vergleich zu 1. Deshalb ist es sinnvoll diese Funktion in eine Potenzreihe nach Potenzen von χ zu entwickeln (Taylorreihe um $\chi = 0$) was uns auf einen Ausdruck der Form

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \chi^l P_l(\cos \gamma), \quad (1.41)$$

führt. In dieser Entwicklung bezeichnen $P_l(\cos \gamma)$ die sogenannten Legendre Polynome, das sind Polynome vom Grad l in ihrem Argument $\cos \gamma$. Als Beispiele für diese Legendre Polynome geben wir explizit an:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Die Legendre Polynome höherer Ordnung l kann man dann mit Hilfe der Rekursionsformel

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x) \quad (1.43)$$

bestimmen. Betrachten wir diese Gleichung für $l = 1$ so ergibt sich

$$2P_2(x) = 3xP_1(x) - 1P_0(x),$$

was mit (1.42) auf

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad (1.44)$$

führt. Damit ergibt sich also für die Entwicklung in (1.41)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 + \chi \cos \gamma + \chi^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) + \dots \right]. \quad (1.45)$$

Setzt man diese Entwicklung in (1.39) ein, so ergibt sich eine Summe nach den Beiträgen geordnet nach dem Summationsindex l in dieser Entwicklung

$$\phi(\vec{r}) = \sum_l \phi_l(\vec{r}). \quad (1.46)$$

Man nennt diese Entwicklung die **Multipolentwicklung** für das elektrostatische Potential. Aus der Herleitung wissen wir, dass diese Multipolentwicklung gut konvergiert, wenn $\chi \ll 1$, beziehungsweise $r' \ll r$ ist. In diesem Fall reicht es also aus die Terme niedriger Ordnung in l , die niedrigen Multipole zu betrachten. Insbesondere ergibt sich für $l = 0$ der **Monopolbeitrag** der Ladungsverteilung zu

$$\begin{aligned} \phi_0(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \end{aligned}$$

Der Monopolbeitrag der Ladungsverteilung zum Potential, ϕ_0 ist also identisch mit dem Potenzial, das sich ergibt, wenn die gesamte Ladung Q im Koordinatenursprung, also der Position der Ladungsverteilung vereinigt ist. Wenn die Ladungsverteilung elektrisch neutral ist, also $Q = 0$, so ist der wichtigste Beitrag zu ϕ gegeben durch den **Dipolanteil** ($l = 1$) in der Form

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{r'}{r} \cos \gamma \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{r'}{r} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{d}, \tag{1.47}
 \end{aligned}$$

mit der Definition

$$\vec{d} = \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}', \tag{1.48}$$

für das Dipolmoment \vec{d} der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$. Dieses Dipolmoment ist genau so wie das Monopolmoment (d.h. die Gesamtladung Q) eine charakteristische Größe für die Ladungsverteilung. Da es sich bei dem Dipolmoment \vec{d} um einen Vektor handelt, sind hier also 3 charakteristische Größen enthalten, z.B. repräsentiert durch die kartesischen Komponenten von \vec{d} .

Allgemein können die Multipolbeiträge $\phi_l(\vec{r})$ in (1.46) berechnet werden mit

$$\begin{aligned}
 \phi_l(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{r'^l}{r^l} P_l(\cos \gamma) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^{l+1}} \int_V d^3r' (r')^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \cdot \rho(\vec{r}') \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_l \sum_m \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \tag{1.49}
 \end{aligned}$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde das **Additionstheorem** benutzt

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \tag{1.50}$$

wobei Y_{lm} , die sogenannten **Kugelflächenfunktionen**, wohldefinierte Funktionen von den Winkelparametern ϑ und φ des Vektors \vec{r} (beziehungsweise ϑ' und φ' für \vec{r}') in Kugelkoordinaten sind. Beachte, dass γ der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' ist. Mit der Darstellung in (1.49) ist die Berechnung des Potentials also aufgeteilt in die Summe von jeweils zwei Faktoren, wobei der erste vom Ort \vec{r} abhängig ist, an dem das Potential bestimmt werden

soll. Die zweiten Faktoren, die nur von der Form der Ladungsverteilung abhängen, nennen wir die *Multipolmomente* der Ladungsverteilung:

$$q_{l,m}^* = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (1.51)$$

In diesen Multipolmomenten $q_{l,m}$ ist also die ganze Information über die Ladungsverteilung enthalten, und mit ihnen ist das Potential direkt berechenbar.

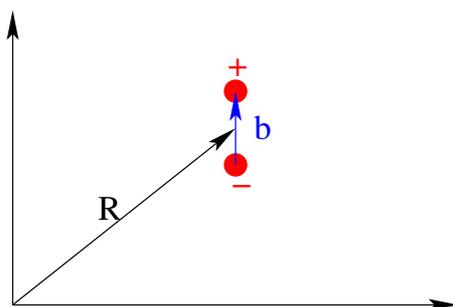


Abbildung 1.29: Einfache Ladungsverteilung mit Dipolmomente an der Position \vec{R} .

Als ein Beispiel für eine lokalisierte Ladungsverteilung betrachten wir ein System aus 2 Punktladungen. Eine positive Ladung q befinde sich an der Position $\vec{R} + \vec{b}/2$, eine zweite negative Ladung an der Stelle $\vec{R} - \vec{b}/2$ (siehe auch Abb. 1.29). Der Vektor \vec{R} bezeichnet also das Zentrum dieser Ladungsverteilung und der Vektor \vec{b} steht für den Verbindungsvektor von der negativen Ladung zur positiven. Mit Hilfe der δ -Funktionen ist diese Ladungsverteilung definiert durch

$$\rho(\vec{r}) = q\delta\left(\vec{r} - \left(\vec{R} + \vec{b}/2\right)\right) - q\delta\left(\vec{r} - \left(\vec{R} - \vec{b}/2\right)\right).$$

Die Gesamtladung dieser Ladungsverteilung ρ ist offensichtlich Null, d.h. diese Ladungsverteilung besitzt kein Monopolmoment. Das Dipolmoment der Ladungsverteilung berechnet sich nach (1.48)

$$\begin{aligned} \vec{d} &= q \int d^3\vec{r} \vec{r} \delta\left(\vec{r} - \left(\vec{R} + \vec{b}/2\right)\right) - q \int d^3\vec{r} \vec{r} \delta\left(\vec{r} - \left(\vec{R} - \vec{b}/2\right)\right) \\ &= q \left(\vec{R} + \vec{b}/2\right) - q \left(\vec{R} - \vec{b}/2\right) \\ &= q\vec{b}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Für diese wohl einfachste Realisierung eines Dipolmomentes ist der Dipol also ein Vektor, dessen Richtung von der negativen zur positiven Ladung weist (parallel zum Verbindungsvektor \vec{b}), und dessen Betrag sich aus dem Produkt der Ladung q und dem Abstand der Punktladungen ergibt.

Wie verhält sich eine Ladungsverteilung, die kein Monopolmoment besitzt und nur durch ihr Dipolmoment charakterisiert ist in einem externen elektrischen Feld \vec{E} ? Es soll zunächst die Energie einer solchen Anordnung berechnet werden. Nach den Grundgleichungen der Elektrostatik wissen wir, dass ein solches elektrisches Feld sich als Gradient

eines Potentials, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ berechnen lässt. Die Energie eine Ladung q an eine Position \vec{r} zu positionieren ist gegeben durch $U = q\phi(\vec{r})$. Um also die beiden Punktladungen der Ladungsverteilung (1.9) an ihre Positionen zu bringen, muss also insgesamt die Energie

$$U = q\phi(\vec{R} + \vec{b}/2) - q\phi(\vec{R} - \vec{b}/2),$$

aufgebracht werden. Da wir annehmen können, dass der Abstand b der beiden Ladungen klein ist gegenüber anderen Abmessungen des Systems (es soll sich ja um eine gut lokalisierte Ladungsverteilung handeln), können wir die Werte für das Potential in dieser Gleichung mit einer Taylorentwicklung um den Punkt \vec{R} schreiben

$$\begin{aligned} U &= q \left[\phi(\vec{R}) + \frac{\vec{b}}{2} \cdot \vec{\nabla}\phi + \dots \right] - q \left[\phi(\vec{R}) - \frac{\vec{b}}{2} \cdot \vec{\nabla}\phi + \dots \right] \\ &\approx q\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\phi \\ &= -\vec{d} \cdot \vec{E}, \end{aligned} \tag{1.53}$$

wobei wir das Ergebnis (1.52) für das Dipolmoment und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ benutzt haben. Die Energie des Systems, Dipol in einem elektrischen Feld \vec{E} , ist also minimal, wenn der Dipolvektor \vec{d} parallel zum elektrischen Feld \vec{E} steht.

Da die Gesamtladung einer reinen Dipolverteilung identisch Null ist, wirkt auf eine solche Dipolladungsverteilung in einem homogenen elektrischen Feld \vec{E} keine Kraft, denn es gilt ja

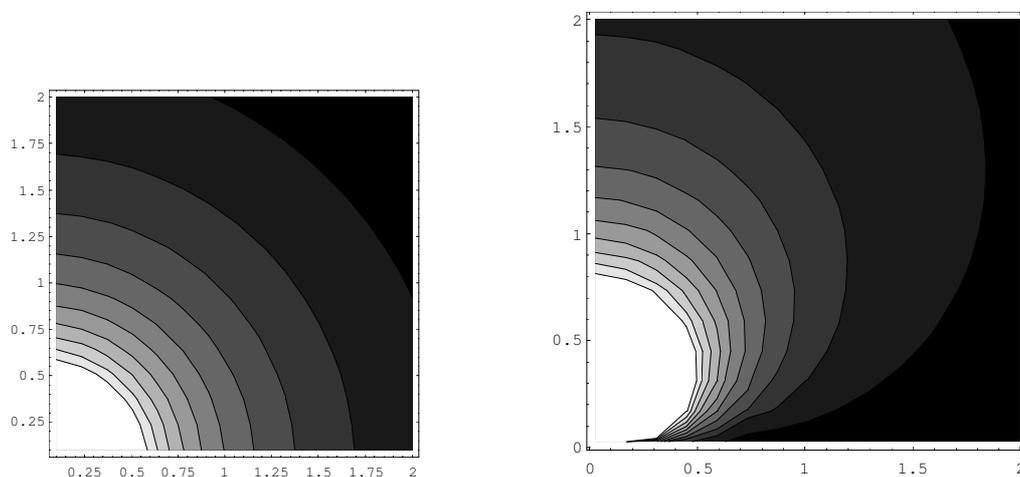
$$\vec{F}_d = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{d} \cdot \vec{E}) = 0,$$

da ja in einem homogenen Feld \vec{E} die Ableitungen der kartesischen Komponenten E_x , E_y und E_z nach den Koordinaten identisch Null sind. Aber in einem solchen Feld ergibt sich ein Drehmoment, das wir aus der Addition der Drehmomente auf die beiden Punktladungen bestimmen können zu

$$\begin{aligned} \vec{D}_d &= \left(\vec{R} + \frac{\vec{b}}{2} \right) \times q\vec{E} + \left(\vec{R} - \frac{\vec{b}}{2} \right) \times (-q)\vec{E} \\ &= q\vec{b} \times \vec{E} \\ &= \vec{d} \times \vec{E} \end{aligned} \tag{1.54}$$

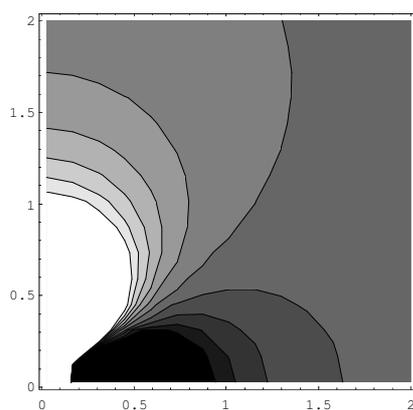
Zur Illustration sind in den Bildern 1.30 und 1.31 Kontourplots oder Höhenlinien für die elektrostatischen Potentiale eines elektrischen Monopols, Dipols und Quadrupolmoments in einem Ausschnitt der $x-z$ Ebene aufgetragen. Diese Illustrationen sollen nur einen Eindruck vermitteln und es wird deshalb auf eine genauere Angabe der Einheiten usw. verzichtet.

Das elektrische Feld für einen elektrischen Dipol im Koordinatenursprung in Richtung der z -Achse ist durch die Vektorpfeile in Figur 1.32 skizziert. An einigen willkürlich ausgewählten Punkten in der $x-z$ Ebene geben die Vektorpfeile die Stärke und die Richtung des elektrischen Feldes an.



(a) Monopolmoment

(b) Dipolmoment

Abbildung 1.30: *Potential elektrischer Multipole in der $x - z$ Ebene*

Quadrupolmoment

Abbildung 1.31: *Potential elektrischer Multipole in der $x - z$ Ebene*

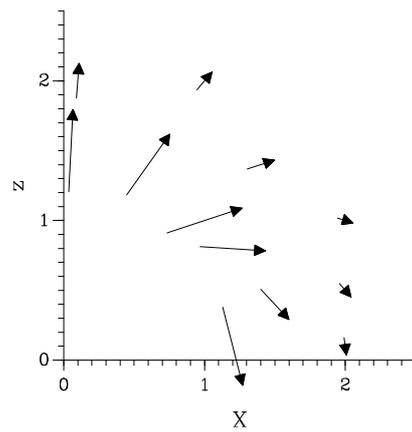


Abbildung 1.32: *Elektrisches Feld eines Dipols in z-Richtung*

1.10 Dipole in der Natur

Das Dipolmoment zweier entgegengesetzt geladener Punktladungen $\pm q$ im Abstand \vec{r} ist⁸:

$$\vec{d} = q\vec{r}, \quad (1.55)$$

wobei der Verbindungsvektor \vec{r} von der negativen zur positiven Ladung zeigt. Befinden sich M Dipole in einem Volumen V , so definieren wir die **Polarisation**

$$\vec{P} := \frac{1}{V} \sum_{i=1}^M \vec{d}_i. \quad (1.56)$$

Das **Dipolmoment** hat die **Einheit Cm**, die **Polarisation** entsprechend die **Einheit C/m²**.

Wenn wir anstelle zweier Punktladungen kompliziertere Ladungsverteilungen betrachten, so können wir die Schwerpunkte der positiven bzw. negativen Ladung ermitteln. Das Dipolmoment dieser Ladungen beträgt ganz analog zu den Punktladungen $\vec{d} = q\vec{r}$, wobei jetzt \vec{r} die Ladungsschwerpunkte verbindet.

Nehmen wir an, in einem zweiatomigen Molekül seien die Ladungen $\pm e$ (bzw. ihre Schwerpunkte um 0.1 \AA (10^{-11} m) voneinander getrennt. Das Dipolmoment dieses Moleküls beträgt dann $1.6 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$, was wir als "typische" Größenordnung eines atomaren Dipolmoments annehmen können. Hätte man 10^{23} solcher Moleküle in einem Volumen von 1 cm^3 vollständig ausgerichtet, so würde deren Polarisation 0.16 C/m^2 bzw. $1.6 \cdot 10^{-5} \text{ C/cm}^2$ betragen.

In der Natur können wir **induzierte und permanente Dipole** beobachten. Induzierte Dipole entstehen erst bei Anlegen eines elektrischen Feldes. Auch Moleküle mit permanentem Dipolmoment sind ohne äußeres elektrisches Feld in der Regel zufällig orientiert. Sie richten sich bei Anlegen eines Feldes teilweise in Feldrichtung aus. Daneben existieren sogenannte **Ferroelektrete**, bei denen die Dipolmomente unterhalb einer gewissen Temperatur auch ohne angelegtes Feld eine Vorzugsrichtung aufweisen.

Besprechen wir nun die verschiedenen Dipole im einzelnen:

1.10.1 Induzierte Dipole und Verschiebungspolarisation

Sehr vielen Materialien (Gase, Flüssigkeiten, Festkörper) sind bei Abwesenheit eines äußeren Feldes unpolar, die positiven und negativen Ladungsschwerpunkte fallen zusammen. Dies gilt z. B. für Atome wie He, gleichatomige Moleküle wie O_2 , N_2 , oder auch für linear aufgebaute Moleküle wie CO_2 (die beiden Sauerstoffatome und das Kohlenstoffatom liegen auf einer Geraden, die O-Atome sind dabei symmetrisch um das C-Atom angeordnet). Auch viele Festkörper sind ohne äußeres Feld unpolar.

Bei Anlegen eines elektrischen Feldes verschieben sich die Ladungsschwerpunkte proportional zum angelegten Feld:

$$\vec{d} = \alpha \vec{E}, \quad (1.57)$$

⁸Das Dipolmoment wird häufig auch mit \vec{p} bezeichnet.

wobei α die **molekulare elektrische Polarisierbarkeit** ist. Die Dimension von α ist $\text{C}^2\text{m}/\text{N}$.

Bezogen auf die Polarisation definiert man⁹:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (1.58)$$

mit der elektrischen Suszeptibilität χ_e , die eine dimensionlose Größe ist.

Befinden sich n gleichartige induzierte Dipole im Einheitsvolumen (Dipoldichte: n), so hängen α und χ_e über $\chi_e = n\alpha/\varepsilon_0$ zusammen. Dies gilt, wenn die Dipoldichte so gering ist, dass wir Rückwirkungen der Dipole aufeinander vernachlässigen können. In Abschnitt 1.10.5 werden wird diese Beziehung erweitern und Rückwirkungen mit einbeziehen.

Man muss weiterhin zwischen einer **elektronischen Polarisierbarkeit** und einer **ionischen Polarisierbarkeit** unterscheiden. Im ersten Fall verschiebt das elektrische Feld den Ladungsschwerpunkt der Elektronen in einem Atom bzw. Molekül gegenüber dem/den Atomkern(en), im zweiten Fall, der in Festkörpern wichtig ist, verschieben sich positive und negative Ionenrümpfe gegeneinander.

Für Gase liegt χ_e typischerweise im Bereich $10^{-2} - 10^{-4}$. In Festkörpern werden Werte der Größenordnung $1 - 10$ erreicht. Genauere Angaben wollen wir hier noch nicht machen, da wir mit der Dielektrizitätskonstanten ε noch eine weitere Größe einführen werden, die von χ_e bzw. α abhängt und leichter experimentell zugänglich ist ($\varepsilon = \chi_e + 1$).

1.10.2 Permanente Dipole und Orientierungspolarisation

Viele Moleküle (prominentes Beispiel: H_2O) besitzen ein permanentes Dipolmoment. Im Fall von Wasser bilden die beiden H^+ -Ionen einen Winkel von 108° zum O^{2-} -Ion, positive und negative Ladungsschwerpunkte sind damit getrennt. Das Dipolmoment des Wassers beträgt $6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$.

Im äußeren Feld versuchen sich diese permanenten Dipole parallel zum Feld auszurichten, es gilt auch hier: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$. Bei endlicher Temperatur wirkt dem allerdings die statistische Bewegung der Moleküle entgegen. Für nicht allzu tiefe Temperaturen findet man, dass die Polarisation näherungsweise durch

$$\vec{P} \approx \frac{1}{3} n \frac{\vec{d}\vec{E}}{k_B T} \cdot \vec{d} \quad (1.59)$$

gegeben ist, also proportional zu $1/T$ ist. In (1.59) ist n die Zahl der Dipole pro Volumeneinheit und k_B die Boltzmann-Konstante. Der Faktor $\vec{d}\vec{E}$ ist bis auf das Vorzeichen gerade die potentielle Energie eines Dipols im elektrischen Feld, der Faktor $\vec{d}\vec{E}/k_B T$ ergibt sich aus einer Taylor-Entwicklung des Boltzmannfaktors $\exp(\vec{d}\vec{E}/k_B T)$, der wie bei vielen anderen statistischen Problemen der Thermodynamik auch hier auftritt.¹⁰

Man nennt die Abhängigkeit $\chi_e \propto 1/T$ auch **Curie-Gesetz**. Materialien, die diesem Gesetz gehorchen, bezeichnet man als **paraelektrisch**.

Für H_2O hat χ_e bei Zimmertemperatur einen Wert von 80.

⁹Wir nehmen hierbei an, dass \vec{d} bzw. \vec{P} in Feldrichtung induziert werden. Dies ist notwendigerweise so. Falls \vec{d} und \vec{E} nicht parallel sind, müssen α bzw. χ durch eine Matrix (Tensor) ersetzt werden. Auch ist der lineare Zusammenhang zwischen \vec{d} und \vec{E} nur bei nicht allzu großen Feldstärken erfüllt.

¹⁰Ohne äußeres Feld weisen die Dipole statistisch in alle 3 Raumrichtungen. $1/3$ der Dipole weist im Mittel in die z -Richtung, parallel zu der das elektrische Feld angelegt sein soll. Die Energie der

1.10.3 Ferroelektrische Stoffe

Einige Festkörper entwickeln ein permanentes Dipolmoment innerhalb der Kristallstruktur. Beispiele für **Ferroelektrika** sind Bariumtitanat (BaTiO_3), PbTiO_3 oder das Seignette-Salz ($\text{KNaCH}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$). Die Kristallstruktur des BaTiO_3 ist in Abb. 1.34(a) gezeigt. Innerhalb einer Einheitszelle¹¹ beträgt das Dipolmoment ca. $2 \cdot 10^{-29}$ Cm. Die Abb. 1.34(b) zeigt schematisch die Phasenumwandlungen des Materials bei Abkühlung zusammen mit der sich bei der jeweils ausbildenden spontanen Polarisation. Es bilden sich eine Reihe unterschiedlicher ferroelektrischer Phasen aus

In "Ferroelektrika" sind diese Dipole unterhalb einer charakteristischen Temperatur, der **Curie-Temperatur** T_c über viele Atome hinweg parallel zueinander ausgerichtet.

Bei Temperaturen $T > T_c$ sind die Dipolmomente in Abwesenheit eines äußeren Feldes ungeordnet (oder noch nicht vorhanden). Man erhält im äußeren Feld einem Gesetz der Form $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$, wobei $\chi_e = \text{const.}/(T - T_c)$ ist. Die elektrische Suszeptibilität divergiert also bei der Curietemperatur T_c .

Die Abb. 1.35 illustriert dieses Verhalten am Beispiel von PbTiO_3 . In der Abbildung sind drei Größen gegen die Temperatur aufgetragen: die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \chi_e + 1$, die Änderung dP/dT der Polarisation mit der Temperatur, sowie die spezifische Wärme bei konstantem Druck (vgl. Physik I). Die Dielektrizitätskonstante ist ebenso wie¹² χ_e oberhalb von T_c proportional zu $1/(T - T_c)$. Unterhalb T_c hängt die (spontane) Polarisation stark von der Temperatur ab, dP/dT erreicht ein Maximum bei T_c . Die spezifische Wärme C_p hat ein scharfes Maximum bei T_c , was charakteristisch für einen Übergang in eine geordnete Phase ist¹³.

Die Abb. 1.36 zeigt nochmals die Abhängigkeit $\varepsilon \propto 1/(T - T_c)$ für verschiedene Ferroelektrite.

Kühlt man einen Ferroelektriten durch T_c , so ordnen sich die Dipolmomente allerdings im allgemeinen nicht über die gesamte Probe hinweg parallel an. Es existieren vielmehr ferroelektrisch geordnete Bereiche (**Domänen**), deren Polarisation in unterschiedliche Richtungen zeigt.

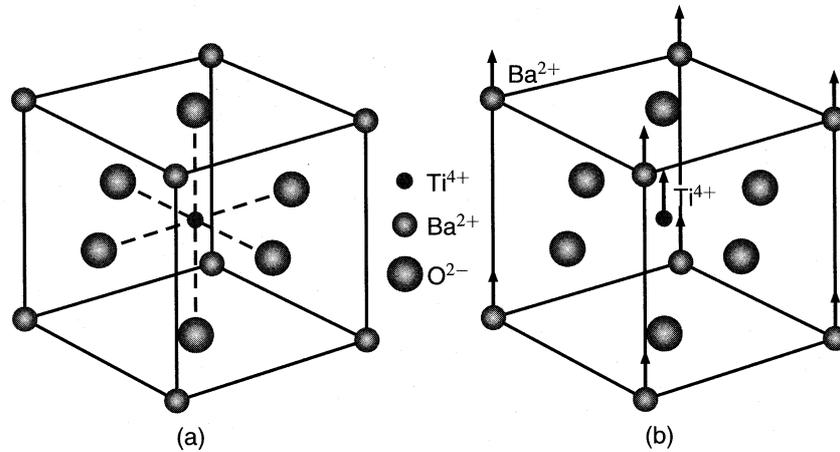
Durch Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes vergrößern sich die Domänen, deren Polarisation in Feldrichtung zeigt, bis oberhalb einer gewissen "**Sättigungsfeldstärke**" praktisch alle Dipolmomente parallel zum Feld zeigen. Der Effekt ist in Abb. 1.37 gezeigt.

in Richtung $\pm z$ weisenden Dipole ist $\mp d\vec{E} = \mp d_z E_z$. Die Wahrscheinlichkeit, einen Dipol $\pm d_z$ zu finden, ist proportional zu $\exp(\pm d_z E_z / k_B T)$. Die Polarisation ist gerade durch die Differenz der in $+z$ bzw. in $-z$ -Richtung orientierten Dipole gegeben, also proportional zu $[\exp(+d_z E_z / k_B T) - \exp(-d_z E_z / k_B T)] / [\exp(+d_z E_z / k_B T) + \exp(-d_z E_z / k_B T)]$. Der Nenner sorgt dafür, dass die Wahrscheinlichkeit 1 wird, dass die Dipole entweder in $+z$ oder in $-z$ -Richtung orientiert sind. Die Taylor-Entwicklung für $d_z E_z / k_B T \ll 1$ ergibt für diesen Ausdruck den Wert $d_z E_z / k_B T$, womit $P_z \approx (1/3)d_z (d_z E_z / k_B T)$ folgt. Dieser Ausdruck wurde in (1.59) vektoriell geschrieben.

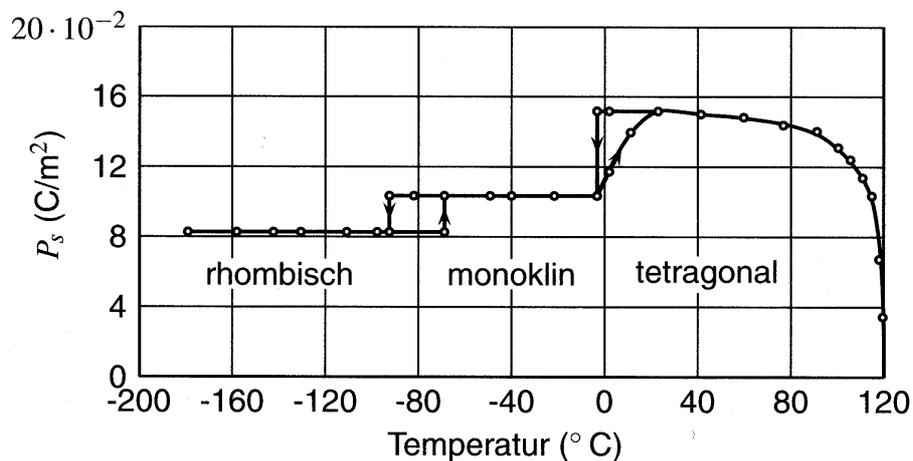
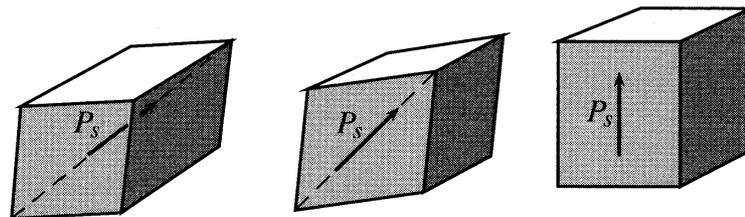
¹¹Die "Einheitszelle" ist die elementare Atomanordnung, die, immer wieder in den drei Raumrichtungen zusammengefügt, schließlich den gesamten Kristall ergibt.

¹²Den Unterschied $\varepsilon - \chi = 1$ können wir für $\varepsilon \gg 1$ vernachlässigen.

¹³Genauer gesagt liegt hier ein Phasenübergang 2. Ordnung vor, bei dem die Entropie S , d. h. der Grad der Unordnung im Kristall stetig verläuft, aber einen Knick aufweist. Die Ableitung $C_p \propto dS/dT$ springt dann beim Phasenübergang.



(a) Kristallstruktur von BaTiO_3 im unpolaren (links) und polaren (rechts) Zustand (Quelle: Ch. Kittel, Festkörperphysik, 12. Auflage, Abb. 13.10).



(b) Spontane Polarisation von BaTiO_3 bei verschiedenen Temperaturen (Quelle: Ch. Kittel, Festkörperphysik, 12. Auflage, Abb. 13.11).

Abbildung 1.34: Kristallstruktur und Phasenumwandlung von BaTiO_3

Hier wurde ein BaTiO_3 -Kristall in verschiedenen elektrischen Feldern mit einer schwachen Säure angeätzt. An den Domänengrenzen findet ein verstärkter Ätzprozess statt, die Domänen werden sichtbar.

Abb. 1.38 zeigt schematisch die Anordnung der Dipole in einer im hohen äußeren Feld

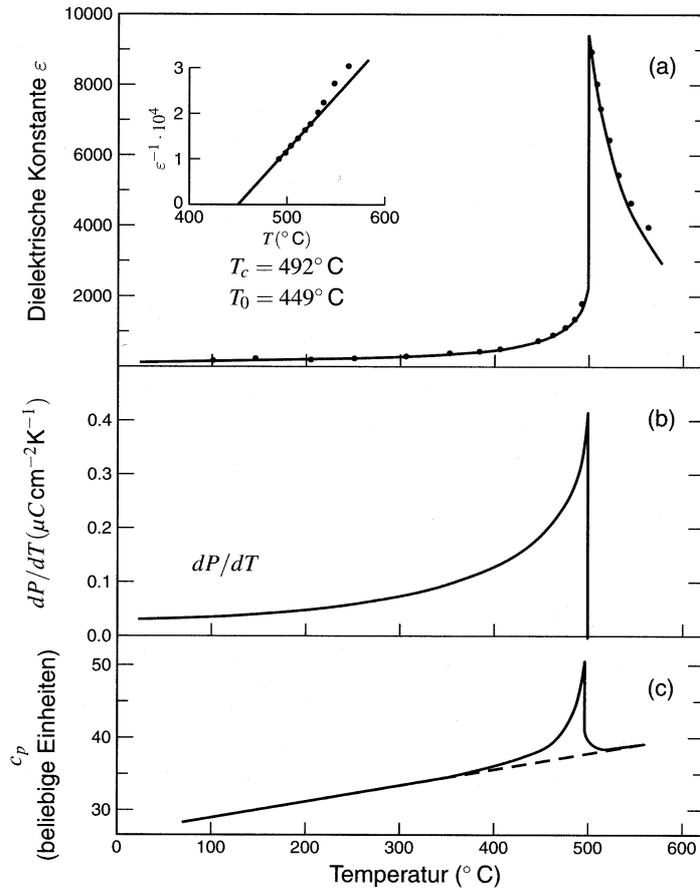


Abbildung 1.35: Dielektrizitätskonstante $\epsilon = \chi_e + 1$, die Änderung dP/dT der Polarisation mit der Temperatur, sowie die spezifische Wärme bei konstantem Druck für PbTiO_3 (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik 12. Auflage, Abb. 13.9).

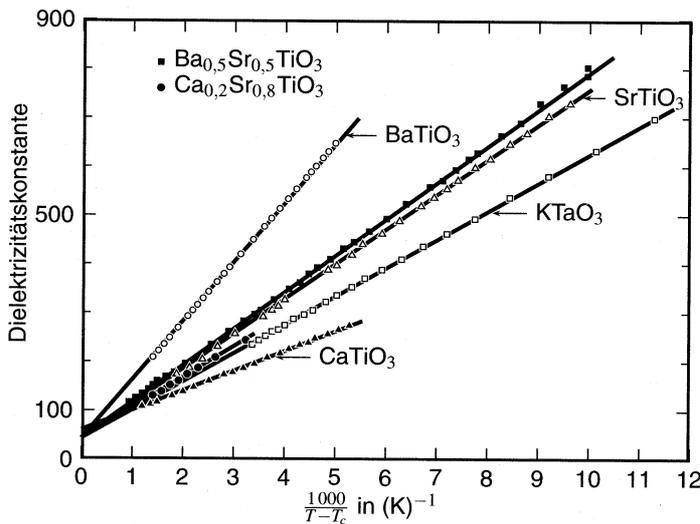


Abbildung 1.36: Reziproke Dielektrizitätskonstante gegen $1000/(T - T_c)$ für verschiedene Ferroelektrite (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik 12. Auflage, Abb. 13.12).

eindomänig polarisierten Probe. In diesem Fall erhält man netto makroskopische Oberflächenladungen auf der Probe.

Für BaTiO_3 werden hierbei bei Zimmertemperatur "Sättigungspolarisationen" (d. h. alle Dipole ausgerichtet) \vec{P} um 0.3 C/m^2 erreicht. Verringert man das äußere Feld, so bleibt die Ausrichtung der Polarisation z. T. erhalten, man erhält nun auch für $\vec{E} = 0$ eine

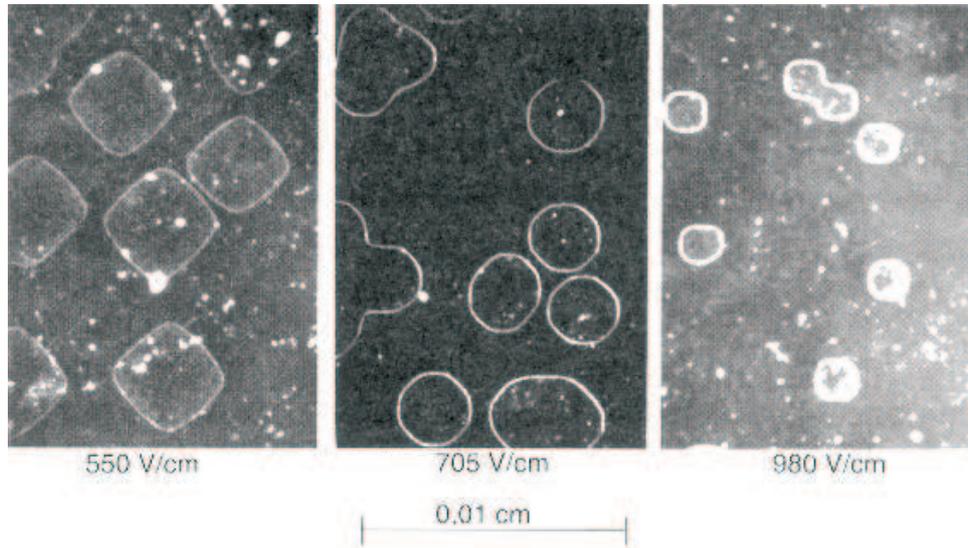


Abbildung 1.37: Domänengrenzen (geschlossene helle Linien) in einem BaTiO_3 -Einkristall. Die Grenzen wurden durch Ätzen der Oberfläche mit einer schwachen Säure sichtbar gemacht. In einer Domäne weist die Polarisation in eine Richtung (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik 12. Auflage, Abb. 13.22).

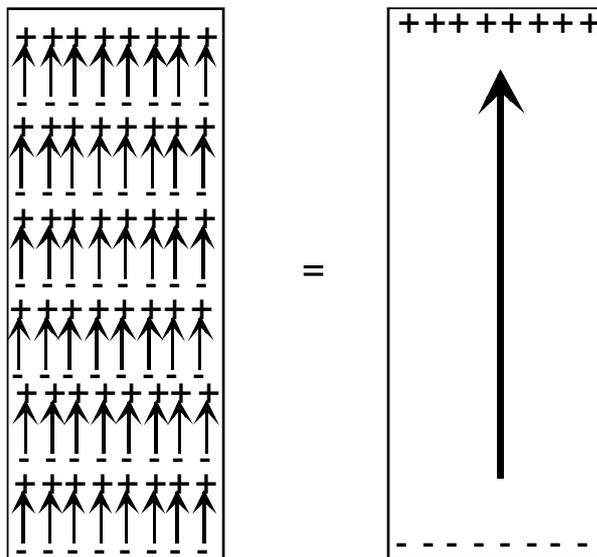


Abbildung 1.38: Makroskopisch polarisierter Ferroelektret. Ladungen im Inneren kompensieren sich, es erscheint eine sehr hohe Oberflächenladung

nichtverschwindene Polarisation, die sog. **remanente Polarisation**. Erst bei Umpolen des äußeren Feldes kann \vec{P} bei der Koerzitivfeldstärke \vec{E}_k zum Verschwinden gebracht bzw. umgekehrt werden. Variiert man das Feld zwischen $\pm \vec{E}$, so wird insgesamt eine **”Hystereseschleife”** durchlaufen wie in Abb. 1.39 dargestellt.

Ganz ähnliche Eigenschaften lassen sich - bezogen auf magnetische Felder - bei Ferromagneten beobachten. Die Kräfte, die Ferromagnete aufeinander ausüben, sind Ihnen vermutlich wohlbekannt. Dagegen verhalten sich Ferroelektrete relativ unscheinbar, obwohl die Coulombkräfte zwischen den Ferroelektreten eigentlich sehr stark sein müssten. Der Grund liegt darin, dass die Oberflächenladung der Ferroelektreten sehr schnell durch

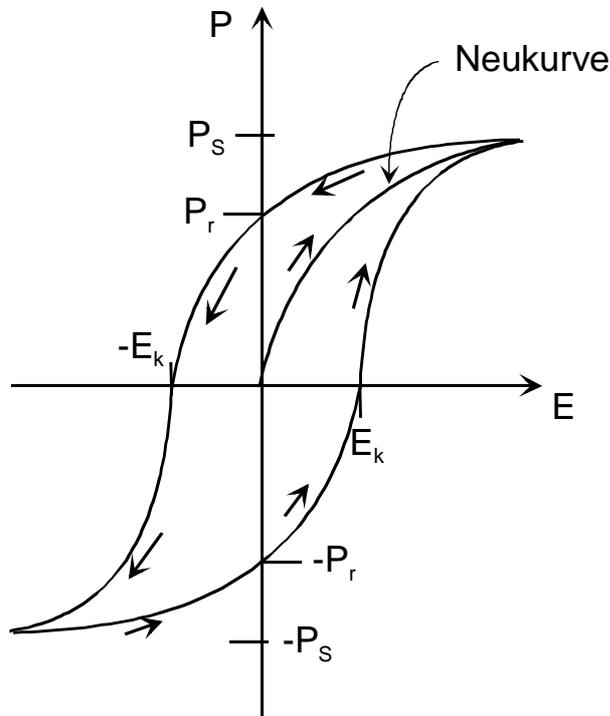


Abbildung 1.39: Schematische Darstellung der Hystereseschleife eines Ferroelektriten

entgegengesetzte Ladungen aus der Luft kompensiert wird, der Ferroelektrite also faktisch neutral erscheint. Ändert man aber die Polarisation des Ferroelektriten um $\Delta \vec{P}$, etwa durch Änderung der Temperatur, so lässt sich die Änderung der Polarisationsladung sehr wohl beobachten. \vec{P} lässt sich ebenfalls durch Druck auf den Ferroelektriten ändern. Wir werden dies nachfolgend im Experiment demonstrieren.

1.10.4 Versuche zur Aufladung und Polarisation von Isolatoren

- Wir beobachten zunächst, dass **Papierstücke** von einem geladenen Stab (Kunststoff bzw. Porzellan) angezogen werden. Das Papier wird polarisiert, die Papierstücke entfernen sich von ihrer Unterlage und "fliegen" zum Stab.
- Wenn wir eine **geladene Kugel** vor eine elektrisch neutrale **Paraffinplatte** bringen, so wird die Kugel von der Platte angezogen, wobei der Effekt aber deutlich geringer ist als beim analogen Experiment mit Leitern. Die Paraffinplatte wird im Feld der Kugel polarisiert (Verschiebungspolarisation), die Kugel wird angezogen.
- Wir erzeugen einen hohen elektrischen Feldgradienten über eine geladene metallische Spitze, die sich vor einer entgegengesetzt geladenen metallischen Platte befindet. Die Anordnung ist in einem Ölbad. Im Ölbad strömen **Luftblasen**. Das Öl wird polarisiert. Netto erscheinen auf der Blasenoberfläche Ladungen, die Blase verhält sich wie ein elektrischer Dipol, wobei die Polarität der Oberflächenladungen aber gerade anders herum ist als dies bei einem **Öltropfen** der Fall wäre (siehe auch: Abschnitt 1.10.5). Im äußeren Feldgradienten bewegt sich die Blase deshalb *gegen* in Richtung des Feldgradienten, also von der Spitze weg.

- Die relativ starke **Orientierungspolarisation von Wasser** demonstrieren wir an Hand eines Wasserstrahls, auf den wir einen Feldgradienten wirken lassen. Das Feld richtet die Wassermoleküle (teilweise) aus, diese werden in Richtung des Feldgradienten gezogen. Die Ablenkung des Wasserstrahls ist klar zu beobachten.
- Wir können jetzt die Wirkung elektrischer Felder auf die **Weizengriesskörner** im Ölbad qualitativ verstehen. Wir nehmen zunächst an, das elektrische Feld sei räumlich homogen und zeige in z -Richtung. Die Körner werden im elektrischen Feld polarisiert (Verschiebungspolarisation), erfahren aber durch das homogene Feld keine Kraftwirkung. Jetzt müssen wir die Kräfte zwischen den Körnern berücksichtigen. Körner, die kettenartig in z -Richtung angeordnet sind, ziehen sich an, vgl. Abb. 1.40. Die Kräfte zwischen benachbarten in x - oder y -Richtung parallelverschobener Ketten sind (insbesondere auf Grund der Aufladung der Enden) insgesamt leicht abstoßend. Dadurch erhält man dadurch eine Serie gleichverteilter paralleler Ketten, die parallel zur Feldrichtung orientiert sind (dass genau diese Anordnung der Körner die energetisch beste ist können wir hier allerdings nicht in Strenge beweisen). In inhomogenen Feldern werden zusätzliche Kräfte auf die Körner ausgeübt, so dass diese in Richtung des Feldgradienten wandern. Auch in diesem Fall führen die Wechselwirkungen zwischen den Körnern dazu, dass sich diese kettenartig entlang der Feldlinien anordnen. Die Feldlinien werden dadurch "abgebildet".

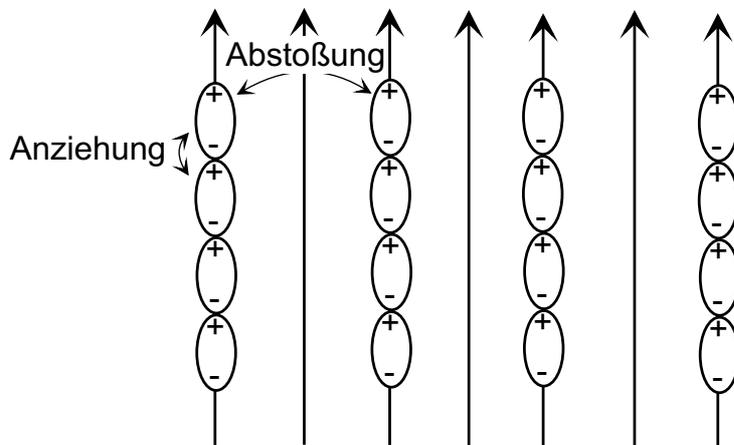


Abbildung 1.40: *Polarisation der Weizengriesskörner bei der Abbildung elektrischer Feldlinien.*

- Experimente mit **Ferroelektronen**: Wir haben einen Ferroelektronen (BaTiO_3) zwischen zwei metallische Platten eingespannt, die mit einem Elektrometer verbunden sind. Dieses zeigt zunächst keinen Ausschlag an. Über die Platten kann eine Kraft auf den Ferroelektronen ausgeübt werden. Drücken wir auf den Ferroelektronen, so ändert sich der Atomabstand und damit auch das Dipolmoment und die Polarisation im Material. Hierdurch ändert sich die Oberflächenladung des Elektronen, in den Metallplatten werden durch Influenz elektrische Ladungen erzeugt, das Elektrometer schlägt aus. Mit diesem Effekt lassen sich auch Anzünder konstruieren: Man drückt auf einen Ferroelektronen. Die über zwei Spitzen auftretende Spannung wird so hoch, dass Funken Schlag auftritt.

Der Vorgang funktioniert auch umgekehrt: Durch Anlegen eines elektrischen Feldes ändert sich die Dicke l des Ferroelektronen. Quantitativ gilt (ohne Beweis): $l \propto E^2$.

Dieser Effekt wird ”**Elektrostriktion**” genannt. Man kann die Polarisation des Ferroelektriten auch durch eine Temperaturänderung verändern (”**pyroelektrischer Effekt**”, s. auch Abb. 1.35).

1.10.5 Wechselwirkende Dipole: Quantitative Betrachtungen

In Abschnitt 1.10.1 hatten wir (induzierte) Dipolmomente im äußeren Feld betrachtet, dabei aber angenommen, dass deren Dichte so gering ist, dass wir Wechselwirkungen zwischen den Dipolen vernachlässigen konnten. In diesem Abschnitt wollen wir den Beitrag mit berücksichtigen, den die Dipole zum gesamten elektrischen Feld in einer Probe liefern.

Vorbemerkungen:

Elliptische Körper im elektrischen Feld

An eine Probe (Dielektrikum) sei ein äußeres Feld \vec{E}_0 angelegt. Das Dielektrikum wird hierdurch polarisiert, es entstehen effektiv Oberflächenladungen, die ihrerseits ein elektrisches Feld erzeugen, das dem äußeren Feld entgegenwirkt (vgl. Abb. 1.41).

Für das über einige Atome (z. B. einer Einheitszelle im Festkörper) gemittelte elektrische Feld in der Probe schreiben wir:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \quad (1.60)$$

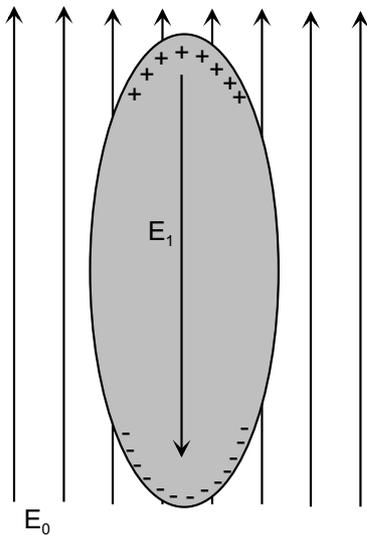


Abbildung 1.41: Dielektrikum im äußeren Feld.

\vec{E}_1 nennt man auch ”**Depolarisationsfeld**”. Es wird gerade durch die induzierten Oberflächenladungen hervorgerufen.

Es zeigt sich nun (ohne Beweis), dass für homogene **Ellipsoide** die durch das Feld \vec{E}_0 erzeugte Polarisation \vec{P} bzw. das Feld \vec{E}_1 im Probeninneren räumlich homogen ist. Wenn \vec{E}_0 entlang einer der Hauptachsen des Ellipsoids angelegt ist, dann ist \vec{E}_1 parallel zu dieser Achse i und es gilt:

$$E_{1,i} = -\frac{N_i p_i}{\epsilon_0}. \quad (1.61)$$

Hierbei nummeriert "i" die Achsen. Die reellen Zahlen N_i sind die "Depolarisationsfaktoren" oder "Entelektrisierungsfaktoren". Es gilt:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1. \quad (1.62)$$

Die **Entelektrisierungsfaktoren für spezielle "Ellipsoide"** sind:

- Kugel: $N = 1/3$ für alle Feldrichtungen
- dünne Platte, Feld senkrecht zur Platte: $N = 1$
- dünne Platte, Feld parallel zur Platte: $N = 0$
- langer Stab, Feld parallel zur Stabachse: $N = 0$
- langer Stab, Feld senkrecht zur Stabachse: $N = 1/2$.

Abb. 1.63 zeigt N für ein Rotationsellipsoid für ein parallel zur Figurenachse angelegtes Feld. Für ein langgestrecktes Ellipsoid ($c \gg a$) geht N gegen 1, für eine oblate Form ($c \ll a$) geht N gegen 0.

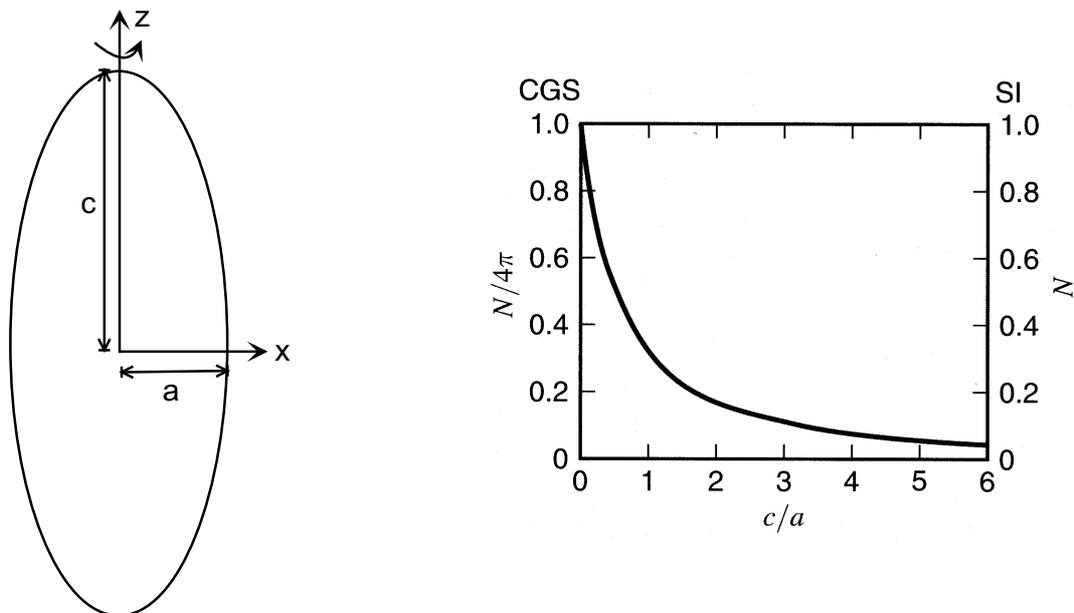


Abbildung 1.42: Entelektrisierungsfaktor für ein Rotationsellipsoid, parallel zur Figuren- achse angelegt. (Aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik, Abb. 13. 5)

Für die Polarisation gilt nach (1.58): $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$. Am Eingang des Abschnitts hatten wir uns allerdings noch nicht zwischen \vec{E}_0 und dem Feld im Medium unterschieden. Wir formulieren jetzt \vec{E} präziser als das *gemittelte* Feld im Medium (entsprechend hängt die atomare Polarisierbarkeit mit dem *lokalen* Feld zusammen) Wenn \vec{E}_0 parallel zu einer der Hauptachsen angelegt ist, gilt also:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \left(\vec{E}_0 - \frac{N \vec{P}}{\epsilon_0} \right) \quad (1.63)$$

(Wir unterschlagen der Einfachheit halber den Index "i", der die Richtung der Hauptachse nummeriert). Aufgelöst nach \vec{P} ergibt dies:

$$\vec{P} = \frac{\chi_e \epsilon_0}{1 + N \chi_e} \vec{E}_0 = \chi_{\text{eff}} \vec{E}_0 \quad (1.64)$$

Die effektive Suszeptibilität χ_{eff} hängt also von der Probenform ab, ebenso wie das Feld \vec{E}_1 .

Feld in einem Hohlraum

Wir betrachten jetzt ein Ellipsoid, in dem sich ein ebenfalls ellipsoider Hohlraum befindet, z. B. eine Hohlkugel oder eine Luftblase (vgl. Abb. 1.43).

Das Feld im Hohlraum schreiben wir als

$$\vec{E}_{\text{HR}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1.65)$$

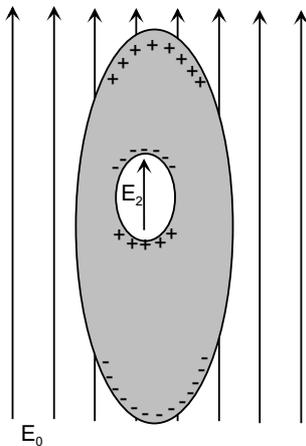


Abbildung 1.43: *Ellipsoid mit Hohlraum*

Zuzüglich zu den bereits eingeführten Feldern \vec{E}_0 und \vec{E}_1 wirkt das Feld \vec{E}_2 , das auch **”Lorentz-Feld”** genannt wird. Es rührt von Ladungen, die auf der Oberfläche des Hohlraums induziert wurden. Genau wie auf der äußeren Oberfläche der Probe heben sich auch auf der Oberfläche des Hohlraums die induzierten Ladungen nicht auf, es entsteht netto eine Oberflächenladung auf dem Hohlraum. Für einen ellipsoiden Hohlraum ist \vec{E}_2 bzw. die durch die Oberflächenladungen erzeugte Polarisation wiederum homogen. Wir nehmen weiter an, das elektrische Feld sei parallel zu einer Hauptachse des Hohlraums angelegt. \vec{E}_2 ist dann antiparallel zu \vec{E}_1 (bzw. parallel zu \vec{E}_0) gerichtet. Für eine kugelförmige Blase gilt: $\vec{E}_2 = 1/(3\epsilon_0)\vec{P}$. Dies ist gerade das negative des Wertes \vec{E}_1 für eine Vollkugel.

Das Feld in einer kugelförmigen Blase innerhalb einer kugelförmigen Probe ist also gleich \vec{E}_0 . Die Blase selbst stellt einen Dipol dar, deren Dipolmoment allerdings genau in die entgegengesetzte Richtung zeigt wie das Dipolmoment eines kugelförmigen Tropfens im Feld \vec{E}_0 . Die Ablenkung einer solchen Gasblase, die allerdings einem inhomogenen Feld ausgesetzt war, hatten wir ja experimentell (s. Abschnitt 1.10.4) beobachtet.

Lokal induziertes Dipolmoment, Clausius-Mosotti-Beziehung

Wir fragen jetzt danach, welches Dipolmoment in einem ganz speziellen Atom innerhalb eines Festkörpers oder einer Flüssigkeit induziert wird. Alle Dipole zusammen erzeugen ein elektrisches Feld, das verschieden ist vom angelegten Feld \vec{E}_0 . Dieses Feld berechnen wir mit folgender Idee:

- wir beschreiben die (ellipsoide) Probe fast überall über ein über eine Atompositionen gemittelttes Feld außer in der unmittelbaren Nachbarschaft des herausgegriffenen Atoms i . Wir betrachten dazu ein (einige Nanometer großes) Kugelvolumen um dieses Atom. Hier berücksichtigen wir die wahren, durch die dort induzierten elektrischen Dipole erzeugten Felder (vgl. Abb. 1.44).

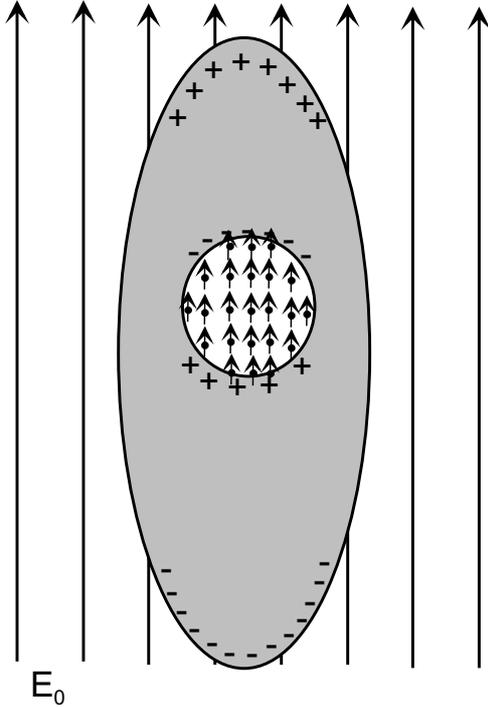


Abbildung 1.44: Zur Ableitung der Clausius-Mosotti-Beziehung: Aufteilung der Probe in einen homogenen Bereich und eine kleine Hohlkugel, in der die (atomaren) Dipole explizit berücksichtigt werden.

Wir schreiben damit das lokale Feld am Ort des Atoms i :

$$\vec{E}_{\text{lok}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \quad (1.66)$$

Zu den uns bereits bekannten Feldern \vec{E}_0 bis \vec{E}_2 kommt jetzt das Feld \vec{E}_3 der Dipole innerhalb des Kugelvolumens. Im allgemeinen muss dieses Feld (z. B. per Computer) explizit berechnet werden. Es gibt aber einige Anordnungen, für die dieses Feld verschwindet. Hierzu gehören Dipole, die kubisch angeordnet sind (d. h. die Dipole befinden sich auf den Ecken aneinandergelagerter Würfel). Wir nehmen an, das äußere Feld bzw. die Dipole seien in z -Richtung orientiert. Das von diesen Dipolen erzeugte elektrische Feld ist:

$$E_z^{\text{Dipol}} = \frac{|\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \vec{d}_k = \frac{|\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{2z_k^2 - x_k^2 - y_k^2}{r_k^5}. \quad (1.67)$$

Nun sind auf Grund der kubischen Symmetrie und der Symmetrie des Kugelvolumens die x , y , und z -Richtungen äquivalent, man erhält:

$$\sum_k \frac{z_k^2}{r_k^5} = \sum_i \frac{x_i^2}{r_k^5} = \sum_i \frac{y_k^2}{r_k^5}. \quad (1.68)$$

Damit verschwindet $E_z^{\text{Dipol}} = E_3$. Ähnliches gilt auch, wenn die Dipole statistisch verteilt sind. Man erhält also:

$$\vec{E}_{\text{lok}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \quad (\text{"Lorentz-Beziehung"}). \quad (1.69)$$

Das lokal am Atom i induzierte Dipolmoment ist:

$$\vec{d}_i = \alpha \vec{E}_{\text{lok}} = \alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \right). \quad (1.70)$$

Wir summieren jetzt über alle Atome (die wir der Einfachheit halber als gleichartig annehmen) und erhalten:

$$\frac{1}{V} \sum_{i=1}^M \vec{d}_i = \vec{P} = \frac{M}{V} \alpha \vec{E}_{\text{lok}} = n\alpha \vec{E}_{\text{lok}} = n\alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \right). \quad (1.71)$$

Mit $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ ergibt dies:

$$\varepsilon_0 \chi_e = n\alpha \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) \quad (1.72)$$

oder:

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} (3 + \chi_e) \quad (1.73)$$

oder:

$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (\text{"Clausius-Mosotti-Beziehung"}) \quad (1.74a)$$

Wir können die Clausius-Mosotti-Beziehung mit $\varepsilon = 1 + \chi_e$ auch ausdrücken als:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (\text{"Clausius-Mosotti-Beziehung"}) \quad (1.74b)$$

Die Clausius-Mosotti-Beziehung verknüpft also die makroskopische Größen χ_e bzw. ε_e mit der atomaren Polarisierbarkeit α auch im Fall "dichter" Medien (für den Fall, dass $\vec{E}_3 = 0$). Im Grenzfall $\chi_e \ll 1$ erhalten wir

$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} \approx \frac{\chi_e}{3} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (1.75)$$

bzw.

$$\chi_e \approx \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}, \quad (1.76)$$

was gleich der in 1.10.1 benutzten Beziehung für χ_e ist.

Ferroelektrite und Curie-Weiss Gesetz

Wir betrachten nochmals (1.71), $\vec{P} = n\alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \right)$ und schreiben diese als:

$$\vec{P} = \left(1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \right) = n\alpha \vec{E}. \quad (1.77)$$

Hieraus folgt:

$$\chi_e = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}. \quad (1.78)$$

Diese Suszeptibilität divergiert offensichtlich für $n\alpha/(3\varepsilon_0) \rightarrow 1$.

Ohne Wechselwirkung zwischen den Dipolen wäre nach (1.76) $\chi_{e,0} = n\alpha/\varepsilon_0$. Setzen wir hierfür ein Curie-Gesetz an, d. h. $n\alpha/\varepsilon_0 = \text{const.}/T$, so erhalten wir aus (1.78):

$$\chi_e = \frac{\text{const.}}{T} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\text{const.}}{3T}} = \frac{\text{const.}}{T - \text{const.}/3} = \frac{\text{const.}}{T - T_c} \quad (1.79)$$

Dies ist aber genau das **Curie-Weiß-Gesetz**, das wir bei der experimentellen Behandlung der Ferroelektrite kennengelernt haben.

Es sei hier nochmals angemerkt, dass χ_e für $T \rightarrow T_c$ (von hohen Temperaturen her) gegen unendlich geht. Ein beliebig kleines äußeres Feld genügt dann, eine große Polarisation zu erzeugen. Unterhalb von T_c ist überhaupt kein äußeres Feld mehr nötig.

Andere Formen der Ladungsordnung

Diese ferroelektrische Ordnung ist ein Spezialfall einer ganzen Reihe unterschiedlicher Ordnungstypen. So existieren auch "**Antiferroelektrika**", in denen sich diese Dipole unterhalb der "**Néel-Temperatur**" antiparallel ausrichten. (Beispiele: WO_3 , NaNbO_3). Für diese Materialien gilt für Temperaturen knapp oberhalb der Ordnungstemperatur T_N ("Néel-Temperatur"):

$$\chi_e = \frac{\text{const.}}{T + T_N}. \quad (1.80)$$

Man beachte das positive Vorzeichen im Nenner. Bei Antiferroelektriten verhält sich die Suszeptibilität oberhalb der Übergangstemperatur so, als würde sie bei $-T_N$ gegen unendlich laufen.

Weitere Ordnungstypen sind abschließend in Abb. 1.45 gezeigt.

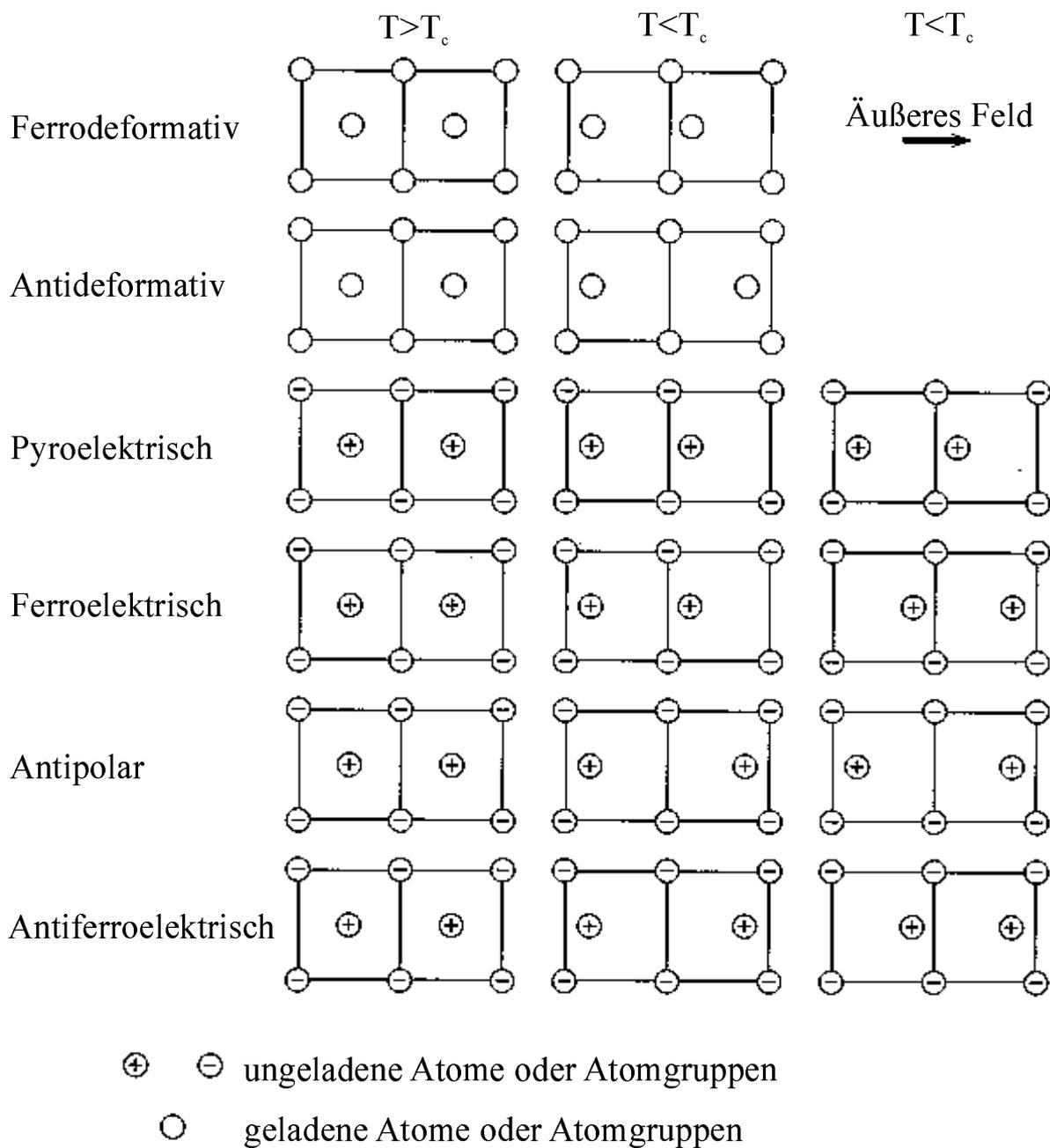


Abbildung 1.45: Verschiedene Typen struktureller Phasenübergänge (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik, 12. Auflage, Abb. 13.19).

1.11 Der Plattenkondensator

Unter einem Plattenkondensator verstehen wir eine Anordnung zweier paralleler metallischer Platten (Fläche A), zwischen denen eine Potenzialdifferenz (Spannung) U angelegt ist (s. Abb. 1.46).

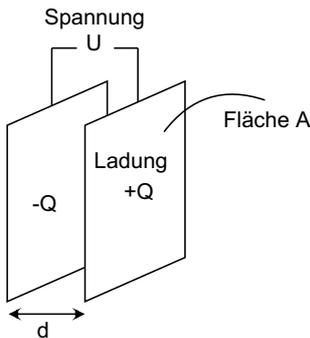


Abbildung 1.46: Schematische Darstellung eines Plattenkondensators

Bevor wir genauer auf den Plattenkondensator eingehen, wollen wir zunächst

1.11.1 Das elektrische Feld einer unendlich großen metallischen Platte

betrachten. Die Platte sei positiv geladen und wie in Abb. 1.47 in der (y, z) -Ebene orientiert. Das elektrische Feld außerhalb der Platte muss senkrecht auf den beiden Plattenoberflächen bei $x = 0$ und $x = d$ stehen, also dort parallel zur x -Richtung sein.

Auf Grund der Symmetrie des Problems wird die Ladung homogen über die Oberflächen der Platte verteilt sein und damit weder die Flächenladung σ (Ladung pro Flächeneinheit) noch das von diesen Ladungen erzeugte Feld von y und z abhängen.

Wir betrachten jetzt ein quaderförmiges Volumen (Abmessungen X, Y, Z ; der Quader sei in x -Richtung so gelegt, dass die Platte durch ihn hindurchläuft) und integrieren $\text{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ über dieses Volumen:

$$\iiint_V \text{div} \vec{E} \, d\vec{r} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.81)$$

Die linke Seite ergibt mittels des Gaußschen Satzes:

$$\iiint_V \text{div} \vec{E} \, d\vec{r} = \int_F \vec{E} \, d\vec{f} = 2E_{x,0}YZ. \quad (1.82)$$

Das elektrische Feld durchdringt nur die beiden in der (y, z) Ebene liegenden Quaderseiten; jede der Seiten liefert einen Beitrag $E_{x,0}YZ$, wobei YZ die Fläche der entsprechenden Quaderseite ist und $E_{x,0}$ der Wert des elektrischen Feldes am Ort der entsprechenden Fläche ist. Die Flächennormalen der beiden Quaderflächen stehen antiparallel zueinander (sie zeigen nach "außen", so dass sich die beiden Beiträge addieren).

Die rechte Seite von (1.81) ergibt $\iiint_V \rho/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0$, wobei Q die im Quader eingeschlossene Gesamtladung ist. Damit erhalten wir:

$$E_{x,0} = \frac{Q}{2YZ\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1.83)$$

Das Feld hängt nicht von x ab, ist also räumlich homogen und von den Plattenoberflächen weggerichtet.

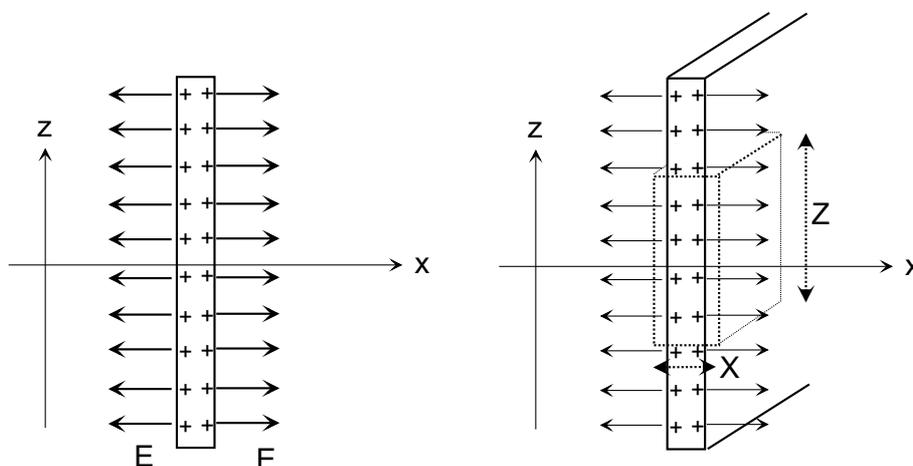


Abbildung 1.47: *Feld einer unendlich großen metallischen Platte.*

1.11.2 Das elektrische Feld im unendlich großer Plattenkondensator

Wir betrachten jetzt zwei parallele, unendlich große Platten im Abstand d (Die Platten sind wiederum in der (y, z) -Ebene unendlich ausgedehnt). Die Platten seien entgegengesetzt geladen (Flächenladungsdichten $\pm\sigma$). Zwischen den Platten addiert sich das Feld der Platten zu:

$$E_x = 2 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1.84)$$

Im Außenraum kompensieren sich die Beiträge durch die beiden Platten, das Gesamtfeld ist dort Null (s. Abb. 1.48).

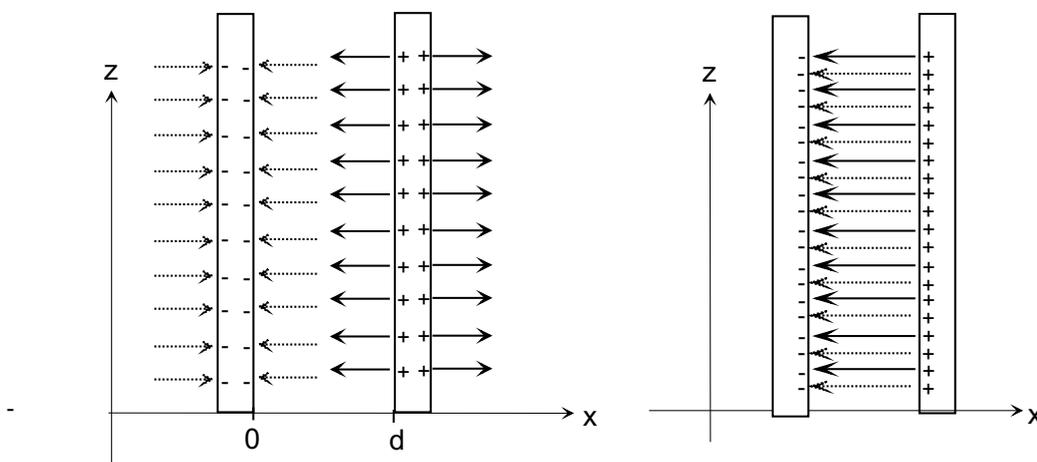


Abbildung 1.48: *Elektrisches Feld im unendlich großen Plattenkondensator*

1.11.3 Das elektrische Feld im endlich großen Plattenkondensator

Schließlich betrachten wir einen Plattenkondensator *endlicher* Größe. Am Rand jeder der beiden Platten wird das elektrische Feld auch Beiträge in y - und z -Richtung haben. Dadurch wird auch das Feld des Plattenkondensators am Rand inhomogen wie in Abb. 1.49 skizziert. Das Feld "leckt" gewissermaßen am Rand aus dem Kondensator heraus.

Die Abb. 1.50 zeigt experimentelle Feldlinien, wie sie mittels der Weizengrieskörner gewonnen wurden.

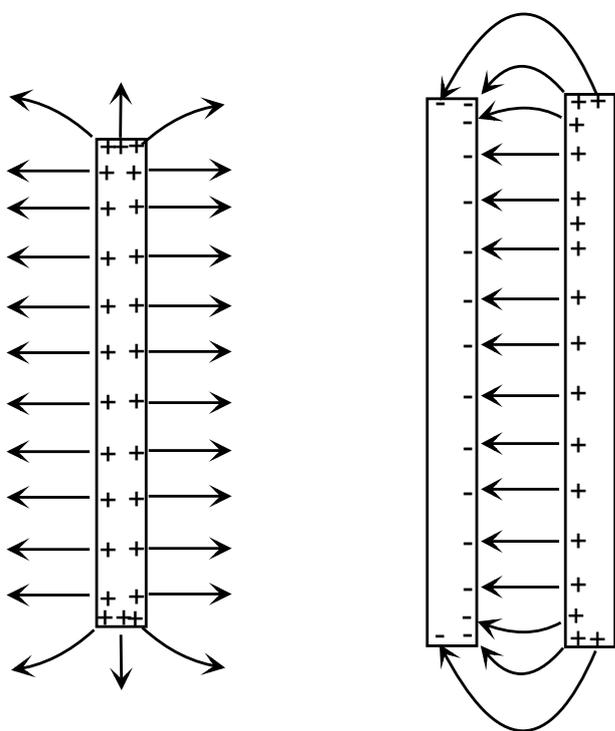


Abbildung 1.49: Feld um eine endlich große Platte (links) und einen endlich großen Plattenkondensator (rechts) (Schemazeichnung)

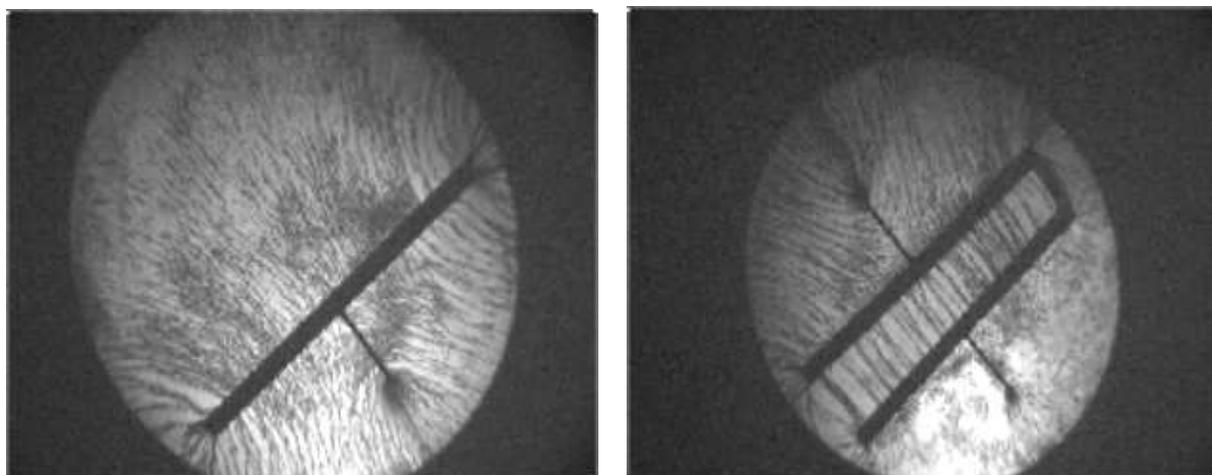


Abbildung 1.50: Feld um eine endlich große Platte (links) und einen endlich großen Plattenkondensator (rechts) (Experiment)

1.11.4 Das Potenzial im Plattenkondensator

Die negativ geladene Platte des Kondensators sei bei $x = 0$, die positive Platte bei $x = d$. Das elektrische Feld (wir vernachlässigen das Randfeld) ist dann $\vec{E} = -(\sigma/\varepsilon_0)\hat{e}_x$, mit $\sigma > 0$. Es gilt:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \text{bzw.} \quad E_x = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Die Integration liefert:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x.$$

Speziell bei $x = d$, also am Ort der positiv geladenen Platte, gilt:

$$\varphi(d) - \varphi(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d.$$

Der Spannungsabfall U zwischen den Platten ist gerade $U = \varphi(d) - \varphi(0) = (\sigma/\varepsilon_0)d$. Mit $E = \sigma/\varepsilon_0$ können wir dies auch schreiben als:

$$U = E \cdot d \tag{1.85}$$

Im Außenraum ist das elektrische Feld null und damit $\varphi = \text{const.}$. Damit erhalten wir den in Abb. 1.51 skizzierten **Potenzialverlauf**.

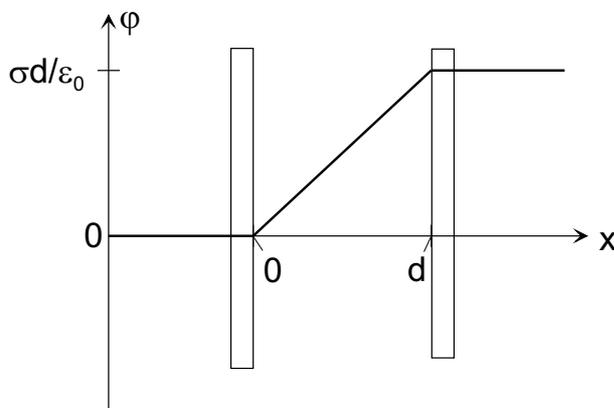


Abbildung 1.51: Potenzialverlauf im Kondensator

Die **Einheit der Spannung** U ist **Volt** (V). Mittels des Kondensators können wir jetzt eine genauere Vorstellung entwickeln was "1 Volt" bedeutet¹⁴.

Wir nehmen $d = 1 \text{ m}$ und $U = 1 \text{ V}$ an. Damit ist $E = \sigma/\varepsilon_0 = 1 \text{ V/m}$, was mit $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^2\text{N}$ bedeutet, dass eine Flächenladungsdichte $\sigma = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^2$ auf den Platten vorliegt. Dies entspricht $5.5 \cdot 10^7$ Elementarladungen/ m^2 bzw. 1 Elementarladung pro $1.8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$ bzw. 1 Elementarladung pro $1.8 \cdot 10^4 \mu\text{m}^2$.

Analog hätten wir 1 V auch über das **Potenzial einer Punktladung** einführen können. Für eine Punktladung gilt:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}. \tag{1.86}$$

¹⁴Es sei hier aber angemerkt, dass im SI-System das Volt eine abgeleitete Größe ist. Die elektrische Basisgröße ist das Ampere als Einheit für den Strom. Wir werden hierauf später genauer eingehen.

Dieses Potenzial verschwindet im Unendlichen. Wir definieren $U = \varphi(r) - \varphi(\infty) = \varphi(r)$. Für $Q = 1$ Coulomb erreichen wir $U = 1$ V für $r = 9 \cdot 10^9$ m. Alternativ erreichen wir für $Q = e$ 1 Volt für $r = 1.44$ nm.

1.11.5 Experimente zum Potenzial

Potenzialwaage

Im ersten Versuch bestimmen wir die Kraft, die auf die positiv geladene Platte eines Plattenkondensators wirkt. Die positiv geladene Platte ist vertikal über der negativ geladenen angeordnet. Aus dieser Platte kann ein Teilstück ("Testplatte", Fläche A) aus dem Zentrum herausgehoben werden. Die Anordnung (s. Abb. 1.52) ermöglicht es, Randeffekte zu minimieren: Im Bereich der Testplatte ist das Feld noch (nahezu) vollständig homogen, Randeffekte treten erst am Rand der äußeren Platte auf.

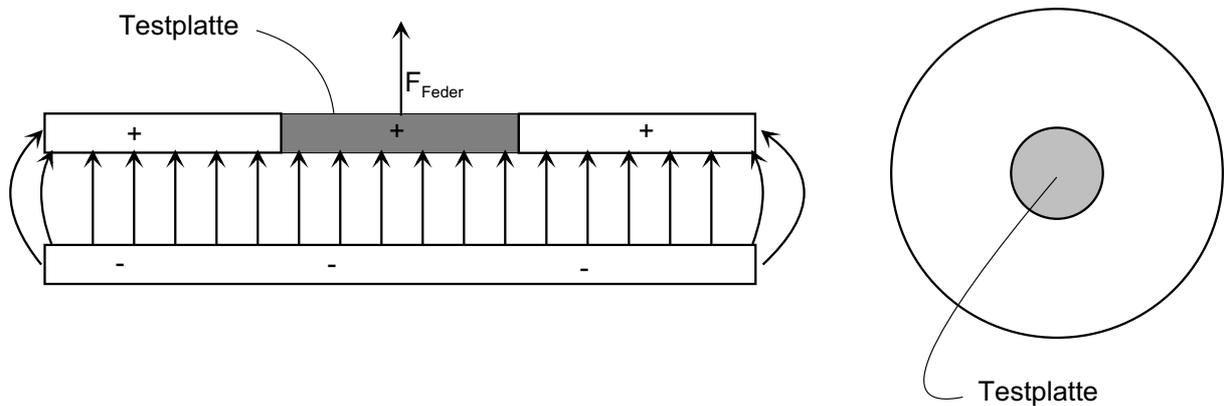


Abbildung 1.52: Oben: Schematischer Aufbau der Potenzialwaage, unten: Die Potenzialwaage

Im Kondensator gilt: $E = U/d$. Auf der Testplatte sei die Ladung Q . Diese Platte wird damit (zusätzlich zur Schwerkraft) mit der Kraft

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}QE\hat{e}_z \quad (1.87)$$

nach "unten", d. h. in Richtung $-\hat{e}_z$ gezogen. Diese Kraft muss von der aufgebracht werden, um die Platte abzuheben.

Der Faktor $1/2$ rührt in (1.87) daher, dass wir die Testplatte im Feld der anderen Kondensatorplatte betrachten müssen. Wir dürfen also nur den Beitrag (1.83) benutzen.

Für den Betrag der Kraft gilt:

$$F = QE = \frac{1}{2}(EA\varepsilon_0) \cdot E = \frac{1}{2}A\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}A\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2. \quad (1.88)$$

Mit $A = 44 \text{ cm}^2$, $d = 1 \text{ cm}$, $U = 5 \text{ kV}$ erwarten wir eine Kraft von $4.86 \cdot 10^{-3} \text{ N}$, was recht genau dem Wert entspricht, den wir experimentell beobachten¹⁵.

Ausmessen von Potenzialdifferenzen mit der Flammsonde

Eine Flammsonde besteht aus einer metallischen Spitze, die an einen isolierenden Schlauch angeschlossen ist. An der Spitze brennt eine kleine Flamme (s. Abb. 1.53). An der Spitze werden freie Ladungsträger erzeugt, so dass die Spitze schnell das Potenzial der Umgebung annimmt. Man misst jetzt die Spannungsdifferenz zwischen der Spitze und einem Nullpunkt, der in der Regel das Erdpotenzial ist. Mit dieser Anordnung fahren wir das Potenzial im Kondensator ab und erkennen den linearen Anstieg von der (geerdeten) negativen Platte zur positiven Platte.

Wir messen zum Vergleich ebenfalls das Potenzial innerhalb und außerhalb eines Faradaykäfigs aus. Innerhalb ist $U = \text{const}$, außerhalb fällt U in etwa wie $1/r$ ab.

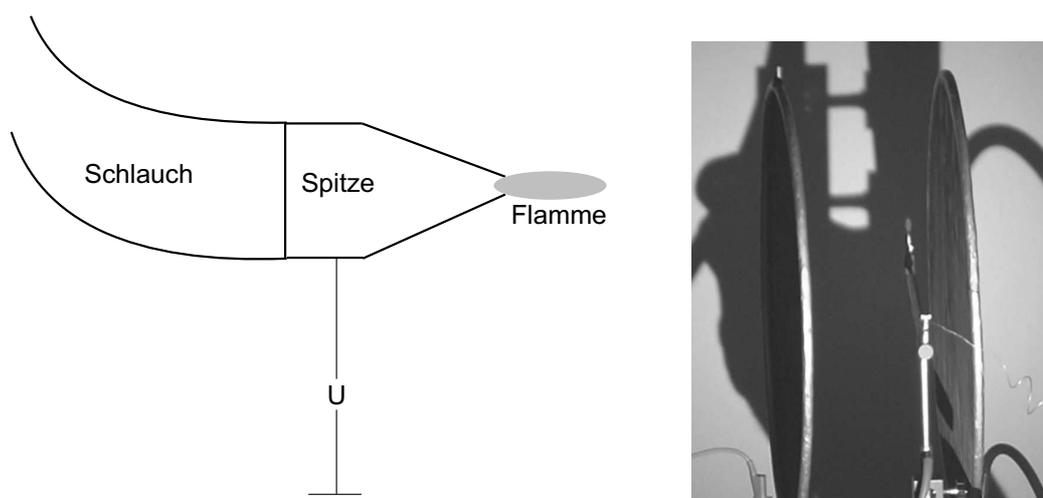


Abbildung 1.53: links: Schematischer Aufbau der Flammsonde, rechts: Flamme im Plattenkondensator

¹⁵Es sei angemerkt, dass wir im Prinzip diese Anordnung verwenden könnten, um die Einheit "1 Volt" auf eine Kraftmessung zurückzuführen. Allerdings wird das Volt heutzutage durch Quanteneffekte auf eine Frequenzmessung zurückgeführt. Wir werden darauf später noch kurz eingehen.

1.11.6 Die Kapazität des Plattenkondensators

Wie definieren die **Kapazität eines Plattenkondensators** als:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1.89)$$

Die **Einheit der Kapazität** ist **Farad [F]**. $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$.

Mit $U = Ed = \sigma d / \varepsilon_0 = Qd / (A\varepsilon_0)$ erhalten wir:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (1.90)$$

mit dem Abstand d zwischen den Kondensatorplatten und der Plattenfläche A .

Analog können wir auch die Kapazität anderer metallischer Objekte bestimmen. So erhalten wir für eine leitende Kugel mit Radius R aus der allgemeinen Beziehung $U = \varphi(r) - \varphi(\infty) = Q / (4\pi\varepsilon_0 r)$ auf der Kugeloberfläche:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad (1.91)$$

Dies ist die **Kapazität einer leitenden Kugel** gegenüber dem Unendlichen (man beachte, dass dagegen die Kapazität des Plattenkondensators auf die negativ geladene Platte bezogen ist).

*Ganz allgemein könnten wir auch N metallische Körper betrachten. Der i -te Körper trage die Ladung Q_i und befinde sich (bezogen auf ein gemeinsames Erdpotenzial) auf dem Potenzial φ_i . Dann gilt für die Ladung auf Körper k : $Q_k = \sum_{i=1}^N C_{ik} \varphi_k$ mit der **Kapazitätsmatrix** C_{ik} . Im allgemeinen muss man die C_{ik} numerisch berechnen, wofür aber geeignete numerische Routinen existieren.*

1.11.7 Energie des Plattenkondensators

Wir berechnen die Energie im Plattenkondensator auf mehrere äquivalente Weisen. Zunächst stellen wir uns vor, die Energie stecke im elektrischen Feld. Die Energiedichte w des elektrischen Feldes ist (s. Abschnitt 1.5):

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (1.36)$$

Integration über das Volumen des Kondensators (wir vernachlässigen wiederum Randfelder) liefert:

$$W = w \cdot V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot Ad \quad (1.92)$$

Hierbei ist A die Fläche der Kondensatorplatten, d der Abstand zwischen den Platten.

Wir können unter Benutzung von $E = \sigma / \varepsilon_0 = Q / A\varepsilon_0$ und $C = \varepsilon_0 A / d$ umschreiben:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A\varepsilon_0} \right)^2 Ad = \frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{d}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1.93)$$

Benutzen wir weiter $U = Ed$ und $Q = CU$, so erhalten wir

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2. \quad (1.94)$$

Welche der drei Ausdrücke in (1.94) für Berechnungen relevant ist, hängt davon ab, welche Größe (Q oder U) im Experiment vorgegeben ist.

Wir können W auch dadurch berechnen, dass wir, ausgehend von ungeladenen Kondensatorplatten, Ladungen dq sukzessive von der linken zur rechten Kondensatorplatte transportieren. Nach einiger Zeit wird die eine Platte die Ladung $-q$, die andere die Ladung $+q$ tragen. Die Energie, die nötig ist, um dq gegen diese Ladung zu transportieren, ist $dW = U(q)dq$. Integration liefert die gesamte Energie, die nötig ist, um die Platten auf die Ladungen $\pm Q$ aufzuladen:

$$W = \int_0^Q U(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}, \quad (1.95)$$

was mit (1.94) übereinstimmt. Die Energie, die aufgebracht werden musste, um den Kondensator zu laden, steckt als Energieinhalt im Kondensator.

Experimentell beobachten wir den umgekehrten Vorgang: Wir entladen einen Kondensator dadurch, dass eine metallische Kugel zwischen den Platten hin- und herpendelt. Nach Berührung mit z. B. der positiven Platte nimmt sie Ladung von dieser auf, wird abgestoßen, gibt diese Ladung an die negative Platte ab und pendelt (jetzt negativ geladen) zurück. Mit dieser Pendelbewegung könnte Arbeit verrichtet werden, die Energie des Kondensator also in mechanische Arbeit umgewandelt werden.

Wir können uns drittens vorstellen die Kondensatorplatten berühren sich anfänglich (d. h. $d = 0$). Wir stellen uns vor, die Ladungen $\pm Q$ werden (z. B. durch Influenz) auf die beiden Platten verteilt; anschließend ziehen wir die beiden Platten auf den Abstand d auseinander. Hierbei müssen wir die Arbeit:

$$W = \int_0^d F dx = \int_0^d QE dx = \int_0^d Q \cdot \frac{1}{2} \frac{Q}{A\epsilon_0} dx = \frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{A\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q^2}{2C} \quad (1.96)$$

verrichten, was wiederum mit (1.94) übereinstimmt.

Bei diesem "Ziehvorgang" nimmt die Kapazität C mit wachsendem d ab.

Wenn wir Q konstant halten, so bedeutet dies, dass $U = Q/C$ proportional zu d zunimmt. Die Energie W wächst entsprechend (1.96) proportional zu d .

Wir hätten auch die Spannung U vorgeben können. Dann gilt mit $Q = CU \propto 1/d$, dass die Ladung auf den Kondensatorplatten während des Auseinanderziehens abnimmt. Ebenso fällt $W = CU^2/2$ proportional zu $1/d$.

Im Experiment demonstrieren wir das Anwachsen von U für $Q = \text{const.}$ Wir messen dabei U durch ein am Rand des Plattenkondensators angebrachtes Elektrometer¹⁶. Der Ausschlag des Elektrometers vergrößert sich beim Auseinanderziehen.

¹⁶Das Elektrometer misst primär die Ladungen (bzw. die Coulomb-Kraft zwischen den Ladungen), die sich auf dem Elektrometer befinden. Das Elektrometer ist elektrisch leitend mit der positiv geladenen Kondensatorplatte verbunden, befindet sich also auf deren Potenzial. Die andere Platte ist geerdet,

1.11.8 Parallel- und Reihenschaltungen von Kondensatoren

Wir betrachten zwei parallelgeschaltete Kondensatoren (Kapazitäten C_1 und C_2), deren obere bzw. untere Platten elektrisch leitend miteinander verbunden sind. Die beiden Kondensatoren sind mit einer Spannungsquelle U verbunden.

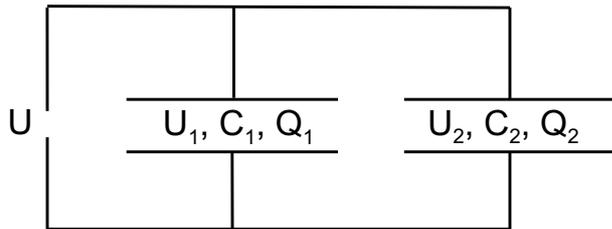


Abbildung 1.54: Zwei parallelgeschaltete Kondensatoren

Die beiden oberen bzw. unteren Platten befinden sich auf jeweils gleichem Potenzial. Damit liegt an beiden Kondensatoren die Spannung U an. Für die Ladungen Q_1 und Q_2 auf den Platten der Kondensatoren 1 und 2 gilt also:

$$Q_1 = C_1 U \quad (1.97a)$$

$$Q_2 = C_2 U \quad (1.97b)$$

Die Gesamtladung auf beiden Platten ist:

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)U = C_{\text{ges}}U \quad (1.98)$$

Die beiden parallelgeschalteten Kondensatoren entsprechen also einem einzigen Kondensator mit der Kapazität

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 \quad (1.99)$$

Völlig analog erhalten wir für N parallelgeschaltete Kondensatoren:

$$C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (1.100)$$

Für **parallelgeschaltete Kondensatoren** müssen wir also die **Kapazitäten addieren**, um die Gesamtkapazität der Anordnung zu erhalten.

Wir betrachten jetzt zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren (s. Abb. 1.55). Die untere Platte des Kondensators 1 ist elektrisch leitend mit der oberen Platte des Kondensators 2 verbunden. Diese Platten liegen daher auf gleichem Potenzial. Entsprechend müssen diese Platten die entgegengesetzt gleiche Ladung tragen.

befindet sich (wie der Rest des Hörsaals) auf Erdpotenzial. Die Ladung Q^* auf dem Elektrometer hängt damit via $Q^* = C_{\text{eff}}U$ von der Spannung über den Kondensatorplatten ab, wobei C_{eff} sich aus Beiträgen sowohl von der geerdeten Kondensatorplatte als auch vom "Rest der Welt" zusammensetzt. Der letztere Anteil dominiert, so dass sich Q^* praktisch nicht ändert, wenn wir die Kondensatorplatten auseinanderziehen. Der Elektrometerrausschlag ist damit also proportional zu U . Wir demonstrieren dies auch dadurch, dass wir U mittels einer Spannungsquelle vorgeben. Der Elektrometerrausschlag bleibt dann konstant.

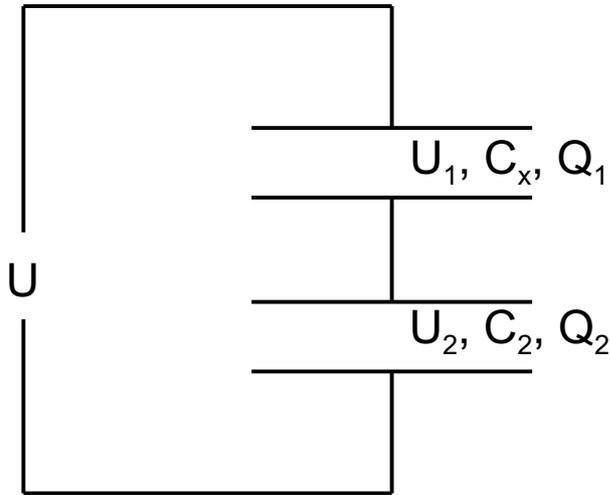


Abbildung 1.55: Zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren

Für die beiden Kondensatoren gilt damit:

$$Q_1 = Q_2 = Q. \quad (1.101)$$

Ferner addieren sich die Spannungsabfälle über den Kondensatoren zur anliegenden Spannung U :

$$U_1 = U_2 = U. \quad (1.102)$$

Andernfalls würde die obere Platte des Kondensators 1 bzw. die untere Platte des Kondensators 2 nicht auf dem Potenzial der jeweiligen Anschlüsse an die Spannungsquelle liegen.

Hieraus folgt:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{\text{ges}}}. \quad (1.103)$$

Es gilt also:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1.104)$$

Analog finden wir für N in Reihe geschaltete Kondensatoren:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (1.105)$$

Wir müssen die Kapazitäten von **in Reihe geschalteten Kondensatoren** also **reziprok addieren**, um (das Inverse) der Gesamtkapazität der Anordnung zu erhalten.

Mit den Beziehungen (1.100) und (1.105) können wir auch die Gesamtkapazität allgemeiner Verschaltungen von Kondensatoren berechnen. Beispielsweise finden wir für die Kapazität zweier parallelgeschalteter Kondensatoren C_1 und C_2 , die ihrerseits in Reihe zu einer Kapazität C_3 angeordnet sind: $C_{\text{ges}} = C_3 + C_{\parallel}$, mit $1/C_{\parallel} = 1/C_1 + 1/C_2$ bzw. $C_{\parallel} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$.

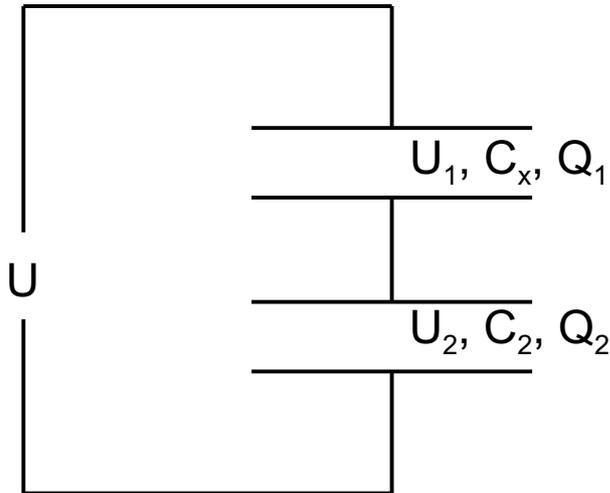


Abbildung 1.56: Anordnung zur Kapazitätsmessung

Um Kapazitäten zu messen, können wir z. B. die in Abb. 1.56 gezeigte Anordnung verwenden. Hierbei muss eine der Kapazitäten (z. B. C_2) bekannt sein.

Für die in Reihe geschalteten Kondensatoren gilt $Q_1 = Q_2$ und $U = U_1 + U_2$.

Hieraus folgt:

$$C_1 = C_2 \frac{U_2}{U - U_2}. \quad (1.106)$$

Bei bekanntem U und U_2 können wir C_1 berechnen.

Weitere Methoden zur Kapazitätsbestimmung, die Wechselspannungen verwenden, werden wir etwas später kennenlernen.

1.11.9 Freie Ladungen im Kondensator

Man kann elektrische Ladungen in den Kondensator bringen und diese dort beeinflussen.

- In einem ersten Demonstrationsversuch laden wir einen metallischen Ball an der positiven Platte auf. Er wird auf die negativ geladene Platte hin beschleunigt und fliegt dort durch ein Loch aus dem Kondensatorinneren heraus.
- Wir stellen eine **Kerze** ins Innere des Kondensators. Sobald wir eine Spannung anlegen, wird die Kerzenflamme auseinandergezogen. In der Kerze werden freie Ladungen (Elektronen und positive Ionen) erzeugt, die auf die positive bzw. negative Platte hin beschleunigt werden und die Flamme verformen. (s. Abb. 1.57)
- Eine etwas ernsthaftere Anwendung besteht darin, einen **Strahl freier Elektronen parallel zu den Kondensatorplatten** in den Kondensator einzuschließen. Die Elektronen werden im Feld je nach Polarität der angelegten Spannung auf eine der beiden Platten hin beschleunigt (Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}$). Der Strahl wird also beim Durchlaufen des Kondensators in der Ebene parallel zur Feldrichtung

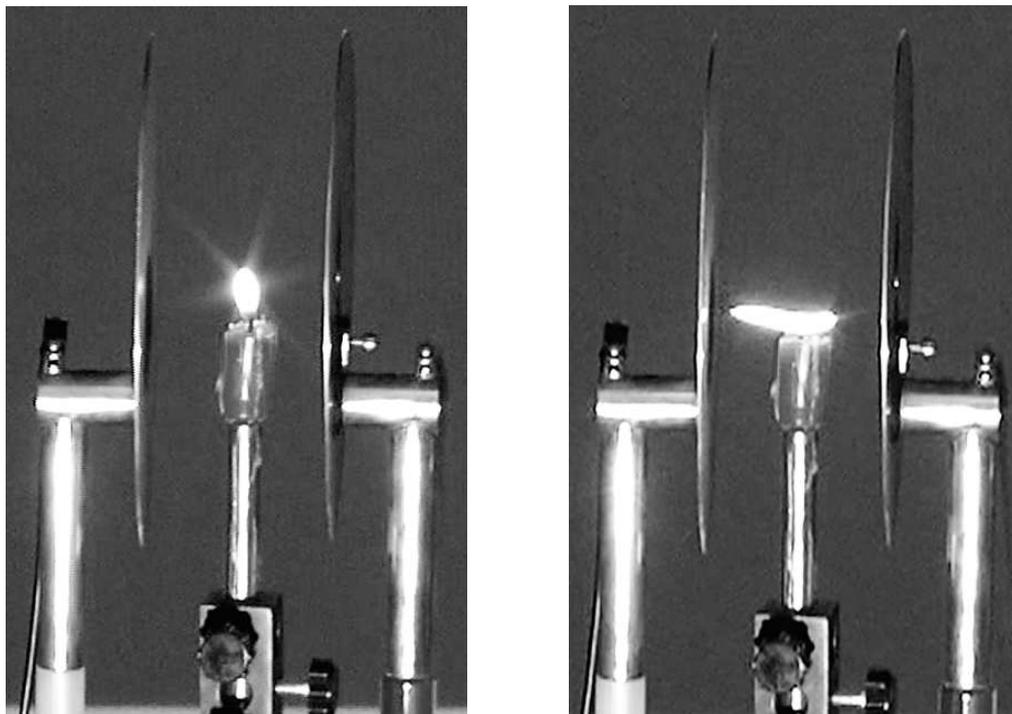


Abbildung 1.57: Kerze im Kondensator

abgelenkt. Man nützt dies aus, um einen Elektronenstrahl etwa beim Oszilloskop oder auch beim Fernseher durch "Ablenkkondensatoren" über den Bildschirm zu steuern. Man benötigt zwei Kondensatoren mit Feldern in y - und z -Richtung, um einen ursprünglich in x -Richtung laufenden Strahl über einen in der (y, z) -Ebene angebrachten Bildschirm über den gesamten Schirm zu bewegen.

- **Öltröpfchenversuch:** R. A. Millikan brachte 1910 sehr kleine geladene Öltröpfchen in das Feld eines Kondensators, deren Platten parallel zum Erdboden orientiert waren. Die Ladung der Tröpfchen betrug ein geringes Vielfaches der Elementarladung e . Bei geeigneter Feldstärke kompensieren sich die Coulombkraft und die Gewichtskraft auf das Tröpfchen:

$$m \cdot g = q \cdot E. \quad (1.107)$$

Noch unbekannt ist die Masse der Tröpfchen. Es gilt:

$$m = \rho_{\text{Öl}} \frac{4\pi}{3} r^3, \quad (1.108)$$

wobei $\rho_{\text{Öl}}$ die bekannte Dichte des Öls und r der Radius der kugelförmigen Tröpfchen ist. Der Radius lässt sich dadurch bestimmen, dass man die Tröpfchen bei abgeschaltetem elektrischem Feld fallen lässt. Nach einer kurzen Beschleunigungsstrecke nimmt die Geschwindigkeit v der Tröpfchen, die experimentell bestimmt werden kann, einen konstanten Wert an, der durch die Balance von Schwerkraft und geschwindigkeitsabhängiger Reibungskraft (der Stokes'schen Reibungskraft) gegeben ist:

$$F_{\text{Reibung}} = 6\pi\eta r v = \rho_{\text{Öl}} \frac{4\pi}{3} r^3 g = mg \quad (1.109)$$

Aus (1.109) und (1.107) lässt sich q bestimmen. Millikan fand, dass q in Einheiten von $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ auftritt und entdeckte damit die Elementarladung. Für diese und andere Entdeckungen erhielt Millikan 1923 den Nobelpreis.

1.11.10 Kondensator mit Dielektrikum

Wir legen zunächst an einen leeren Kondensator die Spannung U an, entfernen dann die Spannungsquelle und messen die Ladung $Q = Q_0$ auf den Platten dadurch, dass wir die Ladung abfließen lassen. Wenn wir jetzt ein Dielektrikum (Paraffin) in den Kondensator schieben, diesen dann wiederum auf U aufladen und dann wiederum die Ladung $Q = Q_1$ messen, so finden wir, dass Q_1 mehr als das doppelte von Q_0 betrug. Wir definieren:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{C_1 U}{C_0 U} = \frac{C_1}{C_0} = \varepsilon. \quad (1.110)$$

Hierbei ist für Paraffin $\varepsilon \approx 2$. Wir bringen in einem zweiten Versuch den leeren Kondensator feste Ladungen $\pm Q$ auf die Kondensatorplatten und schieben dann bei $Q = \text{const.}$ die Paraffinplatte bzw. eine Glasplatte ein. Die Spannung über dem Kondensator (wir messen diese wiederum über ein Elektrometer) sinkt beim Einschieben der Platten auf den Wert U_1 ab und kehrt beim Herausziehen der Platte wieder näherungsweise auf ihren alten Wert zurück. Quantitativ erhalten wir:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{C_1}{C_0} = \varepsilon. \quad (1.111)$$

Wie hängt nun das Feld im Kondensator mit der im Abschnitt 1.10 diskutierten Polarisation bzw. ε mit χ zusammen?

Für das Feld im mit dem Dielektrikum gefüllten Kondensator gilt nach Abschnitt 1.10:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \quad (1.60)$$

$$E_{1,i} = -\frac{N_i p_i}{\varepsilon_0} \quad (1.61)$$

Der Entelektrisierungsfaktor ist für die betrachtete Geometrie (Platte, Feld senkrecht zur Plattenebene) $N = 1$. Wir erhalten also:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \vec{E}_0 - \chi_e \vec{E} \quad (1.112)$$

und hieraus:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \chi_1} \quad (1.113)$$

bzw:

$$\frac{E_0}{E} = \frac{U_0}{U_1} = 1 + \chi_e = \varepsilon. \quad (1.114)$$

Die in (1.111) definierte Konstante ε ist also gleich der Dielektrizitätskonstanten, die wir bereits in Abschnitt 1.10 benannt hatten.

Für die Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum gilt also:

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (1.115)$$

Durch messen von C lässt sich also sehr bequem ε bestimmen. Einige Zahlenwerte sind nachfolgend aufgelistet.

Material	ε
Luft	1.006
Paraffin	2..2.3
Quarzglas	3.7
Alkohol	26
Glyzerin	56
H ₂ O (300 K)	81
BaTiO ₃ (300 K)	>1000

Tabelle 1.1: Dielektrizitätskonstanten verschiedener Materialien

Im Experiment vergleichen wir einen leeren Kondensator (Plattenfläche 135 cm², Plattenabstand 1 cm) mit einem mit BaTiO₃ gefüllten Kondensator (Plattenfläche 1.1 cm², Plattenabstand 2 mm). Ohne Füllung wäre die Kapazität dieses Kondensators einen Faktor 24 kleiner als die des ersten Kondensators. Mit BaTiO₃ ist dessen Kapazität einen Faktor 100 größer, wie wir durch Messung der von den Kondensatoren abfließenden Ladungen bestätigen; ε betrug also ca. 2500.

Ferroelektrite wie BaTiO₃ erlauben also den Bau kleiner Kondensatoren hoher Kapazität. Mit Dielektrika gefüllte Kondensatoren erlauben oft auch sehr hohe Feldstärken, bevor diese zerstört werden ("Durchbruchfeldstärken").

Feroelektrika werden zur Zeit sehr intensiv untersucht. Sie werden absehbar eine immer größere Rolle etwa im Bereich der Mikroelektronik (Transistoren, Speicherelemente) spielen.

1.12 Makroskopische Elektrostatik

1.12.1 Polarisierung, dielektrische Verschiebung

In den vorangegangenen Abschnitten hatten wir die beiden Grundgleichungen der Elektrostatik

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

kennengelernt. Diese Gleichungen helfen uns aber zunächst nur, wenn wir die Ladungsdichte ρ vollständig kennen. In diese Ladungsdichte ρ muß auch die Verteilung der atomaren Ladungen aufgenommen werden, wenn wir z.B. das elektrische Feld einer makroskopischen Ladungsverteilung in einem Medium berechnen wollen. Zwar mag dieses Medium zunächst einmal elektrisch neutral sein, es gibt gleich viel positive wie negative Ladungen. Wird aber durch die makroskopischen Ladungen ein elektrisches Feld erzeugt, so werden sich auch die Ladungsverteilungen auf atomarem Niveau nach diesem makroskopischen Feld ausrichten. Die Atome werden polarisiert (siehe Figur 1.58): Die eventuell vorhandenen Dipolmomente richten sich nach dem makroskopischen elektrischen Feld aus oder werden erst durch dieses Feld induziert. Ziel der folgenden Überlegungen ist es, die Effekte dieser Polarisierung des Mediums auf das resultierende elektrische Feld zu bestimmen.

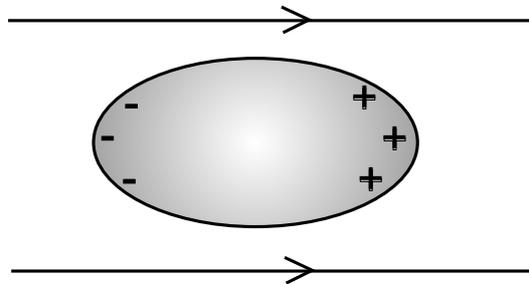


Abbildung 1.58: Polarisierung der elektrischen Ladungsverteilung eines Atoms durch ein elektrisches Feld

Betrachten wir zunächst den Beitrag der Ladungsverteilung eines Moleküls j , lokalisiert an der Stelle \vec{r}_j , auf das elektrostatische Potential ϕ an der Stelle \vec{r} . Der Vektor \vec{r}' bezeichne die Position einer Ladung im betrachteten Molekül relativ zum Zentrum des Moleküls \vec{r}_j . Damit berechnet sich der Beitrag der molekularen Ladungen zum Potential:

$$\phi_j(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - (\vec{r}_j + \vec{r}')|} d^3r'. \quad (1.116)$$

Da die Abstände der einzelnen Ladungen des Moleküls von dessen Zentrum, $|\vec{r}'|$ sehr viel kleiner sind als der typische makroskopische Abstand des Beobachterpunktes \vec{r} von der Position des Moleküls \vec{r}_j : $|\vec{r}'| \ll |\vec{r} - \vec{r}_j|$ wird eine Taylor-Entwicklung des Integranden

um $\vec{r}' = 0$ sehr rasch konvergieren:

$$\begin{aligned}\phi_j(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} + \vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_{\vec{r}'_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} \underbrace{\int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}_{\vec{d}_j} + \dots,\end{aligned}$$

wobei $\vec{\nabla}_{\vec{r}'_j}$ der Gradientoperator ist, dessen Ableitungen auf den Vektor \vec{r}'_j bezogen sind. \vec{d}_j bezeichnet das Dipolmoment des Moleküls j (vergleiche den Abschnitt Multipolmomente). Nun können wir den Beitrag aller Moleküle j zum Gesamtpotential ausrechnen:

$$\phi_{\text{Gesamt}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \vec{\nabla}_{\vec{r}'_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} \vec{d}_j + \dots$$

Vernachlässigen wir im folgenden die Beiträge höherer Ordnung in der Taylor-Entwicklung und ersetzen wir die Summation über die einzelnen Atome j durch eine Integration über die entsprechende Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$, beziehungsweise die Dipoldichte beziehungsweise die entsprechende Polarisationsdichte $\vec{P}(\vec{r}')$, berechnet sich:

$$\phi_{\text{Gesamt}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.117)$$

Betrachten wir das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung etwas genauer in der kartesischen Darstellung, so können wir dieses Integral schreiben in der Form

$$\mathcal{I} = \int dx' dy' dz' \left[P_x(\vec{r}') \frac{d}{dx'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + P_y(\vec{r}') \frac{d}{dy'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + P_z(\vec{r}') \frac{d}{dz'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (1.118)$$

Dieses Integral besteht also aus 3 Summanden, von denen wir zunächst den ersten betrachten wollen und dabei speziell die Integration über die Koordinate x' . Der Integrand dieses ersten Terms besteht aus einem Produkt der Faktoren P_x und der Ableitung der Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ nach der Integrationsvariablen x' . Durch partielle Integration ergibt sich dafür

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' P_x \frac{d}{dx'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \underbrace{\left[P_x \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{d}{dx'} P_x \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.\end{aligned}$$

Wie bereits in dieser Gleichung angedeutet verschwindet der Beitrag von den Integrationsgrenzen, da für $x' = \pm\infty$ der Integrand null wird. Natürlich gilt diese Gleichung auch noch, wenn wir über y' und z' integrieren. Ähnliche partielle Integrationen kann man auch für den zweiten und dritten Summanden in (1.118) durchführen, so dass sich insgesamt ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= - \int dx' dy' dz' \left[\frac{d}{dx'} P_x(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{d}{dy'} P_y(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{d}{dz'} P_z(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= - \int d^3\vec{r}' \left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \right] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis wieder in den Ausdruck (1.117) ein, so ergibt sich für das Potenzial

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.119)$$

Dies ist das Potenzial einer Ladungsverteilung

$$\tilde{\rho}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}').$$

Die effektive Ladungsdichte $\tilde{\rho}$ enthält also sowohl die Information über die Ladungsdichte als auch über die Effekte durch die Polarisation des Mediums. Diese effektive Ladungsdichte $\tilde{\rho}$ ist die Quelle für das elektrische Feld \vec{E} . Wir können also schreiben:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0} = \frac{(\rho - \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}))}{\epsilon_0}$$

oder diese Gleichung auch umformen auf die Form

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (1.120)$$

Dabei haben wir ein neues Feld definiert

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.121)$$

das man als **Dielektrische Verschiebung** oder aber auch als **Elektrische Flussdichte** bezeichnet. Dieses Feld \vec{D} ist so definiert, dass seine Quellen durch die ursprüngliche Ladungsdichte ρ gegeben sind. Diese elektrische Flussdichte entspricht also bis auf den Faktor ϵ_0 dem elektrischen Feld, das vorliegen würde, wenn kein polarisiertes Medium vorhanden wäre. Ist die Polarisation \vec{P} des Mediums aber von null verschieden, so erhalten wir, wie wir in der Diskussion der Polarisationsseigenschaften gesehen haben, in der Regel eine Polarisation, die proportional zur elektrischen Feldstärke \vec{E} ist

$$\vec{P} = \chi_{el} \epsilon_0 \vec{E},$$

mit der elektrischen Suszeptibilität, χ_{el} , eine Materialkonstante, die charakteristisch für das Medium ist. Damit ergibt sich für die Dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_{el}) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (1.122)$$

wobei wir mit der **Dielektrizitätskonstanten** $\epsilon = (1 + \chi_{el})$ eine zur Suszeptibilität alternative Materialkonstante für das Medium eingeführt haben.

Zur weiteren Veranschaulichung der Unterschiede zwischen dem elektrischen Feld und der Dielektrischen Verschiebung betrachten wir einen einfachen Plattenkondensator, wie er in Abb. 1.59 a) dargestellt ist. Die linke Platte ist positiv geladen, die rechte negativ, was durch die vier “+” beziehungsweise die vier “-” Zeichen dargestellt sein soll. Die positiven Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes, also Startpunkte von Feldlinien, die negativen sind Senken, also Endpunkte. Der Raum zwischen den Kondensatorplatten im Teilbild 1.59 a) sei leer, enthalte jeweils kein Medium, was polarisiert ist. In diesem Fall repräsentieren die Feldlinien das elektrische Feld \vec{E} oder aber auch die Dielektrische Verschiebung, die ja im Vakuum (wir ignorieren hier die Konstante ϵ_0) identisch sind.

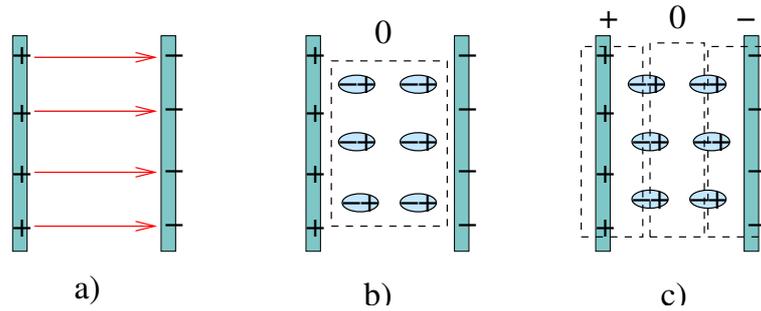


Abbildung 1.59: Plattenkondensator ohne (a)) und mit Dielektrikum (b) und c))

Im Teilbild 1.59 b) und c) betrachten wir den gleichen Kondensator mit gleich vielen Ladungen auf den Platten. In diesem Fall soll sich aber ein polarisiertes Medium zwischen den Platten befinden. Diese Polarisation sei durch die schematische Darstellung der Dipole charakterisiert. Die Gesamtladung des Dielektrikums zwischen den Platten ist identisch Null, so wie das auch durch die Aufsummation der Ladungen in dem mit der gestrichelten Linie umrandeten Rechteck des Teilbildes 1.59 b) zum Ausdruck kommt. Summieren wir aber die Ladungen so auf, wie das im Teilbild 1.59 c) dargestellt ist, so wird deutlich, dass unter Berücksichtigung der Polarisation die Zahl der Feldlinien des elektrischen Feldes von der linken zur rechten Platte reduziert wird. Bei konstanter Ladung wird das elektrische Feld im Kondensator durch ein polarisiertes Medium reduziert. Da die Ladungen ohne Polarisierungseffekte aber identisch sind, ist die Dielektrische Verschiebung \vec{D} mit ohne Dielektrikum die gleiche. Es gilt also

$$\vec{D}_a) = \vec{D}_b) = \varepsilon_0 \vec{E}_a) = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_b),$$

wobei ε die Dielektrizitätskonstante des Mediums in 1.59 b sein soll. Damit gilt

$$\frac{E_b)}{E_a)} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{U_b)}{U_a)}.$$

In der zweiten Gleichung wurde benutzt, dass die elektrischen Felder als negativer Gradient des Potentials ϕ berechnen, und die Spannung U ja gerade die Potentialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten bezeichnet. Damit gilt aber auch für das Verhältnis der Kapazitäten des Kondensators mit Dielektrikum $C_b)$ und ohne Dielektrikum $C_a)$

$$\frac{C_b)}{C_a)} = \frac{Q}{U_b)} \frac{U_a)}{Q} = \varepsilon.$$

1.12.2 Grenzbedingungen der Elektrostatik

Betrachten wir zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 . Wie verhält sich das \vec{E} -Feld an der Grenzfläche zwischen diesen beiden Medien?

Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Grenzfläche eine konstante Ladung pro Fläche σ besitzt. In Gedanken legen wir um die Grenzfläche eine „Schachtel“, deren Außenfläche parallel zur Grenzfläche die Größe ΔF habe und deren andere Aussenflächen verschwindend klein sein sollen — es soll also eine „flache“ Schachtel sein (siehe Skizze in Figur

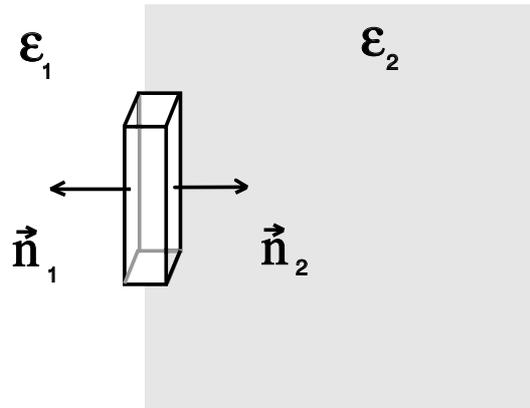


Abbildung 1.60: Skizze des Volumens zur Berechnung der Normalenkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche zwischen 2 Medien

1.60). Eine Integration über das Volumen der Schachtel kann mit Hilfe des Gauß'schen Satzes umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}
 \int_V \operatorname{div} \vec{D} d^3\vec{r} &= \oint_{\partial(V)} \vec{D} d\vec{f} \\
 &= \Delta F \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 + \Delta F \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \\
 &= \Delta F (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2.
 \end{aligned} \tag{1.123}$$

Dabei ist \hat{n}_i der Einheitsvektor der Flächennormalen für die beiden Flächen im Medium i , die parallel zur Grenzfläche liegen. Die Flächen, die senkrecht zur Grenzfläche stehen, tragen wegen der Stetigkeit von D im Medium 1 und Medium 2 nichts bei. Man beachte dabei die entgegengesetzten Flächennormalen der gegenüberliegenden Flächen. Andererseits können wir aber das Volumenintegral aus (1.123) aber auch berechnen durch Ausnutzen der Gleichung (1.120) Umformen liefert

$$\begin{aligned}
 \int_V \operatorname{div} \vec{D} d^3\vec{r} &= \int_V \rho d^3\vec{r} \\
 &= \sigma \Delta F.
 \end{aligned} \tag{1.124}$$

also gerade die gesamte Ladung im Volumen V . Ein Vergleich von (1.123) und (1.124) liefert

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2 = \sigma.$$

Gibt es also auf der Grenzfläche keine freien Ladungen ($\sigma = 0$), so ist

$$\vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 = \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_2. \tag{1.125}$$

Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung ist also (unter der Voraussetzung von Ladungsfreiheit der Grenzfläche: $\sigma = 0$) in beiden Medien gleich, während die Normalkomponente des \vec{E} -Feldes, E_{\perp} um den Betrag $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ „springt“:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 E_{2\perp} &= \varepsilon_1 E_{1\perp} \\
 \Rightarrow E_{2\perp} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1\perp}.
 \end{aligned}$$

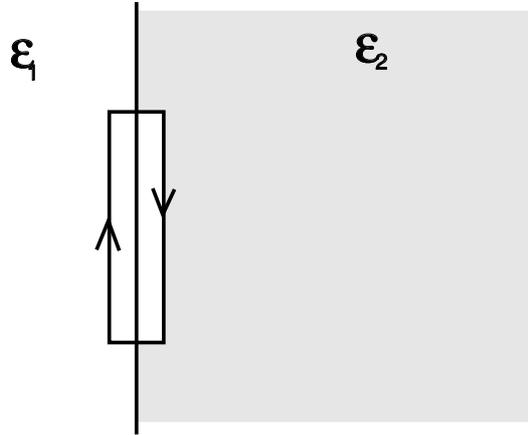


Abbildung 1.61: Skizze des Fläche zur Berechnung der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche zwischen 2 Medien

Wie verhalten sich die Tangentialkomponenten von \vec{D} und \vec{E} ? — Wieder sollen zwei Medien mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten aneinanderstoßen, doch ist der Integrationsbereich diesmal kein Volumen, sondern eine „Schlaufe“ mit zwei langen und zwei sehr kurzen Seiten. Dabei sind die langen Seiten parallel zur Grenzfläche und die kurzen Seiten senkrecht dazu (siehe Figur 1.61). Integriert man \vec{E} entlang dieses geschlossenen Weges, so gilt

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \vec{E}_2 \cdot \hat{e}_{\parallel} \Delta l + \vec{E}_1 \cdot (-\hat{e}_{\parallel}) \Delta l, \quad (1.126)$$

wobei Δl für die Länge des jeweiligen Wegstückes tangential zur Oberfläche steht und \hat{e}_{\parallel} ein Einheitsvektor tangential zur Grenzfläche ist (parallel zum Integrationsweg im Bereich des Mediums 2). Mit dem Stokeschen Satz können wir aber auch ausrechnen

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \int_F \text{rot } \vec{E} d\vec{f} = 0 \quad (1.127)$$

wobei die letzte Gleichung aus der Tatsache folgt, dass das elektrische Feld der Elektrostatik wirbelfrei ist als $\text{rot } \vec{E} = 0$. Aus dem Vergleich zwischen (1.126) und (1.127) folgt

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Delta \hat{e}_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel} \quad (1.128)$$

Die Tangentialkomponente von \vec{E} bleibt also beim Übergang von Medium 1 zu Medium 2 gleich. Daraus ergibt sich, dass sich der Betrag der tangentialen Komponente der dielektrischen Verschiebung um den Betrag $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ verändert.

1.12.3 Energieinhalt des elektrischen Feldes im Medium

Den Energieinhalt eines elektrischen Feldes im Medium berechnen wir analog zur Energie des elektrischen Feldes im Vakuum (siehe Abschnitt Grundgleichungen des elektrostati-

schen Feldes)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{D} \cdot \vec{E} \end{aligned} \tag{1.129}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurde die Grundgleichung (1.120) benutzt. Zum Übergang von der zweiten zur vierten Zeile wird eine partielle Integration analog zur Diskussion im Anschluss an (1.118) durchgeführt und beim Übergang zur fünften Zeile die Berechnung des elektrischen Feldes aus dem Gradienten des Potentials. Natürlich erhalten wir im Grenfall, dass das Medium nicht polarisiert wird (also $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$), wieder das Ergebnis aus dem Abschnitt Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes im Vakuum.

