

Kapitel 4

Maxwell-Gleichungen

4.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir die Phänomene der Elektrostatik und Magnetostatik weitgehend unabhängig voneinander behandelt. Dabei haben wir gesehen, daß Ladungen zu elektrischen Feldern führen, während Ströme die Ursache von Magnetfeldern sind. Wenn wir nun in diesem Kapitel die Diskussion auf Ladungsverteilungen, die zeitabhängig sind, und Ströme, die nicht stationär sind, erweitern wollen, so ist klar, dass die Änderungen der Ladungsdichte über die Kontinuitätsgleichung mit der Stromdichte verknüpft ist. Daraus folgt aber auch, dass elektrische und magnetische Felder nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Zunächst wollen wir uns in diesem Abschnitt der Frage widmen, wie Magnetfelder elektrische Phänomene induzieren können. Das Biot-Savart'sche Gesetz (3.15) beschreibt, wie elektrische Ströme Wirbel einer magnetischen Induktionsdichte \vec{B} hervorrufen. Der Physiker Michael Faraday befaßte sich um 1830 mit der Frage, ob umgekehrt mit Hilfe von Magnetfeldern auch elektrische Ströme erzeugt werden können. Seine Experimente zur Erzeugung von Strömen in zeitlich veränderlichen Magnetfeldern führten zu dem Faraday'schen Induktionsgesetz, daß wir zunächst einmal an dem in Figur 4.1 skizzierten Beispiel diskutieren wollen.

Wir betrachten eine Leiterschleife, die sich in einem homogenen Magnetfeld befindet, dessen Feldlinien senkrecht zu der Zeichenebene und zwar in die Ebene hinein zeigen sollen. Dieses Feld sei auf einen Raumbereich begrenzt. In der Figur ist dies dadurch gekennzeichnet, dass nur in einem Bereich Feldlinien von \vec{B} durch x Zeichen dargestellt sind.

Zieht man nun die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit \vec{v} senkrecht zum Magnetfeld aus diesem heraus, so stellt man fest, dass während dieser Bewegung eine Spannung U induziert wird, die dann zu einem Strom in dem Leiter führt. Um nun dieses Gesetz zu formulieren, definieren wir den von der Leiterschleife umschlossenen *magnetischen Fluss* φ :

$$\varphi := \int_F \vec{B} d\vec{f}. \quad (4.1)$$

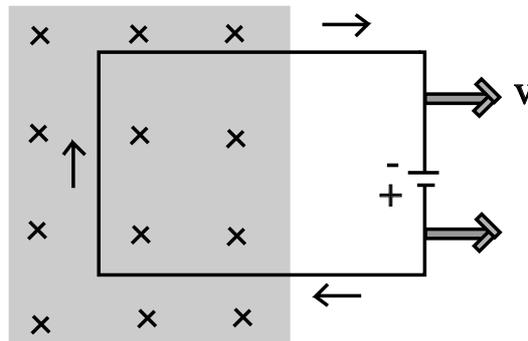


Abbildung 4.1: Beispiel zur Diskussion des Faraday'schen Induktionsgesetzes

Zu integrieren ist dabei über eine Fläche F , deren Rand die Leiterschleife bildet. Die Orientierung des Randes und die Richtung des Flächenvektors sind dabei über die "Rechte-Hand Regel" miteinander verknüpft. Dies bedeutet: Halten wir unsere rechte Hand so, dass die Finger parallel zum Rand zeigen und zwar in Richtung der Orientierung des Randes, d.h.: in die Richtung in die wir bei einer Integration über den Rand integrieren wollen, so zeigt der ausgestreckte Daumen in die Richtung der Flächennormalen.

Dieser Fluss hängt nicht von der Form der Fläche, sondern nur von deren Berandung ab, wie folgende Überlegung zeigt: Betrachten wir zwei Flächen, die einen gemeinsamen Rand haben, ansonsten aber unterschiedlich sind. Die Abbildung 4.2 zeigt einen Querschnitt durch eine solche Anordnung mit einem gemeinsamen Rand und den Flächen mit den Flächennormalen \vec{F}_1 und \vec{F}_2 . Betrachten wir nun den magnetischen Fluß durch die Fläche F_1

$$\int_{F_1} \vec{B} d\vec{f} = \int_{F_1} \vec{B} d\vec{f} - \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f} = \oint_{F_1 \cup F_2} \vec{B} d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f} = \int_V \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{=0} dV + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f}.$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass das Integral über die Fläche F_1 minus dem Integral über die Fläche F_2 , beziehungsweise dem Integral über F_2 mit umgekehrter Flächennormale, insgesamt ein Integral über die Oberfläche des Volumens

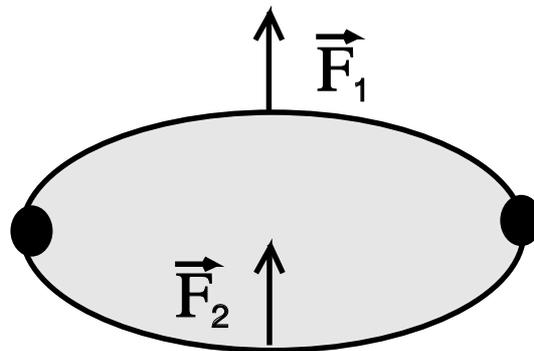


Abbildung 4.2: Zwei Flächen mit gleichem Rand (Punkte links und rechts)

V gibt, das von diesen beiden Flächen umschlossen ist. Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf dieses Oberflächenintegral liefert die dritte Zeile. Da die Divergenz des \vec{B} -Feldes verschwindet, ist die Behauptung, dass der Wert des magnetischen Flusses nur vom Rand der Fläche abhängt, bewiesen.

Faraday fand nun heraus, dass eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in der Leiterschleife einen elektrischen Strom induziert. Die Ursache für den Stromfluß ist ein längs der Leiterschleife bestehendes elektrisches Feld. Integriert man dieses elektrische Feld längs der Leiterschleife, erhält man die *Induktionsspannung*:

$$U_{ind} = \oint \vec{E} \, d\vec{s} = - \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4.2)$$

Dies ist das Induktionsgesetz von Faraday. Es besagt, dass diese induzierte Spannung proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses ist.

Wir wollen uns nun im Folgenden durch die Diskussion des in Abbildung 4.1 skizzierten Beispiels davon überzeugen, dass dieses Faraday'sche Induktionsgesetz in diesem Fall mit der Wirkung der Lorentz-Kraft erklärt werden kann.

Beweis: Auf eine in der Leiterschleife befindlichen Ladung q wirkt durch die Geschwindigkeit, die durch die Bewegung des Leiters hervorgerufen wird, die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Mit Hilfe der Definition der elektrischen Feldstärke $\vec{E} = \vec{F}/q$ wirkt diese Kraft wie ein \vec{E} -Feld, das für die Beschleunigung der Ladungsträger verantwortlich ist:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

Integrieren wir nun diese Kraft oder das entsprechende E -Feld über die Leiterschleife, wie in der Abbildung dargestellt, so ergibt sich

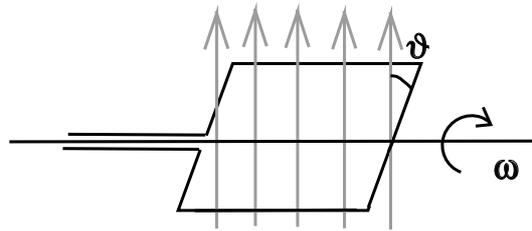
$$\oint \vec{E} \, d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \, d\vec{s}. \quad (4.3)$$

Durch die Bewegung der Leiterschleife über einen Zeitraum Δt ändert sich die vom Magnetfeld durchdrungene Fläche um

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} &= -\vec{s} \times (\vec{v} \Delta t) \\ &= - \int_{\text{linker Rand}} (d\vec{s} \times \vec{v}) \Delta t, \end{aligned}$$

wobei \vec{s} der Vektor ist mit der Länge des linken Randes und der Richtung parallel zur angedeuteten Integrationsrichtung. Deshalb können wir diese Fläche auch durch die Integration in der zweiten Zeile berechnen. Das negative Vorzeichen gibt an, dass die vom Magnetfeld durchdrungene Fläche kleiner wird. Die Flächennormale von $\Delta \vec{F}$ steht parallel zum Magnetfeld (also in die Bildebene hinein). So ergibt sich

$$\vec{B} \cdot \Delta \vec{F} = - \int_{\text{linker Rand}} \vec{B} \cdot (d\vec{s} \times \vec{v}) \Delta t.$$

Abbildung 4.3: Generator: Leiterschleife im homogenen \vec{B} Feld

Dieses Produkt $\vec{B} \cdot \Delta \vec{F}$ gibt gerade die Änderung des magnetischen Flusses $\Delta \Phi$ in der Leiterschleife im Zeitintervall Δt an. Das Integral auf der rechten Seite können wir ohne Änderung des Wertes ergänzen zu einem Integral über die ganze Schleife: Im unteren und oberen Abschnitt stehen \vec{v} und $d\vec{s}$ parallel, so dass $\vec{v} \times d\vec{s} = 0$, auf der rechten Seite des Rechtecks ist $\vec{B} = 0$. Wir erhalten also

$$\Delta \varphi = \vec{B} \cdot \Delta \vec{F} = - \int_{\text{gesamter Rand}} d\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \Delta t.$$

Dabei haben wir die Vektorrelation $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ benutzt. Daraus ergibt

$$\oint d\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = - \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Rightarrow - \frac{d\varphi}{dt}$$

Ein Vergleich mit (4.3) liefert

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = - \frac{d\varphi}{dt}.$$

Damit formulieren wir nun noch einmal das Faradaysche Induktionsgesetz in der Form:

$$\boxed{\oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\varphi}{dt}} \quad (4.4)$$

Als Beispiel zum Induktionsgesetz betrachten wir ein einfaches Modell eines *Generators* für elektrischen Strom: eine Leiterschleife, die sich in einem homogenen \vec{B} -Feld dreht (siehe Abb. 4.3).

Die Ebene der Leiterschleife bilde zum betrachteten Zeitpunkt mit dem \vec{B} -Feld den Winkel ϑ und drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Drehachse senkrecht zum Magnetfeld. Damit gilt also: $\vartheta = \omega t$. Für den magnetischen Fluß durch die Leiterschleife gilt

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ &= \vec{B} \cdot \vec{F} \\ &= B \cdot F \cdot \cos \vartheta \\ &= B \cdot F \cdot \cos \omega t. \end{aligned}$$

Nach dem Induktionsgesetz beträgt dann die Induktionsspannung

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -\frac{d\varphi}{dt} \\ &= -B \cdot F(-\sin \omega t) \omega \\ &= \underbrace{BF\omega}_{U_{max}} \sin \omega t \end{aligned}$$

U_{max} ist die maximale Induktionsspannung. Sie kann durch die Verwendung von mehr Windungen erhöht werden. Betrachten wir nun die vom Generator erzeugte elektrische Leistung P_{el} , die freigesetzt wird, wenn wir die Spannungsquelle, also unseren Generator über einen Widerstand R kurzschließen:

$$\begin{aligned} P_{el} &= U_{ind} \cdot I \\ &= \frac{U_{ind}^2}{R} \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wie üblich bezeichnet I den Strom in dem Leiter, R den elektrischen Widerstand der Leiterschleife und bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir das Ohmsche Gesetz angewandt. Um diese elektrische Leistung bereitzustellen, muss mechanische Arbeit geleistet werden. Zur Berechnung der mechanischen Leistung betrachten wir das magnetische Moment der stromdurchflossenen Leiterschleife (3.36):

$$\begin{aligned} |\vec{m}| &= IF \\ &= \frac{U_{ind}}{R} F \\ &= \frac{BF^2\omega}{R} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Das Drehmoment, das nötig ist um die Leiterschleife und damit das zugehörige magnetische Moment im externen Magnetfeld zu drehen, ist gegeben durch (siehe (3.40))

$$\begin{aligned} |\vec{N}| &= |\vec{m} \times \vec{B}| \\ &= \left(\frac{B^2 F^2 \omega}{R} \sin \omega t \right) \sin \omega t \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Entsprechend beträgt die mechanische Arbeit, die Leiterschleife um den infinitesimalen Winkel $d\vartheta$ zu drehen, $dw = |\vec{N}| d\vartheta$. Daraus ergibt sich für die mechanische Leistung:

$$\begin{aligned} P_{mech} &= \frac{dw}{dt} \\ &= |\vec{N}| \frac{d\vartheta}{dt} \\ &= |\vec{N}| \omega \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der in (4.5) berechneten elektrischen Leistung zeigt:

$$P_{mech} = P_{el},$$

die mechanische Leistung oder Arbeit, die dem Generator zugeführt wird, wird vollständig (jedenfalls in diesem idealisierten Beispiel, bei dem wir Reibungskräfte vernachlässigen) in elektrische Leistung beziehungsweise Arbeit umgesetzt.

4.2 Versuche zum Faraday'schen Induktionsgesetz

Wir demonstrieren die Spannungserzeugung in einer Leiterschleife bei Änderung der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche:

4.2.1 Veränderliche Fläche der Leiterschleife

Eine Seite einer Leiterschleife ist als beweglicher Bügel ausgelegt (Abb. 4.4). Bewegt man den Schieber mit Geschwindigkeit v , so wird entsprechend dem Gleichgewicht zwischen Lorentzkraft und elektrostatischer Kraft eine Spannung $U = bvB_{\perp} = b\frac{dx}{dt}B_{\perp} = B\frac{dA}{dt}$ generiert.

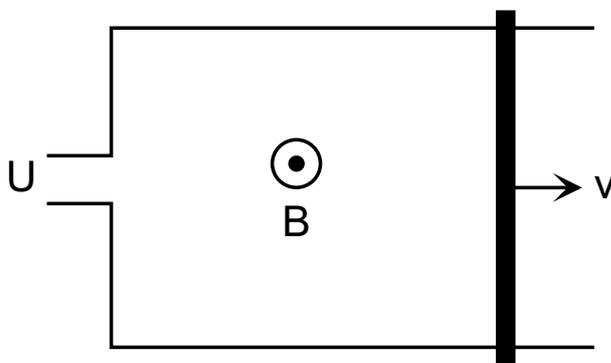


Abbildung 4.4: Zum Induktionsgesetz: Leiterschleife mit beweglichen Drahtbügel.

4.2.2 Rotierende Leiterschleife

In einem zweiten Versuch rotieren wir eine Leiterschleife im Magnetfeld (Abb. 4.5). Der magnetische Fluss durch die Schleife ändert sich entsprechend: $\Phi = BA \cos \omega t$. Die induzierte Spannung ist gegeben durch:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = AB\omega \sin \omega t.$$

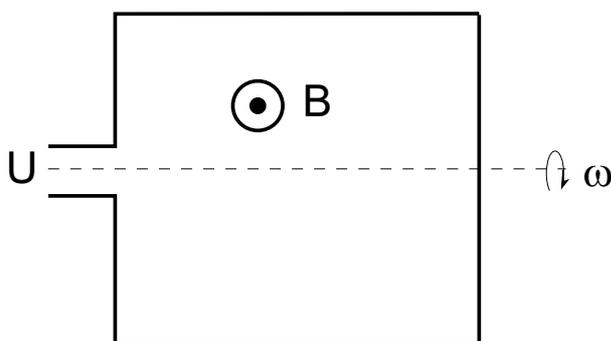


Abbildung 4.5: Rotierende Leiterschleife

Durch Rotation einer Leiterschleife (oder auch einer Spule) im Magnetfeld lassen sich also Wechselspannungen generieren.

4.2.3 Rotierende Spule im Erdfeld

Wir demonstrieren die Spannungsinduktion ebenfalls durch sehr schnelle Rotation einer Spule im Erdfeld. Diese Anordnung kann im Prinzip zu einer sehr genauen Magnetfeldmessung verwendet werden.

4.2.4 Spannungsinduktion in einer Leiterschleife: Zeitliche Änderung des Magnetfelds

Wenn wir in der in Abb. 4.4 vorgestellten Anordnung die Fläche der Leiterschleife konstant halten, aber das Magnetfeld ändern (d. h. abschalten oder einschalten), so wird ebenfalls eine Spannung induziert. **Dieser Fall kann nicht durch die bislang diskutierten Gleichungen der Magneto- bzw. Elektrostatik erklärt werden.**

4.2.5 Induktionsgesetz bei zeitlich veränderlichem Magnetfeld: Quantitative Analyse

Der Messaufbau ist in Abb. 4.6 gezeigt. Eine Feldspule wird mit einem zeitlich variablen Strom zwischen 0 und 5 A versorgt. Der Strom wird dabei innerhalb von 5 s linear von 0 auf 0.37 A erhöht und dann innerhalb 5 s wieder auf 0 erniedrigt. Die Feldspule erzeugt ein Magnetfeld von 9.42 G bei einem Strom von 1 A (d. h. "Spulenkonstante" $dB/dI = 9.42 \text{ G/A}$). Die Querschnittsfläche der Feldspule beträgt $A = 63.6 \text{ cm}^2$.

Um die Feldspule ist eine "Induktionsspule" mit $N_I = 1000$ Windungen angebracht (alternativ kann die Spannung über 250 bzw. 500 Windungen abgegriffen werden). Die Induktionsspule kann außerdem entlang der Achse der Feldspule verschoben werden. Sie befindet sich zunächst in Mitte der Feldspule.

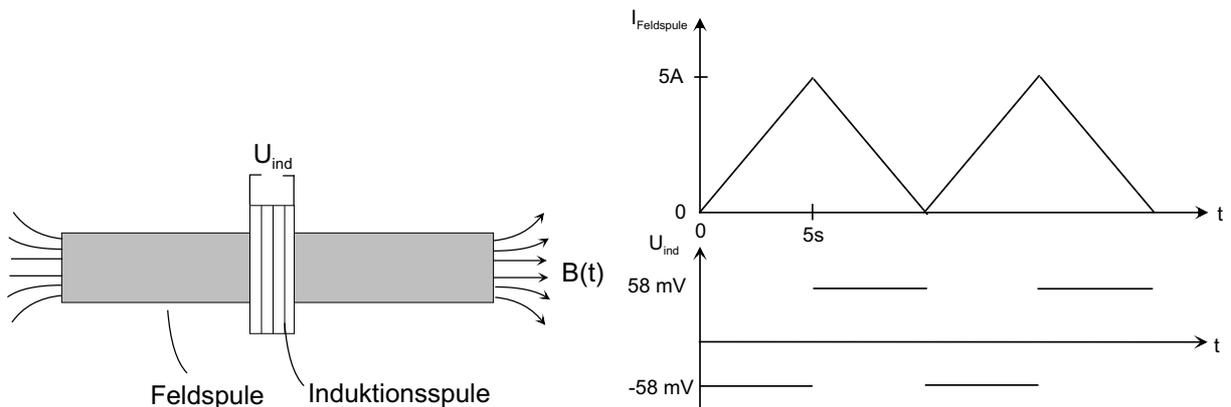


Abbildung 4.6: Feldspule und Induktionsspule zur quantitativen Analyse induzierter Spannungen

Für $N_I = 1000$ misst man über der Induktionsspule unter obigen Bedingungen einen Spannungsabfall $U_{\text{ind}} \approx \pm 58 \text{ mV}$, wobei sich das Vorzeichen der Spannung je nach Vorzeichen von dI/dt einstellt. Für $N_I = 500$ bzw. 250 sinkt der Spannungsabfall proportional zur Windungszahl ab.

Wenn wir unterstellen, dass U_{ind} proportional zur Änderung des magnetischen Flusses durch die Induktionsspule ist, dann sollte gelten:

$$U_{\text{ind}} \propto -N \frac{d\phi}{dt} = -N \cdot A \cdot \frac{dB}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (4.6)$$

Der Faktor N erscheint, da der zeitlich veränderliche Fluss in jeder Windung der Induktionsspule eine Spannung induziert. Der Fluss durch jede Windung ist in etwa gleich dem Fluss BA durch die Feldspule, da das Außenfeld dieser Spule vernachlässigbar klein ist. Einsetzen der obigen Zahlenwerte ergibt für die rechte Seite der Gleichung (4.6) einen Zahlenwert von 58 mV, was recht genau mit der Beobachtung übereinstimmt. Die Proportionalitätskonstante ist also im Rahmen der Messgenauigkeit gleich 1, wir erhalten:

$$U_{\text{ind}} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (4.7)$$

Wenn wir die Induktionsspule zum Rand der Spule hin verfahren, fällt U_{ind} langsam ab, erreicht die Hälfte des Maximalwerts am Spulenrand und geht weit weg von der Spule auf Null zurück. Dies ist konsistent mit Gleichung (4.7). Man kann zeigen, dass das Feld einer langen Spule an ihrem Rand gerade die Hälfte des maximalen Feldwertes beträgt. Wenn wir dI/dt variieren, so ändert sich U_{ind} proportional zu dI/dt , was ebenfalls konsistent mit Gleichung (4.7) ist.

Wir müssen jetzt noch das Vorzeichen in (4.7) genauer analysieren. Das negative Vorzeichen in (4.7) führt dazu, dass bei *kurzgeschlossener Induktionsspule* in dieser ein magnetischer Fluss erzeugt wird, der der externen Flussänderung entgegenwirkt (**Lenz'sche Regel**). Um dies zu demonstrieren, betrachten wir zunächst die in Abb. 4.7 dargestellte Spulenanordnung. Hier befinden sich Feldspule und Induktionsspule auf einer Achse. Die Induktionsspule ist auf Rollen beweglich angeordnet und wird zunächst kurzgeschlossen.

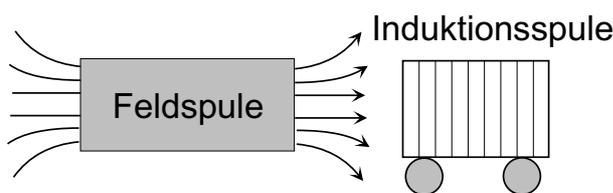


Abbildung 4.7: Zur Lenz'schen Regel: Induktionsspule auf Rollen

Schaltet man die Feldspule ein, so rollt die Induktionsspule von der Feldspule weg. Beim Einschalten erhöht sich der magnetische Fluss durch die Induktionsspule. Diese baut daher ein zur Feldspule entgegengesetztes Feld auf. Der Gradient des Feldes durch die Feldspule ist dem von der Induktionsspule erzeugten magnetischen Moment entgegengerichtet, so dass sich die beiden Spulen abstoßen. Beim Abschalten der Feldspule wird die Induktionsspule dagegen angezogen. Der Feldgradient der Feldspule hat die gleiche Richtung wie zuvor (er verringert lediglich seinen Wert). Dagegen dreht sich das magnetische Moment der Induktionsspule um, so dass sich auch die Kraft zwischen den beiden Spulen umdreht. Wenn wir jetzt die Induktionsspule öffnen, so wird beim Ein- bzw. Ausschalten der Feldspule zwar eine Spannung induziert, jedoch kann kein Strom in der Induktionsspule fließen. Deren magnetisches Moment ist null, die Induktionsspule bewegt sich nicht.

In einem zweiten Versuch legen wir einen leitenden Ring auf eine Feldspule (Abb. 4.8). Schalten wir die Feldspule ein, so springt der Ring nach oben.

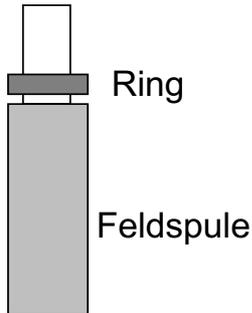


Abbildung 4.8: Zur Lenzschen Regel: Leitender Ring auf einer Feldspule

Die Abstoßung des Rings beim Einschalten der Feldspule ist wie im vorhergehenden Versuch eine Folge der Lenzschen Regel.

Was passiert, wenn wir den Ring bei eingeschaltetem Feld über die Feldspule bringen und absinken lassen?

Wenn der Ring absinkt, steigt der Fluss durch den Ring an, der Ring entwickelt ein magnetisches Moment, das dieser Änderung entgegengerichtet ist. Wäre der Widerstand des Rings Null, so würde sich in einer gewissen Höhe ein Gleichgewicht zwischen der nach oben zeigenden magnetischen Kraft und der nach unten zeigenden Gravitationskraft einstellen, der Ring würde schweben bzw. um eine Gleichgewichtslage herum oszillieren. Genau dies passiert in einem supraleitenden¹ Ring. In einem normalleitenden Ring klingen aber die Kreisströme langsam ab, das magnetische Moment des Rings wird geringer und der Ring sinkt ab.

Mit der Lenzschen Regel lässt sich nun auch der **Diamagnetismus** verstehen: In jedem Atom werden bei Annäherung an ein Feld (bzw. Einschalten des Feldes) Ringströme so angeworfen, dass das von den Strömen erzeugte Feld dem angelegten Feld entgegengerichtet ist. Auf eine quantitative Analyse wollen wir hier allerdings nicht eingehen.

Das Auftreten von Kreisströmen (Wirbelströmen) bei einer zeitlichen Änderung des Magnetfeldes wird bei der **Wirbelstrombremse** genutzt: Wir lassen ein metallisches Pendel durch den Spalt eines Elektromagneten (Hufeisenform) pendeln. Solange der Magnet ausgeschaltet ist, schwingt das Pendel mit geringer Dämpfung. Schalten wir den Magnetstrom ein, so hält das Pendel fast instantan an. Wenn sich das Pendel in den Spalt des Magneten hineinbewegt, so werden im Pendel starke Wirbelströme angeworfen. Diese Ströme dissipieren auf Grund des Ohmschen Gesetzes Energie, die "Reibung" des Pendels wird sehr groß, das Pendel kommt sehr rasch zur Ruhe.

¹Der Spannungsabfall über einem supraleitenden Ring ist Null. Nach 4.5 folgt dann $d\phi/dt = 0$. Der Fluss durch einen supraleitenden Ring (bzw. auch durch einen massiven Supraleiter) bleibt konstant. Dieser Effekt ist eine Konsequenz des Induktionsgesetzes zusammen mit der Eigenschaft $R = 0$ des Supraleiters. Allerdings geht der "ideale Diamagnetismus" darüber hinaus. Wenn an den Supraleiter oberhalb von T_c (d. h. bei $R > 0$) ein Magnetfeld angelegt wird, so klingen die Kreisströme schnell ab, das Feld durchdringt den Supraleiter. Kühlt man jetzt den Supraleiter unter T_c so erwarten wir wegen $\phi = const.$, dass das Feld im Supraleiter bleibt. Dagegen ist die Beobachtung, dass auch bei diesem Prozess das Feld aus dem Supraleiter herausgedrängt wird. Diese Eigenschaft (wie auch die Eigenschaft $R = 0$) lässt sich erst durch die Quantenmechanik erklären.

4.3 Wechselstromgeneratoren und Elektromotoren

Das Prinzip des Wechselstromgenerators hatten wir im Grunde bereits in Abschnitt 4.2 kennengelernt, als wir eine Spule im Feld drehen. Wenn wir die Spule an einen Verbraucher (Widerstand R) anschließen, so fließt durch diesen ein Wechselstrom. Mechanische Arbeit (Drehen der Spule) wurde in elektrische Energie umgesetzt. Wir betrachten jetzt einige spezielle Anordnungen:

Gleichrichtung: Wenn wir die Spannungsabgriffe an der Spule nach einer Drehung von 180° durch einen Polwender umkehren (vgl: Gleichstrommotor, Abschnitt 3.6), so ist die erzeugte Spannung proportional zu $|\sin \omega t|$. Die Wechselspannung wurde "gleichgerichtet".

Drehstromgenerator: Wir drehen drei um je 120° versetzte Spulen im Magnetfeld (Abb. 4.9). Jede der Spulen liefert eine Wechselspannung, wobei die drei Spannungen phasenverschoben sind. Die drei Spulen werden mit R , S und T bezeichnet. Es gilt dann:

$$U_R = U_0 \sin \omega t \quad (4.8a)$$

$$U_S = U_0 \sin(\omega t - 120^\circ) \quad (4.8b)$$

$$U_T = U_0 \sin(\omega t + 120^\circ) \quad (4.8c)$$

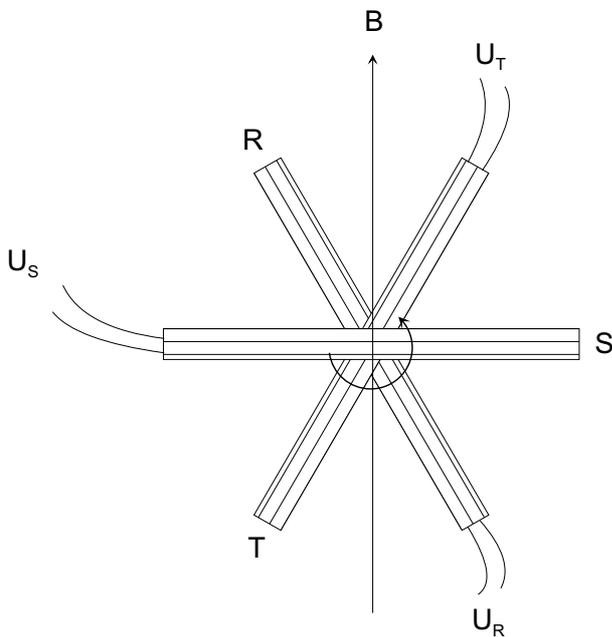


Abbildung 4.9: Erzeugung von Drehstrom

Drehstrommotor: Wir versorgen jetzt drei um je 120° zueinander verdrehte Spulen mit Drehstrom (Abb. 4.10).

Das Magnetfeld im Zentrum der Anordnung hat von Null verschiedene Komponenten B_x und B_y . Die z -Komponente ist 0. Für B_x erhalten wir: $B_x = B_S(t) \cos 30^\circ - B_T(t) \cos 30^\circ$, wobei $B_S(t)$ und $B_T(t)$ entsprechend (4.7), (4.8a) und (4.8b) phasenverschoben sinusförmig oszillieren, $B_S(t) = B_0 \sin(\omega t - 120^\circ)$, $B_T(t) = B_0 \sin(\omega t + 120^\circ)$. Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$B_x(t) = -\frac{3}{2} B_0 \cos \omega t \quad (4.9a)$$

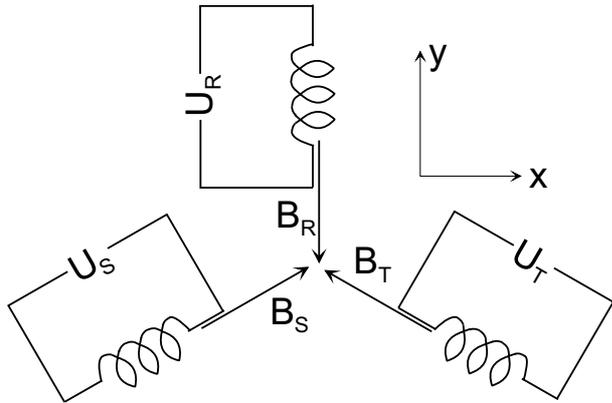


Abbildung 4.10: Prinzip des Drehstrommotors

und analog:

$$B_y(t) = -\frac{3}{2}B_0 \sin \omega t \quad (4.9b)$$

Der Betrag des von den drei Spulen erzeugten Feldes ist also zeitunabhängig, seine Richtung dreht sich mit der Kreisfrequenz ω .

Bringen wir jetzt einen drehbar gelagerten permanenten magnetischen Dipol zwischen die Spulen, so wird sich dieser mit Frequenz ω mit dem Magnetfeld mitdrehen. Dieser **”Synchronmotor”** kann jetzt mechanische Arbeit leisten².

Wenn wir den Permanentmagneten durch einen unmagnetischen metallischen Ring aus Aluminium ersetzen, so wird sich auch diese drehen auf Grund der im Ring angeworfenen Induktionsströme drehen. Allerdings muss die Kreisfrequenz des Rings langsamer als ω sein: Würde sich der Ring mit ω drehen, wäre $d\phi/dt = 0$, es würden keine Kreisströme induziert werden. Ein auf diesem Prinzip basierender Elektromotor heißt **”Asynchronmotor”**). Man kann den Al-Ring auch durch einen massiven Zylinder ersetzen; auch dieser wird durch die induzierten Wirbelströme in Bewegung gesetzt.

²Das Drehmoment, das auf den Dipol wirkt ist $\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B}$. Die maximale Leistung, die der Rotor erzeugen kann, ist gegeben durch $P = D\omega$.

4.4 Maxwellscher Verschiebungsstrom, Potenziale

Zunächst wollen wir in diesem Abschnitt das Faradaysche Induktionsgesetz (4.4) in seine differenzielle Form “übersetzen”: Wir betrachten eine beliebige Fläche mit zugehörigem Rand. Für das Integral des elektrischen Feldes über diesen geschlossenen Rand der Fläche erhalten wir:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} d\vec{s} &= \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{f} \\ &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{f}.\end{aligned}$$

Dabei wurde in der ersten Zeile der Satz von Stokes angewandt; beim Übergang zur zweiten Zeile wurde das Faraday’sche Induktionsgesetz (4.4) für diesen Fall vorausgesetzt. Da wir nun die Fläche F festhalten, wird die Änderung des magnetischen Flusses durch F ausschließlich durch die Änderung des Magnetfeldes bewirkt und wir erhalten:

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{f} = - \int \left(\frac{d}{dt} \vec{B} \right) d\vec{f}.$$

Da die letzte Beziehung für alle Flächen gelten soll, folgt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}.} \quad (4.10)$$

Damit haben wir die Gleichungen über die Quellen und Wirbel der elektrischen und magnetischen Felder und damit die eindeutigen Bestimmungsgleichungen für diese Vektorfelder $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$ in der folgenden Form kennengelernt:

- Das Coulomb’sche Gesetz (1.6):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.11)$$

- Das Faraday’sche Induktionsgesetz (4.10):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B} \quad (4.12)$$

- Das Fehlen magnetischer Monopole(3.13):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.13)$$

- Das Ampere’sche Durchflutungsgesetz (3.44)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (4.14)$$

Wir können uns aber nun leicht davon überzeugen, dass das Ampere'sche Durchflutungsgesetz in dieser Form (4.14) nur für zeitunabhängige Probleme, eben der Magnetostatik gültig sein kann. Für ein beliebiges Vektorfeld \vec{A} , das zweimal stetig differenzierbar ist, gilt nämlich

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \partial_x \partial_y A_z - \partial_x \partial_z A_y + \partial_y \partial_z A_x - \partial_y \partial_x A_z + \partial_z \partial_x A_y - \partial_z \partial_y A_x = 0.$$

Wenn wir nun aber den Divergenz-Operator auf (4.14) anwenden erhalten wir:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (4.15)$$

eine Gleichung, die offensichtlich nur bei den stationären Strömen der Magnetostatik mit $\text{div} \vec{j} = 0$ erfüllt wird. Dieser Fehler kann nun dadurch behoben werden, dass wir in (4.15) ersetzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} \quad (4.16)$$

Die Kontinuitätsgleichung (1.22) sorgt dann dafür, dass (4.15) stets erfüllt bleibt. Ausserdem erhalten wir im Grenzfall der stationären Probleme wieder die ursprüngliche Gleichung zurück. Schliesslich können wir nun noch die Ableitung der Ladungsdichte ρ nach der Zeit über das Coulombsche Gesetz umschreiben in

$$\frac{d\rho}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{d\vec{D}}{dt} \right).$$

Setzen wir diese Identität in (4.16) ein und nehmen die dort angedeutete Ersetzung in (4.15) vor so erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right).$$

Wenn wir nun also ausschließlich das Argument des Divergenz Operators $\vec{\nabla} \cdot$ auf beiden Seiten dieser Gleichung vergleichen erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right), \quad (4.17)$$

die Wirbel im Magnetfeld \vec{H} werden also durch die Stromdichte \vec{j} plus dem sogenannten *Maxwellschen Verschiebungsstrom*

$$\vec{j}_{\text{MV}} = \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (4.18)$$

erzeugt. Die Bedeutung dieses Maxwellschen Verschiebungsstroms können wir uns am Beispiel der Entladung eines Kondensators verdeutlichen (siehe Abb. 4.11). Ein Kondensator soll entsprechend der linken Skizze in dieser Abbildung mit elektrischen Ladungen "geladen" sein. Zwischen den beiden Platten besteht also ein elektrisches Feld bzw. eine dielektrische Verschiebung \vec{D} . Wird der Stromkreis, der die beiden Kondensatorplatten verbindet, geschlossen, so fließt ein Strom, der natürlich zu einem entsprechenden Magnetfeld (Wirbel um den Leiter) führt. Im Dielektrikum zwischen den beiden Kondensatorplatten fließt kein Strom. Dort ändert sich aber das \vec{D} Feld, (es geht zurück auf 0), was

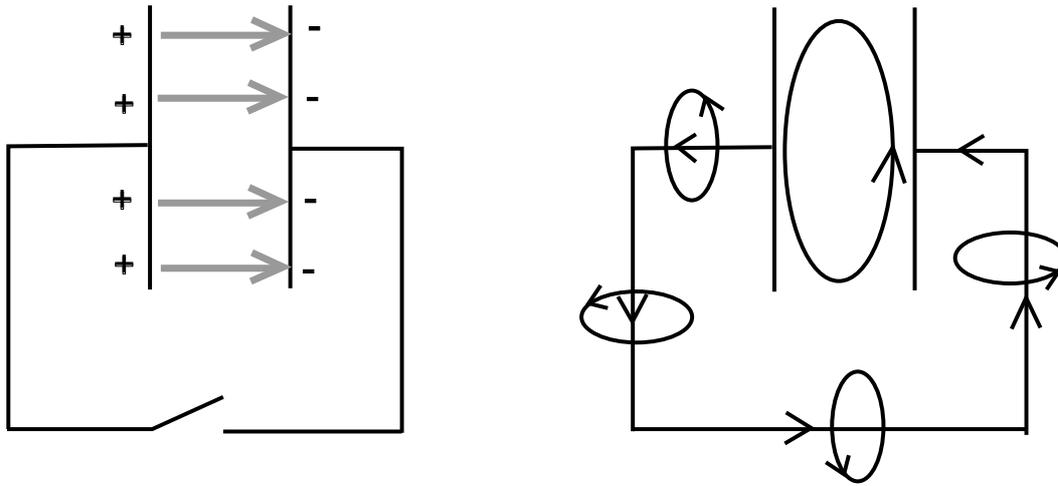


Abbildung 4.11: Maxwell'scher Verschiebungsstrom beim Entladen eines Kondensators

also zum Maxwell'schen Verschiebungsstrom (4.18), beziehungsweise ebenfalls zu einem entsprechende \vec{H} Feld auch in diesem Bereich führt.

Damit können wir die Maxwell'schen Gleichungen zusammenfassen und sie in folgender Form darstellen:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.19)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \quad (4.20)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (4.21)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{j}. \quad (4.22)$$

Die ersten zwei dieser vier Gleichungen bezeichnet man als die homogenen Gleichungen, da in diesen beiden Gleichungen nur die elektromagnetischen Felder \vec{B} und \vec{E} bzw. auch \vec{D} und \vec{H} vorkommen. Die dritte und vierte Gleichung sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen, da in ihnen neben den elektromagnetischen Feldern auch die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte \vec{j} vorkommen. Wir haben diese Gleichungen so geschrieben, dass diese Inhomogenitäten auf der rechten Seite auftauchen.

Wir wollen die Konsequenzen der Maxwellgleichungen zusammenfassen:

- Die positiven und negativen Ladungen im Raum sind die Quellen und Senken der dielektrischen Verschiebung \vec{D} .
- Es existieren *keine* magnetischen Monopole (Ladungen) und damit auch keine Quellen und Senken für die magnetische Induktionsdichte \vec{B} .
- Die Wirbel des \vec{E} -Feldes entstehen durch zeitlich veränderliche \vec{B} -Felder.
- Elektrische Ströme und zeitlich veränderlich \vec{D} -Felder erzeugen Wirbel des Magnetischen Feldes \vec{H} .

- Die Maxwellgleichungen sind 8 gekoppelte Differentialgleichungen (jeweils 3 Gleichungen verbergen sich hinter den Vektorgleichungen (4.20) und (4.22)) für die Bestimmung der elektrischen und magnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} , bzw. \vec{D} und \vec{H} .
- Ist das Problem stationär, sind also die Ladungsverteilungen und Ströme zeitunabhängig, so werden die Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder voneinander entkoppelt und reduzieren sich auf die Grundgleichungen der *Elektrostatik* und der *Magnetostatik*.

4.4.1 Potenziale der Elektrodynamik

Die Maxwell-Gleichungen (4.19) - (4.22) bilden zusammen mit den Materialgleichungen $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ die Grundsäulen der Elektrodynamik. Aus den beiden homogenen Maxwell-Gleichungen können wir nun herleiten, dass sich die elektromagnetischen Felder aus Potenzialen Φ und \vec{A} berechnen lassen. Aus der Tatsache, dass die magnetische Induktionsdichte \vec{B} quellfrei ist (4.19) folgt nämlich, dass sich \vec{B} als Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} berechnen lässt

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.23)$$

Diese Beziehung aus der Magnetostatik (3.11) ist also auch im allgemeinen zeitabhängigen Fall gültig. Wenn wir nun diese Darstellung von \vec{B} in die andere homogene Maxwell-Gleichung (4.20) einsetzen erhalten wir

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{d(\text{rot} \vec{A})}{dt} = \text{rot} \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{d\vec{A}}{dt} \right)}_{:= \vec{X}} = 0.$$

Das im zweiten Teil dieser Gleichung definierte Vektorfeld \vec{X} ist also wirbelfrei und lässt sich als (negativer) Gradient eines Skalarfeldes Φ darstellen

$$\begin{aligned} \vec{X} = -\text{grad} \Phi &= \vec{E} + \frac{d\vec{A}}{dt} \\ \vec{E} &= -\text{grad} \Phi - \frac{d\vec{A}}{dt} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aus diesen Gleichungen (4.23) und (4.24), die wir ja aus den homogenen Maxwell-Gleichungen erhalten haben, sehen wir also, dass die elektromagnetischen Felder eindeutig aus den dem skalaren Potenzial Φ und dem Vektorpotenzial \vec{A} bestimmt werden können. Dies führt zu einer signifikanten Reduktion der Information, die zur Festlegung der elektromagnetischen Felder erforderlich ist: Zur Darstellung der \vec{B} und \vec{E} Felder, muss man für jeden Raum - Zeitpunkt (\vec{r}, t) 6 Größen angeben, die 3 kartesischen Komponenten von \vec{E} und die 3 kartesischen Komponenten von \vec{B} . Die Potenziale sind aber bereits durch 4 Werte für jeden Raum - Zeitpunkt definiert (einer für Φ und 3 für \vec{A}). Die elektromagnetischen Felder enthalten also redundante Information.

Während die homogenen Maxwell-Gleichungen (4.20) und (4.19) den Zusammenhang zwischen den elektromagnetischen Feldern und den Potenzialen Φ und \vec{A} liefern, führen uns

die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (4.21) und (4.22) zu Bestimmungsgleichungen für diese elektromagnetischen Potenzialfelder. Betrachten wir dazu noch einmal (4.21)

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon \left(-\Delta \Phi - \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \\ &= \rho\end{aligned}\quad (4.25)$$

In der ersten Zeile haben wir $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ ersetzt und angenommen, dass die Dielektrizitätskonstante ortsunabhängig ist. Beim Übergang zur zweiten Zeile wurde (4.24) angewandt. Die zweite inhomogene Maxwellgleichung (4.21) führt uns auf

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt} &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \\ &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \varepsilon_0 \varepsilon \left\{ \vec{\nabla} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} \right\} \\ &= \vec{j}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir die Felder \vec{B} und \vec{E} durch die entsprechenden Potentiale (4.23) und (4.24) ersetzt. Den Term $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A})$ in dieser Gleichung können wir in Analogie zu der Vektorrelation

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

umformen zu

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

eingesetzt in (4.26) erhalten wir

$$-\frac{1}{\mu_0 \mu} \Delta \vec{A} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} \right] = \vec{j}\quad (4.27)$$

Die Gleichungen (4.25) und (4.27) sind 4 gekoppelte Differenzialgleichungen 2. Ordnung in den Ableitungen nach Ort und Zeit zur Bestimmung der Potenzialfelder \vec{A} und Φ . Diese 4 Differenzialgleichungen zweiter Ordnung bestimmen die Lösungen aber natürlich nicht eindeutig. Auch eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung für eine gesuchte Funktion $f(x)$ besitzt ja zwei linear unabhängige Lösungen. Wir werden uns auch jetzt sofort überzeugen, dass die physikalischen Observablen keine eindeutige Lösung für diese Potenzialfelder erwarten lassen. Beobachten können wir im Experiment nur die Kräfte, die in einem elektromagnetischen Feld auf Testladungen ausgeübt werden. Diese Kräfte werden aber durch die Felder \vec{E} und \vec{B} bestimmt. Nehmen wir einmal an, dass wir bereits einen Satz von Potentialen \vec{A} und Φ kennen, die uns über (4.23) und (4.24) die physikalisch beobachtbaren Felder liefern. Wir können dann einen anderen Satz von Potentialfeldern \vec{A}' und Φ' definieren

$$\left. \begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \\ \Phi' &= \Phi - \frac{d\Lambda}{dt}\end{aligned} \right\} \quad \text{Eichtransformation}$$

mit einem beliebigen skalaren *Eichfeld* $\Lambda(\vec{r}, t)$. Die über diese *Eichtransformation* bestimmten Potentiale \vec{A}' und Φ' liefern das gleiche Ergebnis für \vec{B} und \vec{E} wie die ursprünglichen Potentiale. Dies können wir leicht verifizieren:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda}_{=0} \\ &= \vec{B} \\ -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{d\vec{A}'}{dt} &= -\vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} \frac{d\Lambda}{dt} - \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \Lambda \\ &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{d\vec{A}}{dt} \\ &= \vec{E}\end{aligned}$$

Es liegt also nahe, die Eichung so geschickt zu wählen, dass die durchzuführenden Rechnungen möglichst einfach sind. Wir wollen hier zwei Eichbedingungen etwas näher diskutieren:

1. **Lorentz-Eichung** Wähle die Eichtransformation so, dass

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\Phi'}{dt} = 0 \quad (4.28)$$

Um zu ermitteln, wie das Eichfeld Λ aussehen muss, setzen wir die Eichtransformation (4.28) in diese Bedingung ein und erhalten:

$$\Delta \Lambda - \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d^2 \Lambda}{dt^2} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d\Phi}{dt}$$

Wir sehen also, dass es möglich ist zu einem vorgegebenen Satz von Potenzialfeldern \vec{A} , Φ durch Lösung dieser Gleichung ein Eichfeld Λ zu finden, sodass die aus der Umeichung resultierenden Potentiale die Bedingung der Lorentzeichung erfüllen. Da die Lösung für dieses Λ nicht eindeutig ist, sehen wir auch, dass selbst in der Lorentzeichung die Potentiale nicht eindeutig gegeben sind.

Durch die Lorentzeichung werden die Differenzialgleichungen zur Bestimmung der Potentialfelder (4.25) und (4.27) vereinfacht. Fordern wir für die gesuchten Potenzial \vec{A} und Φ die Lorentzeichung, so ist der Term in den Klammern $[]$ in (4.27) gleich null. Außerdem können wir in (4.25) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ über die Bedingung der Lorentzeichung ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}-\Delta \Phi + \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d^2 \Phi}{dt^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho \\ -\Delta \vec{A} + \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} &= \mu_0 \mu \vec{j}\end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Gleichungen für Φ und \vec{A} sind also entkoppelt und haben eine sehr symmetrische Gestalt, wie wir bei der Diskussion der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik noch sehen werden.

2. **Coulomb Eichung:** Im Fall der Coulomb Eichung fordert man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.30)$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung zur Bestimmung des skalaren Potentials Φ (4.25) zur Poisson Gleichung der Elektrostatik (1.34)

$$\varepsilon_0 \varepsilon \Delta \Phi(\vec{r}, t) = -\rho(\vec{r}, t)$$

allerdings mit der Komplikation, dass ρ und damit auch Φ zeitabhängig sein können. Die Lösungen dieser Gleichung ergeben sich (falls keine Randbedingungen vorliegen) genau so wie im Fall der Elektrostatik

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (4.31)$$

müssen aber auch für jede Zeit t neu berechnet werden. Das Problem reduziert sich also im ersten Schritt auf das reine Coulomb Problem. Mit diesem Ergebnis kann man dann im zweiten Schritt die Gleichung (4.27) zur Bestimmung von \vec{A} lösen.

Zusammenfassung:

- Aus den homogenen Maxwellgleichungen können wir herleiten, dass sich die elektromagnetischen Felder aus Potentialfeldern, einem skalaren Feld Φ und einem Vektorfeld \vec{A} , berechnen lassen.
- Diese Potenziale sind nicht eindeutig bestimmt. Bei einer Eichtransformation der Potentiale ändern sich die daraus berechneten \vec{E} und \vec{B} Felder nicht.
- Die Potenziale können durch Lösen von gekoppelten Differenzialgleichungen aus den Ladungs- und Stromverteilungen berechnet werden.
- Durch Eichbedingungen können diese gekoppelten Differenzialgleichungen entkoppelt und vereinfacht werden.

4.5 Energie der elektromagnetischen Felder

Bereits in der Elektrostatik haben wir gesehen, dass elektrische Felder einen Energieinhalt besitzen, nämlich die Energie die erforderlich ist diese Felder beziehungsweise die entsprechenden Ladungsverteilung aufzubauen. Diese Feldenergie haben wir mit der potenziellen Energie der Ladungsverteilung identifiziert. In einem magnetischen Feld wirkt die Lorentz-Kraft auf eine bewegte Punktladung. Für diese Lorentz-Kraft, die ja von der Geschwindigkeit der Ladung abhängt gibt es kein Potenzial, aus dem die Kraft als Gradient des Potenzials berechnet werden könnte. Die Lorentz-Kraft ist also im Sinne der Mechanik kein konservatives Kraftfeld. Wir müssen also in einem ersten Schritt untersuchen, was eine Änderung der kinetischen Energie von Punktladungen bewirken kann und wie diese Änderung der kinetischen Energie kompensiert wird durch eine andere Energieform, so dass die Gesamtenergie erhalten bleibt.

Dazu betrachten wir zunächst einmal die kinetische Energie \mathcal{T} einer Punktladung der Masse m mit der Geschwindigkeit \vec{v} und die Ableitung dieser kinetischen Energie nach der Zeit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \vec{v}^2 \\ &= m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{F}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

In der letzten Zeile diese Gleichung haben wir die Newtonsche Bewegungsgleichung benutzt, nach der ja die Kraft \vec{F} durch die Ableitung des Impulses $m\vec{v}$ nach der Zeit gegeben ist. Auf einer Punktladung q an der Position \vec{r} mit Geschwindigkeit \vec{v} wirken in einem elektromagnetischen Feld die Coulomb-Kraft und die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.33)$$

Damit ergibt sich also aus (4.32)

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E} + \underbrace{q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}_{=0}. \quad (4.34)$$

Man sieht also, dass eine Änderung der kinetischen Energie, also ein wirklicher Energieübertrag, nur über das elektrische Feld \vec{E} erfolgt. Der Beitrag der Lorentz-Kraft zu dieser Änderung verschwindet, da ja die Lorentzkraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung \vec{v} wirkt. Die Kraft durch das magnetische Feld \vec{B} bewirkt also ausschließlich eine Änderung der Impulsrichtung der Ladung. Gehen wir nun von einer einzelnen Punktladung zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung über, so müssen wir bei dieser Betrachtung ersetzen:

$$\begin{array}{ll} q & \rightarrow \rho & \text{Ladungsdichte} \\ q\vec{v} & \rightarrow \vec{j} & \text{Stromdichte} \\ \mathcal{T} & \rightarrow \tau & \text{Mechanische Energiedichte} \end{array}$$

Die Änderung der mechanischen Energiedichte berechnet sich also nach diesen Ersetzungen entsprechend (4.34) zu

$$\frac{d}{dt}\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (4.35)$$

Wir wollen beschreiben, wie diese Änderung der mechanischen Energiedichte τ kompensiert wird durch die Änderung der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Deshalb ersetzen wir die Stromdichte \vec{j} in dieser Gleichung durch die Feldstärken und schreiben entsprechend der Maxwellschen Gleichung (4.22)

$$\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Eingesetzt in (4.35) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\tau = \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (4.36)$$

Zur Umformung des ersten Termes auf der rechten Seite dieser Gleichung betrachten wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})}_{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})}_{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})} \\ &= \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}), \end{aligned}$$

dabei haben wir in der ersten Zeile die Produktregel für die Differenzialoperatoren im Divergenzoperator $\vec{\nabla}$ angewandt, angedeutet durch die geschweiften Klammern, die anzeigen, dass diese Ableitungsoperatoren auf der rechten Seite der Gleichung nur auf das \vec{E} , beziehungsweise \vec{H} Feld wirken. Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass die Vektorrelationen

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$$

auch für den Nabla Operator gelten, wenn man beachtet, dass die Felder auf die der Differenzialoperator wirkt, rechts von ihm stehen. Damit können wir also in (4.36) einsetzen

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tau &= \vec{H} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=-\frac{d\vec{E}}{dt}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

In dieser Umwandlung haben wir die Maxwell-Gleichung (4.20) benutzt und angenommen, dass die Materialkonstanten ε und μ zeitunabhängig sind, also z.B. gilt

$$\vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{2} \frac{d(\vec{E} \cdot \vec{E})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{E} \cdot \vec{D})}{dt}$$

Insgesamt können wir also die Gleichung für die Energierhaltung (4.36) auf die Form bringen

$$\frac{d}{dt}\tau + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}\right) = -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) . \quad (4.37)$$

Diese Gleichung kann man nun leicht interpretieren: Auf der linken Seite der Gleichung steht die zeitliche Änderung ($\frac{d}{dt}$) der totalen Energiedichte. Diese Energiedichte besteht einerseits aus der kinetischen Energiedichte der Massenpunkte τ plus der potenziellen Energiedichte beziehungsweise ausgedrückt als Feldenergiedichte der elektrischen und magnetischen Felder. Die Feldenergiedichte für elektrische Felder hatten wir ja bereits hergeleitet und der Beitrag $1/2\vec{H} \cdot \vec{B}$ ist einfach die entsprechende Ergänzung für die Magnetfelder. Ist also die zeitliche Änderung der gesamten Energiedichte (also rechte Seite von (4.37)) von Null verschieden, so muss wegen der Energieerhaltung diese lokale Änderung der Energiedichte begleitet sein von einem entsprechenden Zu- oder Abfluss von Energie. Wir haben also wie bei der Erhaltung der Ladung, die dargestellt wird durch die Kontinuitätsgleichung, auch hier eine Kontinuitätsgleichung für die Energie zu erwarten. In der Tat stellt ja die Gleichung (4.37) gerade eine solche Kontinuitätsgleichung dar und wir sehen, dass der sogenannte

$$\text{Poyntingvektor} \quad \vec{S} := \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.38)$$

die Funktion des Energieflusses übernimmt. Integrieren wir also (4.37) über ein bestimmtes Volumen V , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left[\tau + \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right] d^3r &= - \int \operatorname{div} \vec{S} d^3r \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} - \oint_{O_V} \vec{S} \cdot \vec{df} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Die Änderung der gesamten Energie im Volumen V , mechanische plus Feldenergie, wird also begleitet durch einen entsprechenden Energiefluss \vec{S} durch die Oberfläche des Volumens.