

Kapitel 5

Spulen und einfache elektronische Schaltungen

In diesem Abschnitt wollen wir mit den bisher eingeführten Bauelementen - Widerstände, Kondensatoren, Spulen einfache Schaltkreise realisieren und ihr Funktionsprinzip analysieren. Zuvor wollen wir jedoch einige allgemeine Eigenschaften von Spulen, sowie einige Methoden zur Erzeugung und Messung von Magnetfeldern ansprechen.

5.1 Allgemeines

5.1.1 Induktivität einer Spule

Das Magnetfeld durch eine Spule (Windungszahl: N , Querschnittsfläche: F) ist proportional zum Strom durch die Spule, $B = \text{const.} \cdot N \cdot I$. Der magnetische Fluss durch die Spule ist entsprechend gegeben durch:

$$\varphi = B \cdot F = \text{const.} \cdot N \cdot F \cdot I.$$

Wenn sich dieser Fluss zeitlich ändert, wird in jeder Windung der Spule die Spannung $-d\varphi/dt$ induziert, in der gesamten Spule also die Spannung:

$$U_{\text{ind}} = -N\dot{\varphi} = -N^2 \cdot \text{const.} \cdot F \cdot \dot{I} = -L\dot{I}.$$

Hierbei haben wir die **Induktivität** L via

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \dot{I} \tag{5.1}$$

definiert.

Die **Einheit der Induktivität** ist **Henry** (H). Es gilt: $1 \text{ H} = 1 \text{ Tm}^2/\text{A} = 1 \text{ Wb}/\text{A}$ (Wb: "Weber", **Einheit des magnetischen Flusses**).

Mit (2.1) können wir für den magnetischen Fluss durch die Spule schreiben:

$$\varphi = \frac{L}{N} I. \tag{5.2}$$

Für eine **lange Spule** (Querschnittsfläche F , Länge l) gilt:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} \cdot I.$$

Hiermit erhalten wir: $\varphi = \mu_0 NFI/l$ und

$$L = \mu_0 \frac{N^2 F}{l}. \quad (5.3)$$

Die Definition (2.1) kann leicht auf den Fall verallgemeinert werden, dass mehrere unabhängige Leiterschleifen vorliegen (wir nehmen der Einfachheit an, jede Schleife habe eine Windung). Durch die i -te Schleife soll der Strom I_i fließen. Das von dieser Schleife erzeugte Magnetfeld durchdringt z. T. auch die anderen Schleifen. Der magnetische Fluss φ_k durch die k -te Schleife setzt sich dann zusammen aus dem durch den Strom I_k von der Schleife selbst erzeugten Fluss und die Summe aller von den anderen Schleifen eingestreuerten Flüsse, d. h.

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^N L_{ik} \varphi_i. \quad (5.4)$$

Die Koeffizienten L_{ik} ergeben die "Induktivitätsmatrix", deren Diagonalelemente L_{ii} man Selbstinduktivität und deren Außerdiagonalelemente L_{ik} ($i \neq k$) man gegen(seitige) Induktivität nennt.

5.1.2 Energieinhalt einer Spule

Wir kehren zurück zum Fall einer einzigen Spule mit N Windungen und berechnen den Energieinhalt der Spule. Wir schließen hierzu die Spule an eine Batterie an, starten mit $I = 0$ und erhöhen den Strom durch die Spule auf den Wert I . Hierbei wird die Spannung $U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$ in der Spule induziert, gegen die die "Beladung" stattfinden muss. Die von der Batterie aufzubringende Leistung ist zu jedem Zeitpunkt $P = UI = -U_{\text{ind}} \cdot I$. Für die Energie, die für den gesamten "Ladevorgang" aufgewendet werden muss, erhält man:

$$W = \int_0^T P dt = - \int_0^T U_{\text{ind}} I dt = \int_0^T LI \cdot I dt = \frac{1}{2} LI^2.$$

Diese Arbeit wurde in die Spule gesteckt. Deren **Energieinhalt** ist also:

$$W_{\text{spule}} = \frac{1}{2} LI^2. \quad (5.5a)$$

Mit (5.2) können wir auch schreiben:

$$W_{\text{spule}} = \frac{N^2 \varphi^2}{2L}. \quad (5.5b)$$

Wie hängt W_{spule} mit der Energie zusammen, die im Magnetfeld der Spule steckt? Wir nehmen an, das Feld der Spule sei räumlich homogen. Wir erhalten dann für die **Feldenergie**:

$$W_{\text{feld}} = \frac{1}{2} B \cdot H \cdot V_{\text{spule}}.$$

Mit den Ausdrücken $B = \mu_0 NI/l$, $H = NI/l$ und $L = \mu_0 N^2 F/l$ (B - und H -Feld bzw. Induktivität der langen Spule, Länge l , Querschnittsfläche F) erhalten wir mit $V_{\text{Spule}} = Fl$:

$$W_{\text{feld}} = \frac{1}{2} \left(\mu_0 \frac{NI}{l} \right) \frac{NI}{l} lF = \frac{1}{2} \left(\mu_0 N^2 \frac{F}{l} \right) I^2 = \frac{1}{2} LI^2,$$

was gleich dem Ausdruck (5.5a) ist. Die Energie der Spule steckt also im magnetischen Feld (das gleiche gilt auch für kurze Spulen bzw. räumlich inhomogene Felder). Ganz analog hatten wir beim Kondensator gesehen, dass dessen Energie im elektrischen Feld steckt.

Wir können auch leicht die Energie eines Systems von Leiterschleifen angeben. Für die in der i -ten Schleife induzierten Spannung erhält man $U_{\text{ind},j} = -\sum_{k=1}^M L_{ik} \dot{I}_k$. Wie im Fall der Spule integriert man die Leistung, die erforderlich ist, um die Schleifen zu "beladen" und erhält:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^M L_{ik} I_i I_k \quad (5.6)$$

5.1.3 Spezielle Spulentypen

Bereits besprochen haben wir die "lange Spule" und die ringförmige Spule (**Torusspule**). Bei der "kurzen Spule" ist dagegen die Länge l deutlich geringer als der Radius r der Windungen. Eine weitere, in der Praxis wichtige Anordnung ist die **Helmholtz-Spule**. Sie besteht aus zwei kurzen Spulen (Windungszahl: N), die wie in Abb. 5.1 gezeigt parallel zueinander im Abstand a angeordnet sind. Hierbei ist a gleich dem Radius der beiden Spulen. Wenn in den beiden Spulen der gleiche Strom I fließt, ist das Feld zwischen den beiden Spule nahezu homogen und entlang der Verbindungsachse zwischen den Spulen gerichtet. Genau zwischen den beiden Spulen erhält man:

$$B_x \approx 0.716 \mu_0 \frac{N}{r} I. \quad (5.7)$$

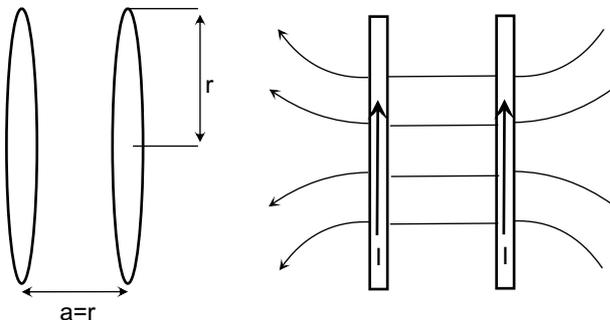
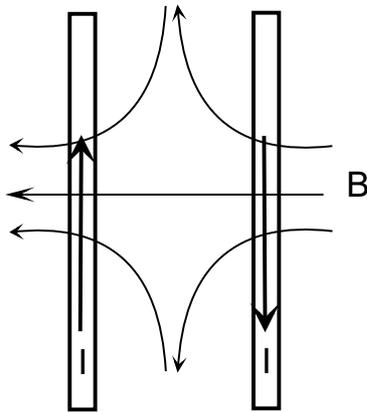


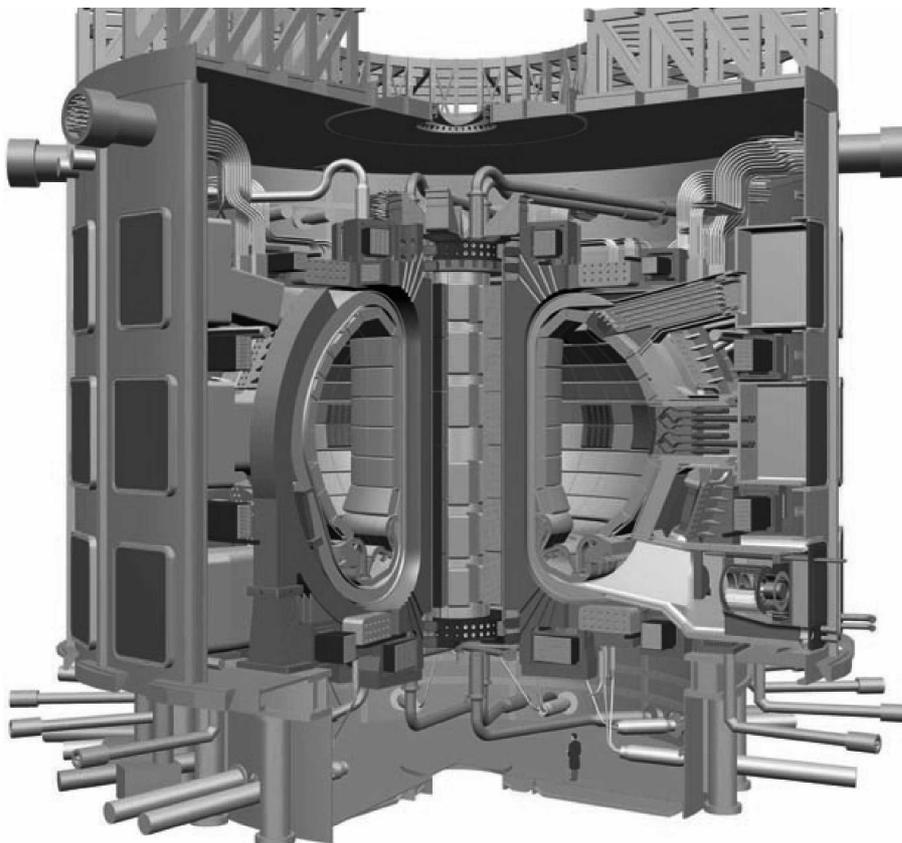
Abbildung 5.1: Helmholtz-Spule

Der Vorteil der Helmholtz-Spulen ist, dass sehr leicht von allen Seiten Gegenstände in das Magnetfeld eingebracht werden können. Wir hatten solche Spulen beispielsweise beim Fadenstrahlrohr verwendet.

Bestromt man die beiden Spulen dagegen mit entgegengesetzter Stromrichtung, so bekommt man ein Quadrupolfeld wie in Abb. 5.2 skizziert. In diesem Betriebsmodus spricht man von **Anti-Helmholtz-Spulen** oder manchmal auch von "Holtzhelm"-Spulen

Abbildung 5.2: *Anti-Helmholtz-Spule*

In vielen Bereichen der Physik hat man das Problem, das der Magnetfeldverlauf eine bestimmte Form haben sollte. Man arbeitet dann mit einer Vielzahl von Spulen, die magnetische Multipolmomente bis zu hohen Ordnungen realisieren. Als Beispiel zeigt Abb. 5.3 den geplanten Kernfusionsreaktors ITER. Im Reaktor befinden sich eine Reihe unterschiedlicher Spulen, die beispielsweise für den magnetischen Einschluss des toriodalen Fusionsplasmas oder für die Erzeugung eines Heizstroms im Plasma verantwortlich sind. Man beachte die Person unten im Vordergrund, die die gewaltigen Dimensionen des Systems anzeigt. Im Innern des Fusionsbereichs werden von den Magneten dabei Felder von ca. 12 T generiert werden. Man wickelt diese Magnete aus supraleitendem Draht.

Abbildung 5.3: *Schemazeichnung des geplanten Fusionsreaktors ITER.*

5.1.4 Spulen mit Kern

Bringt man in eine lange Spule einen Weicheisenkern (Permeabilität: μ) ein, so steigen das B -Feld, der magnetische Fluss und die Induktivität um den Faktor μ . Bei speziellen Anordnungen ist nur ein Teil des Weicheisens von Spulendraht umgeben. Dies gilt z. B. für hufeisenförmige Magnete, bei denen der Luftspalt zwischen den Enden des Kerns genutzt wird, um Gegenstände in das Magnetfeld einzubringen, oder für Transformatoren, bei denen der "Kern" einen Ring bildet. Wir werden Transformatoren etwas später in diesem Kapitel genauer kennenlernen. An dieser Stelle sei gesagt, dass der Sinn des Kerns (neben der B -Feld-Verstärkung) vor allem darin besteht, den von der "Primärspule" erzeugten Fluss in die "Sekundärspule" einzukoppeln.

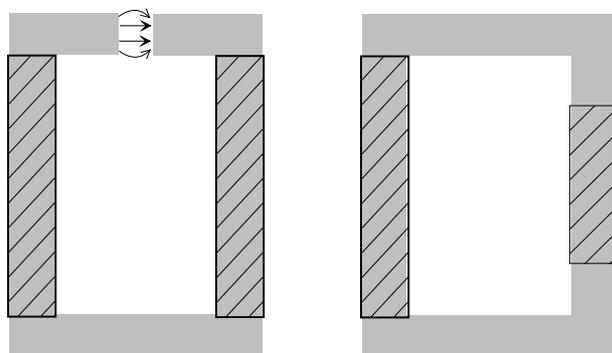


Abbildung 5.4: Hufeisenmagnet mit Weicheisenkern (links) und Transformator (rechts)

5.1.5 Erzeugung von Magnetfeldern

Dauerbetrieb: Mit Luftspulen aus normalleitendem Draht (Cu-Draht) lassen sich im Dauerbetrieb ohne besondere Kühlmaßnahmen maximale Magnetfelder von einigen 100 G erzeugen, bevor die Spule auf Grund der starken Dissipation im Leiter zerstört wird. Spezielle Magnete (Bitterspulen), bei denen jede Windung stark gekühlt wird, erreichen in Volumina von einigen cm^3 Felder bis 30 T. Bei Verwendung von Kernen mit hoher Sättigungsmagnetisierung können in Anordnungen wie Abb. 5.4 Felder bis um 1 T erreicht werden. Hohe Felder, v. a. auch in großen Volumina können mit supraleitenden Drähten erzielt werden, da hier wegen $R = 0$ praktisch¹ keine Energie dissipiert wird. Die Obergrenze des erreichbaren Feldes ist im wesentlichen durch das obere kritische Feld des verwendeten Supraleiters gegeben. Mit NbTi erreicht man Maximalfelder um 8 T, mit Nb₃Sn von über 20 T. Nb₃Sn ist allerdings schwer zu verarbeiten; man zieht deshalb, wann immer möglich, NbTi vor. In speziellen Hochfeldlaboratorien, aber auch bei Anwendungen wie der Kernspinresonanz, werden Hybridmagnete eingesetzt. Man benutzt eine (oder mehrere) äußere Spule(n) aus NbTi. In diese werden Nb₃Sn-Spulen eingebracht, in diese schließlich normalleitende Bittermagnete. Man erreicht heute bis zu 45 T.

Gepulste Felder: Für wenige ms lassen sich mit speziellen (normalleitenden) Spulen Magnetfelder bis in den Bereich 60–80 T erzeugen. Nach jedem Puls muss allerdings einige Zeit verstreichen, bis der Magnet wieder abgekühlt ist. Noch höhere gepulste Felder

¹Eine leichte Energiedissipation ergibt sich an den normalleitenden Stromzuführungen; auch treten Energieverluste auf, wenn sich das B -Feld zeitlich ändert.

von bis zu 200 T können dadurch erzeugt werden, dass extrem große Ströme für einige μs wenige oder sogar nur eine Windung durchfließen. Die hierbei auftretenden magnetischen Kräfte zerstören allerdings die Spule und meist auch die Probe, deren Eigenschaften im hohen Magnetfeld untersucht werden sollten. Noch "zerstörerischer" sind Implosionsmethoden, in denen ein leitfähiges Plasma in sehr kurzen Zeiten stark durch Sprengladungen zusammengedrückt wird. Man erreicht bis zu 2000 T. Das zugrunde liegende Prinzip ist wiederum das Induktionsgesetz bzw. die Lenzsche Regel. Man hat zunächst ein relativ großes vom Feld durchsetztes Volumen. Bei der Implosion bauen sich entsprechend der Lenzschen Regel Abschirmströme auf, die den Fluss durch einen gegebenen Querschnitt des Volumens konstant zu halten suchen. Verkleinert man die Querschnittsfläche, so vergrößert sich die Flussdichte.

Im Extremfall passiert dies auch bei der Implosion eines Sterns zu einem Neutronenstern. Hatte der Stern ursprünglich einen Durchmesser von 10^6 km und ein B -Feld von 1 G, der Neutronenstern schließlich einen Durchmesser von 10 km, so beträgt das B -Feld im Neutronenstern 10^{10} G = 10^6 T!

5.1.6 Messung von Magnetfeldern

Bereits angesprochen haben wir **Hallsonden** und **flux gates**, sowie **Induktionsspulen**. Bei flux gates wird die Hysteresekurve eines permanentmagnetischen Materials ausgenutzt. Beim Übergang in die Sättigungsmagnetisierung ist $M(H)$ stark nichtlinear. Man moduliert H periodisch mit einer Frequenz ω . Wenn $M(H)$ stark nichtlinear ist, erhält $M(\omega)$ auch Frequenzkomponenten 2ω , 3ω etc.². Man detektiert M bei der Frequenz 2ω und verwendet spezielle Kompensationsmethoden so, dass das Ausgangssignal der Sonde proportional zum äußeren Magnetfeld wird. Man kann so Signale bis herab zu etwa 1 pT messen.

Bei bestimmten metallischen Verbindungen ist der elektrische Widerstand stark magnetfeldabhängig und kann zur Magnetometrie verwendet werden. Solche **magneto-resistiven Elemente (GMR-Sensoren³)** werden beispielsweise zum Auslesen von Festplatten eingesetzt.

Die größte Empfindlichkeit erreichen supraleitende Quanteninterferometer (SQUIDs = Superconducting Quantum Interference Device), auf deren Funktionsprinzip wir hier nicht eingehen können. Mit SQUIDs können Magnetfelder bis zu einigen 10–15 T aufgelöst werden, was beispielsweise ausreicht, um die durch Hirnströme außerhalb des Schädels erzeugten magnetischen Signale zu messen (Magnetoenzephalographie, MEG).

²Um dies zu erkennen, können wir $M(H)$ Taylor-entwickeln: $M(H) = M_0 + dM/dH(H - H_0) + 0.5 \cdot d^2M/dH^2(H - H_0)^2 + \dots$. Setzt man $H = H_{ac} \cos \omega t$ ein, so ergibt das quadratische Glied einen Term proportional zu $\cos^2 \omega t = (1 + \cos^2 \omega t)/2$. Analog ergeben auch die höheren Glieder der Taylorreihe Beiträge zu höheren Harmonischen von ω .

³GMR = "Giant Magnetoresistance"

5.2 Schaltungen mit Induktivitäten und anderen Bauelementen

5.2.1 Auf- und Entladen einer Spule

Als einfachsten Schaltkreis betrachten wir einen Stromkreis aus einer Spannungsquelle, einer Induktivität L und einem Widerstand R (Abb. 5.5). Die Quelle soll zunächst schlagartig von $U = 0$ auf $U = U_0$ geschaltet werden.

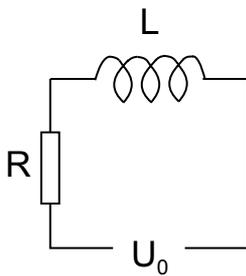


Abbildung 5.5: Auf- und Entladen einer Spule

Gemäß der Kirchhoffschen Maschenregel gilt:

$$U_0 = U_R + U_L \quad (5.8)$$

Wenn der Strom I durch den Kreis zu fließen beginnt, baut sich eine Induktionsspannung auf, die gegen die EMK der Spannungsquelle gerichtet ist. Der Strom muss gegen diese Spannung getrieben werden, wir erhalten $U_L = -U_{\text{ind}} = L\dot{I}$. Wir setzen weiter $U_R = RI$ ein und erhalten:

$$U_0 = RI + L\dot{I} \quad (5.9a)$$

bzw:

$$\frac{U_0}{R} = I + \frac{L}{R}\dot{I} \quad (5.9b)$$

Wir setzen an: $I = I_0 \exp(-Rt/L) + \text{const.}$ und erhalten:

$$\frac{U_0}{R} = I_0 e^{-Rt/L} + \text{const.} - I_0 e^{-Rt/L}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt: $\text{const.} = U_0/R$. Für $t = 0$ soll $I = 0$ sein, woraus $I_0 = -U_0/R$ folgt.

Für $I(t)$ ergibt sich also:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}). \quad (5.10)$$

Der Strom wächst mit einer charakteristischen Zeitkonstanten L/R exponentiell von 0 aus an und sättigt bei U_0/R . Wir schließen jetzt die Spannungsquelle kurz (d. h. $U_0 = 0$). Zur Zeit $t = 0$ fließe der Strom I_0 . Der Strom I baut sich dann nach (5.9b), mit $U_0 = 0$, ab, wobei gilt:

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L}. \quad (5.11)$$

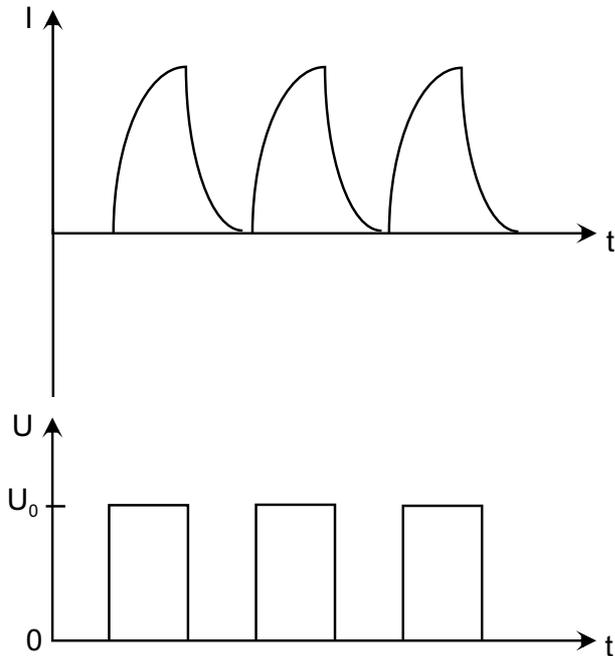


Abbildung 5.6: Zeitverlauf (schematisch) des Stroms durch die Spule der Schaltung 5.5 bei Anlegen einer Rechtecksspannung.

Wir demonstrieren dieses Verhalten durch Anlegen einer Rechtecksspannung $U(t)$ wie in Abb. 5.6 schematisch dargestellt.

Wir können dieses Verhalten mit dem Be- und Entladevorgang eines Kondensators vergleichen (s. Abschnitt 2.3). Dort floss der größte Strom beim Ein- bzw. Ausschalten der Spannung und klang exponentiell mit der Zeitkonstanten RC ab.

Insbesondere der Entladevorgang sowohl der Spule als auch des Kondensators ist aus der Warte einer Energie- bzw. Leistungsbilanz interessant. Im Widerstand wird die Leistung $U_R I$ verbraucht, wie wir ausführlich abgeleitet hatten. Die erforderliche Energie kann nur aus der Spule bzw. dem Kondensator kommen. Nach der Entladung ist die gesamte Energie der Spule bzw. des Kondensators verbraucht. Durch Integration $W = \int_0^\infty U_R(t) I(t) dt$ können wir wiederum die Energie erhalten, die im Kondensator ($W = CU_0^2/2$) bzw. der Spule ($W = LI^2/2$) gespeichert war.

5.2.2 Spule unter Wechselstrom

Wir legen jetzt an die Enden einer Spule eine Wechselspannung $U_0 \cos \omega t$ an (Abb. 5.7). Der ohmsche Widerstand des Stromkreises sei 0.

Die in der Spule induzierte Spannung ist der angelegten Wechselspannung entgegengerichtet, es gilt:

$$U_0 \cos \omega t = L \dot{I}. \quad (5.12)$$

Die Gleichung wird gelöst durch:

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t. \quad (5.13)$$

Strom und Spannung sind also um -90° (bzw. $-\pi/2$) "phasenverschoben", [$\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$]. Das Verhältnis $|I/U_0|$ nimmt proportional zu ω^{-1} ab. Beide Eigenschaften demonstrieren wir experimentell.

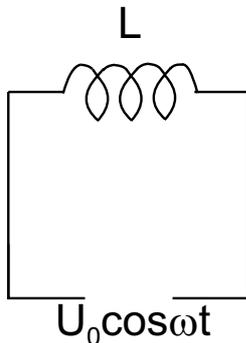


Abbildung 5.7: Spule mit angelegter Wechselspannung

5.2.3 Komplexe Widerstände

Spulen wie Kapazitäten unter Wechselstrom⁴ können wir sehr elegant durch die Verwendung einer komplexen Schreibweise beschreiben. Wir ersetzen hierzu die angelegte Spannung $U_0 \cos \omega t$ durch $U_0 \cdot \exp(i\omega t)$. Nachträglich können wir (falls nötig) zu einer reellen Schreibweise durch Bildung des Realteils zurückkehren.

Anstelle von (5.12) ergibt sich:

$$U_0 e^{i\omega t} = L \dot{I}. \quad (5.14)$$

Für I setzen wir an:

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (5.15)$$

wobei wir auch komplexe Werte für I_0 zulassen.

Einsetzen von (5.15) in (5.14) liefert:

$$U_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{i\omega t} \quad (5.16a)$$

bzw.

$$U = i\omega L \cdot I. \quad (5.16a)$$

Wir haben in diesem Fall wie beim ohmschen Gesetz einen linearen Zusammenhang zwischen U und I mit dem komplexen Widerstand ("Impedanz") der Spule $i\omega L$.

Es gilt also $I_0 = U_0 / (i\omega L)$, bzw.

$$I = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = -\frac{iU_0}{\omega L} (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \frac{U_0}{\omega L} (\sin \omega t - i \cos \omega t).$$

Der Realteil dieses Ausdrucks reproduziert gerade die Lösung (5.13), die wie durch Rechnung mit reellen Größen erhalten hatten.

Ganz analog können wir auch Kondensatoren einen komplexen Widerstand zuordnen. Legen wir an einen Kondensator eine Wechselspannung $U_0 \exp(i\omega t)$ an, so erhalten wir mit $Q = CU$:

$$U_0 e^{i\omega t} = Q/C \quad (5.17)$$

⁴Wir nehmen hier einen kosinusförmigen Wechselstrom an. Andere periodische Anregungen lassen sich stets durch eine Fourierreihe darstellen.

bzw. durch Bildung der zeitlichen Ableitung:

$$i\omega U_0 e^{i\omega t} = I/C \quad (5.18)$$

Mit dem Ansatz $I = I_0 \exp(i\omega t)$ erhalten wir:

$$U_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t} \quad (5.19a)$$

oder

$$U = \frac{1}{i\omega C} I \quad (5.19b)$$

Wir können also auch für Kondensatoren ein "ohmsches Gesetz" schreiben mit dem komplexen Widerstand $1/i\omega C$. Strom und Spannung sind um 90° phasenverschoben; das Verhältnis $|I/U_0|$ nimmt proportional zu ω zu. Diese Eigenschaften demonstrieren wir im Experiment.

Für **ohmsche Widerstände** gilt natürlich auch in der komplexen Schreibweise $U = RI$.

Der enorme Vorteil der komplexen Schreibweise liegt darin, dass sich jetzt auch komplizierte Schaltungen aus Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten wie Schaltungen aus Widerständen allein behandeln lassen. Man erhält für den Gesamtwiderstand einer Anordnung einen komplexen Widerstand $Z(\omega)$ bzw. einen Zusammenhang $U = ZI$. Hieraus lassen sich leicht einfache reelle Zusammenhänge etwa durch Betragsbildung oder Bildung von Realteil und Imaginärteil ableiten.

Wegen der Wichtigkeit komplexer Widerstände seien diese nochmals zusammengestellt.

Bauteil	komplexer Widerstand Z
Widerstand	R
Kapazität	$1/(i\omega C)$
Induktivität	$i\omega L$

Die **Einheit des komplexen Widerstands** ist in allen Fällen **Ohm**. Das Inverse des komplexen Widerstands wird auch als **komplexer Leitwert Y** oder als **Admittanz** bezeichnet: $Y = Z^{-1}$.

5.2.4 Leistung unter Wechselspannung

Die Beziehung $P = UI$ können wir auch für Wechselspannungen verwenden.

Betrachten wir zunächst einen **ohmschen Widerstand**.

Es gilt: $P = UI = U^2/R = U_0^2 \cos^2 \omega t / R$.

Der zeitliche Mittelwert dieses Ausdrucks ist $\langle P \rangle = 1/2 U_0^2 / R$, also einen Faktor $1/2$ weniger als bei Betrieb mit einer Gleichspannung U_0 . Die gleiche effektive Leistung würde man für eine Gleichspannung $U_{\text{eff}} = U_0 / \sqrt{2}$ (bzw. einen Gleichstrom $(U_0/R) / \sqrt{2}$) erhalten: $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}^2 / R = I_{\text{eff}}^2 R$. Man nennt deshalb U_{eff} und I_{eff} auch "**Effektivspannung**" bzw. "**Effektivstrom**".

Welche Leistung wird benötigt, um eine **Spule** anzutreiben?

Wir haben:

$$UI = \frac{U_0^2}{\omega L} \cos \omega t \cdot \sin \omega t = \frac{U_0^2}{\omega L} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\omega t.$$

Der zeitliche Mittelwert dieser Leistung ist Null; die Energie, die der Spule während des Aufladens zugeführt wurde, wird beim Entladen wieder frei. Die Leistung UI , die momentan benötigt wird, ist eine reine "Blindleistung".

Betrachten wir nun den allgemeineren Fall, dass U und I um den Wert δ phasenverschoben oszillieren. Es sei $U = U_0 \cos \omega t$ und $I = I_0 \cos(\omega t + \delta)$.

Für P ergibt sich:

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ &= U_0 I_0 \cos \omega t \cdot [\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta] \\ &= U_0 I_0 \cos \delta \cos^2 \omega t - U_0 I_0 \sin \delta \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

Man nennt: $P_W = U_0 I_0 \cos \delta$ "**Wirkleistung**" und $P_B = U_0 I_0 \sin \delta$ "**Blindleistung**".

Der zeitliche Mittelwert von P ergibt $P_W/2$. Der Mittelwert von P_B ist null.

Als Spezialfälle können wir einen Kondensator bzw. eine Spule betrachten. In beiden Fällen ist die Wirkleistung gleich null, die Blindleistung ist $\pm U_0 I_0$. Hierbei ist "-" für den Kondensator gültig, "+" für die Spule.

Wir können P auch in komplexer Darstellung berechnen.

Zunächst schreiben wir: $U = U_0 e^{i\omega t}$ und $I = I_0 e^{i\delta} e^{i\omega t} = (I_0 \cos \delta + i \cdot I_0 \sin \delta) \cdot e^{i\omega t}$.

Man bezeichnet $I_0 \cos \delta$ als "**Wirkstrom**", $I_0 \sin \delta$ als "**Blindstrom**".

Um auf einfache Weise in der komplexen Darstellung auf P_W und P_B zu kommen, berechnet man am leichtesten

$$\hat{P} = U \cdot I^* = U_0 e^{i\omega t} \cdot I_0 e^{-i\delta} e^{-i\omega t} = U_0 I_0 \cos \delta - i \cdot U_0 I_0 \sin \delta = P_W - iP_B.$$

Wir können hier mit $U = ZI$ auch den komplexen Widerstand Z einführen:

$$\hat{P} = UI^* = Z \cdot I \cdot I^* = (Z_r + iZ_i) I_0^2$$

Hierbei haben wir mit Z_r bzw. Z_i Real- bzw. den Imaginärteil von Z berechnet. Man bezeichnet Z_r auch als **Wirkwiderstand** und Z_i als **Blindwiderstand**. Mit $I = U/Z$ erhalten wir:

$$\hat{P} = U \cdot \frac{U^*}{Z^*} = U_0^2 \cdot \frac{1}{Z_r - iZ_i} = U_0^2 \frac{Z_r + iZ_i}{|Z|^2} = U_0^2 (Y_r + iY_i).$$

Y_r bzw. Y_i sind der Real- bzw. Imaginärteil des komplexen Leitwerts.

5.2.5 Zweipole und Vierpole

Im einfachsten Fall hat ein Schaltkreis zwei Klemmen, zwischen denen die (komplexe) Spannung U anliegt und der Strom I fließt (Abb. 5.8(a)). Diese Anordnung wird als "Zweipol" bezeichnet. Wir können im Prinzip diesen Schaltkreis als eine "black box" betrachten. Solange der Schaltkreis nur aus Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen besteht, ist er mit $U = ZI$ vollständig durch $Z(\omega)$ charakterisiert.

Ein etwas komplizierterer Schaltkreis hat einen Eingang (Eingangsspannung U_e , Eingangsstrom I_e) und einen Ausgang (Ausgangsspannung U_a , Ausgangsstrom I_a), wie in Abb. 5.8(b) dargestellt. Dieser Kreis wird auch "Vierpol" genannt. Kennen wir den Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang, so haben wir den Schaltkreis charakterisiert, ohne dessen Aufbau im Detail zu kennen.

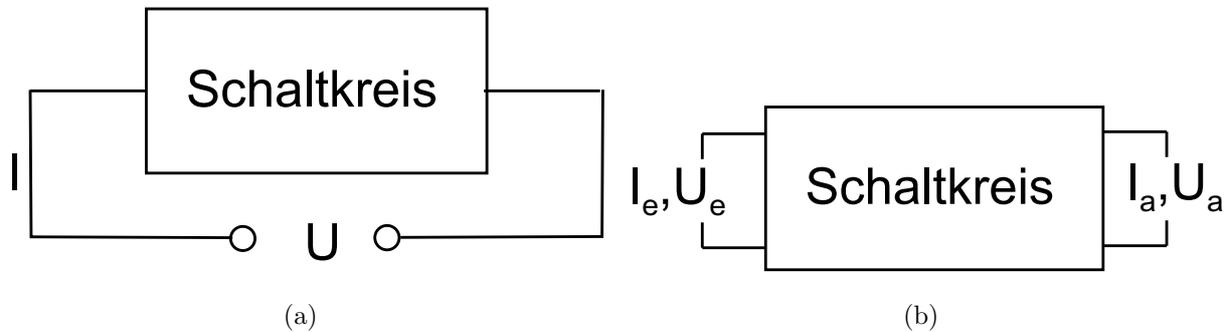


Abbildung 5.8: (a) Zweipol und (b) Vierpol

Wir können den Zusammenhang in Matrixschreibweise in der Form:

$$\begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_e \\ I_e \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

schreiben, mit der⁵ 2×2 -Matrix S . Wir können auch Vierpole miteinander kombinieren, so dass der Ausgang des einen den Eingang eines anderen bildet. Der kombinierte Schaltkreis lässt sich dann ebenfalls in der Form (5.20) darstellen, wobei die Matrix S des Gesamtkreises leicht nach den Regeln der Matrixmultiplikation zu berechnen ist.

Wir werden im folgenden einige einfache Beispiele analysieren, wobei wir annehmen, dass am Eingang eine Wechselspannung der Frequenz ω anliegt. Dabei werden wir nur einige ausgewählte Übertragungsgrößen (z. B. $S_{11} = U_a(U_e)$ berechnen).

5.2.6 Tiefpass

Der in Abb. 5.9. gezeichnete Schaltkreis besteht aus einem Widerstand R und einer Induktivität L , die in Reihe geschaltet sind. Die Ausgangsspannung wird über R abgegriffen.

⁵Falls N Eingangsgrößen und M Ausgangsgrößen vorliegen, müsste man S durch eine $M \times N$ -Matrix ersetzen

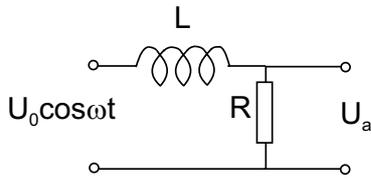


Abbildung 5.9: Tiefpass

Es gilt: $U_e = U_L + U_R$. Strom und Eingangsspannung hängen via $U_e = ZI$, mit $Z = i\omega L + R$ zusammen (Reihenschaltung!). Die Ausgangsspannung ist: $U_a = RI = RU_e/Z$, woraus folgt:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + i\omega L}. \quad (5.21)$$

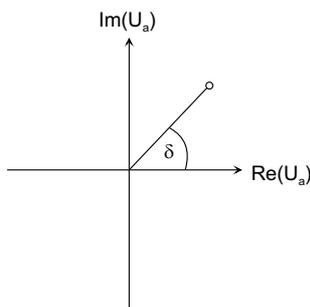
Für den Betrag $|U_a/U_e|$ ergibt sich:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \left| \frac{R}{R + i\omega L} \right| = \frac{R}{\sqrt{(R + i\omega L)(R - i\omega L)}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (5.22)$$

Für $\omega = 0$ ist $|U_a/U_e| = R$; für $\omega L \gg R$ ergibt sich $|U_a/U_e| \approx R/(\omega L)$, d. h. $|U_a/U_e|$ geht proportional zu $1/\omega$ gegen null. Die Schaltung lässt also nur tiefe Frequenzen passieren ("Tiefpass")⁶.

Wir haben die Eingangsspannung $\propto \cos \omega t$ als reell gewählt. Die Ausgangsspannung ist demgegenüber um eine Phase δ verschoben, d. h. $U_a \propto \cos(\omega t + \delta)$.

Abb. 5.10 stellt die Situation in einer komplexen Ebene dar, in der als x -Achse $\text{Re}(U_e)$ und als y -Achse $\text{Im}(U_a)$ aufgetragen ist.

Abbildung 5.10: Zur Bestimmung der Phasenverschiebung δ .

Aus der Abbildung ergibt sich leicht:

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}(U_a)}{\text{Re}(U_a)}. \quad (5.23)$$

Da wir U_e reell gewählt hatten, gilt mit (1.98) und

$$\frac{R}{R + i\omega L} = \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} (R - i\omega L) \quad (5.24)$$

$$\tan \delta = \frac{-\omega L}{R}. \quad (5.25)$$

⁶Der hier vorgestellte Tiefpass ist noch nicht sehr effektiv. Ein idealer Tiefpass sollte ein Signal bis zu einer Frequenz ω_g unabgeschwächt durchlassen, Signale höherer Frequenz dagegen überhaupt nicht. Man kann diesem Ideal mit komplizierteren Schaltungen als der hier vorgestellten aber recht nahe kommen.

Für $\omega = 0$ ist $\delta = 0$, für $\omega \rightarrow \infty$ geht δ gegen $-\pi/2$ (bzw. -90°). Der Wert $-\pi/4$ (-45°) wird für $\omega = R/L$ erreicht.

Die Abb. 5.11 zeigt $|U_a/U_e|$ und δ als Funktion von ω . Wegen $U_a = RI_e$ erhalten wir die gleiche Kurvenform auch für $|I_e/U_e|$. Diese Kurvenform, sowie die Frequenzabhängigkeit von δ beobachten wir auch experimentell.

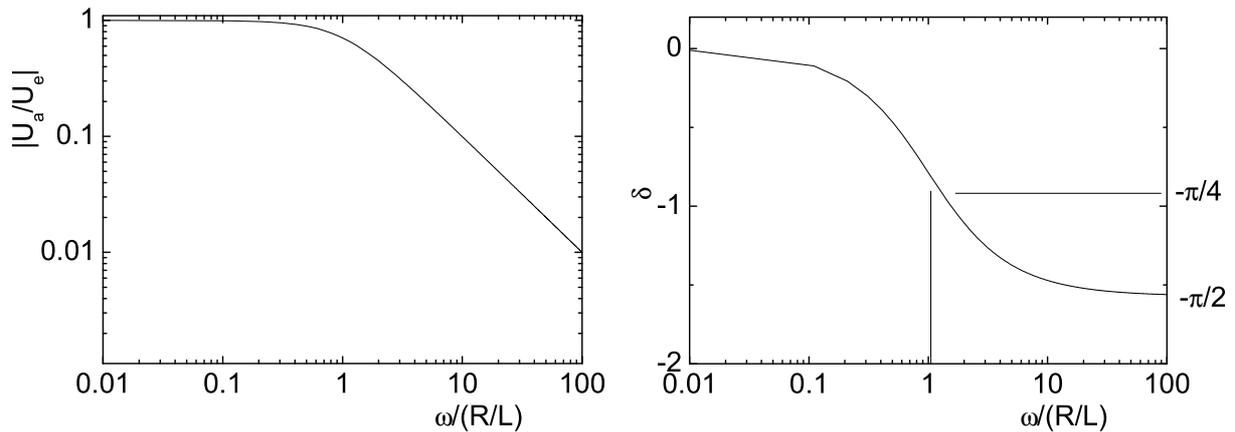


Abbildung 5.11: Übertragungsfunktion $|U_a/U_e|$ und Phasenwinkel δ als Funktion von ω in logarithmischer Auftragung für die Schaltung der Abb. 5.9.

Welche Leistung wird in der Schaltung verbraucht? Die Eingangsspannung ist reell, $U_e = U_0 \cos \omega t$, der Strom durch die Schaltung hat einen \cos - und einen \sin -Anteil. (Realteil bzw. Imaginärteil des komplexen Stroms). Nur der \cos -Anteil, d. h. der Realteil von I liefert einen Beitrag zur "Wirkleistung" P_W . Diese ergibt sich mit $U = ZI$ als

$$P_W = \cos^2 \omega t U_0^2 \operatorname{Re}(1/Z) = \cos^2 \omega t U_0^2 \frac{Z_r}{Z_r^2 + Z_i^2}.$$

Der zeitliche Mittelwert von P_w ist

$$\langle P_w \rangle = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{Z_r}{Z_r^2 + Z_i^2}.$$

Für unsere Schaltung ist $Z = i\omega L + R$ und damit

$$P_W = U^2 \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Für die Amplitude der Blindleistung erhalten wir: $P_B = U_0^2 \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$. Für $\omega \rightarrow \infty$ und $\omega = 0$ verschwindet P_B . Die Funktion nimmt ihr Maximum von $P_B = U_0^2/(2R)$ für $\omega = R/L$ an.

5.2.7 Hochpass

Wir betrachten die Schaltung der Abb. 5.12, in der gegenüber Abb. 5.9 L durch C ersetzt ist.

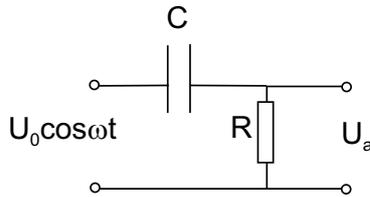


Abbildung 5.12: Hochpass

Für den komplexen Widerstand erhalten wir $Z = 1/(i\omega C) + R$, für U_a/U_e ergibt sich:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + 1/(i\omega C)}. \quad (5.26)$$

Hieraus folgt:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega^2 C^2)}}. \quad (5.27)$$

Der Ausdruck geht gegen Null für $\omega \rightarrow 0$; $|U_a/U_e| \rightarrow 1$ für $\omega \rightarrow \infty$. Der Schaltkreis lässt also bevorzugt hohe Frequenzen passieren. Für den Phasenwinkel finden wir

$$\tan \delta = \frac{1}{\omega RC}. \quad (5.28)$$

Für $\omega \rightarrow 0$ ist $\delta = \pi/2$, für $\omega \rightarrow \infty$ geht δ gegen Null. Die Abb. 5.13 zeigt $|U_a/U_e|$ und δ als Funktion von ω .

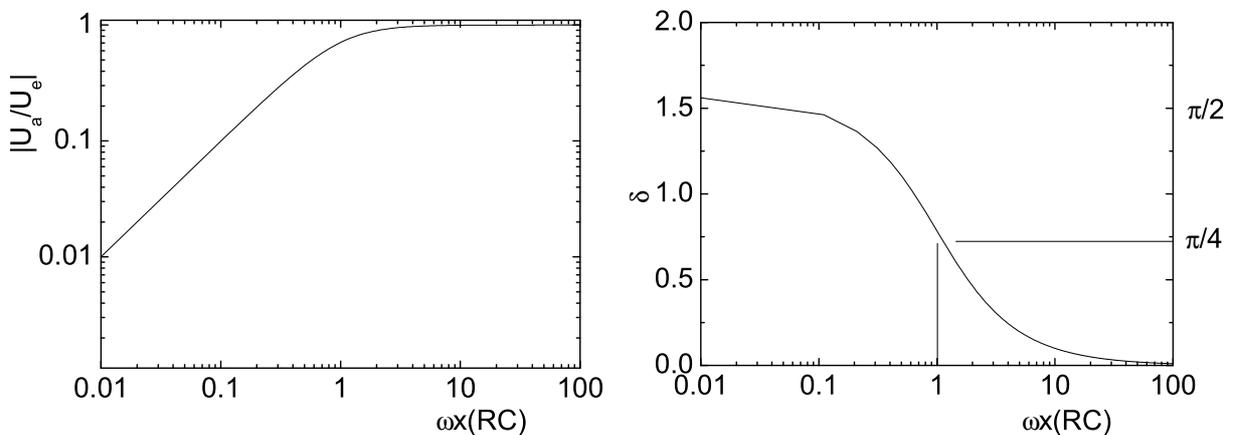


Abbildung 5.13: Übertragungsfunktion $|U_a/U_e|$ und Phasenwinkel δ als Funktion von ω für die Schaltung der Abb. 5.9.

5.2.8 Serieller Schwingkreis

In der in Abb. 5.14 gezeigten Schaltung sind eine Induktivität L und eine Kapazität C in Reihe geschaltet.

Wir erhalten für den komplexen Widerstand:

$$Z = i\omega L + \frac{1}{i\omega C}. \quad (5.29)$$

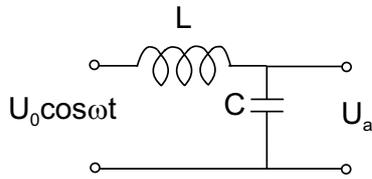


Abbildung 5.14: Serieller Schwingkreis

Damit ergibt sich:

$$\frac{U_c}{U_0} = \frac{1}{i\omega C} \cdot I = \frac{1}{i\omega C} \frac{\cos \omega t}{i(\omega L - 1/(\omega C))} = \frac{-\cos \omega t}{\omega^2 LC - 1} = \frac{\cos \omega t}{1 - \omega^2 LC}. \quad (5.30)$$

Für $\omega = 0$ ist $U_c = \cos \omega t U_0$; für $\omega \rightarrow \infty$ geht U_c/U_0 proportional zu $1/\omega^2$ gegen null. Für $\omega = 1/\sqrt{LC}$ divergiert U_c/U_0 . Hier kompensieren sich die komplexen Widerstände des Kondensators und der Spule, wir erhalten $Z = 0$.

Für den Phasenwinkel δ ergibt sich der Wert 0 für $\omega < 1/\sqrt{LC}$ (d. h. U_a und U_c in Phase), für $\omega > 1/\sqrt{LC}$ ergibt sich $\delta = \pi$ (d. h. U_a und U_c in Phase).

Abb. 5.15 zeigt die Funktion $|U_a/U_e|$, sowie den Phasenwinkel δ als Funktion von ω .

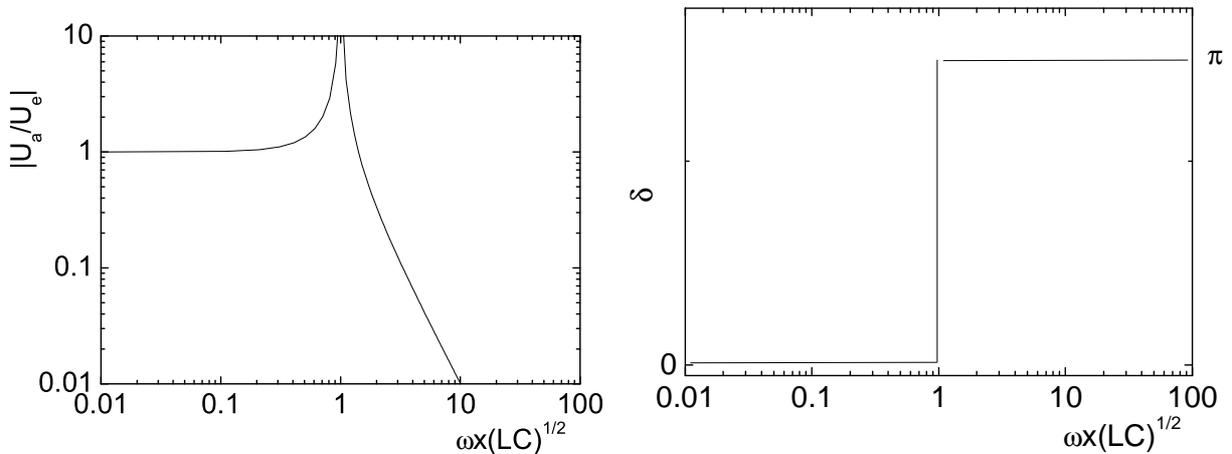


Abbildung 5.15: Übertragungsfunktion $|U_a/U_e|$ und Phasenwinkel δ als Funktion von $\omega\sqrt{LC}$ für die Schaltung der Abb. 5.14.

Wir berechnen noch Amplitude und Phasenlage des Stroms I durch den Schaltkreis. Mit $U = ZI$ erhalten wir $I/U = 1/Z = -i/(\omega L - 1/(\omega C)) = i\omega C/(1 - \omega^2 LC)$.

Hieraus ergibt sich:

$$\left| \frac{I}{U} \right| = \frac{\omega C}{1 - \omega^2 LC} \quad (5.31)$$

(siehe Abb. 5.16). Das Verhältnis I/U ist immer imaginär und auf der positiven Achse für $\omega < 1/\sqrt{LC}$, sowie auf der negativen Halbachse für $\omega > 1/\sqrt{LC}$. Die Phasenlage δ zwischen Strom und Spannung springt also bei von $\pi/2$ nach $-\pi/2$.

Bevor wir die Vorgänge in diesem Schaltkreis genauer analysieren, wollen wir zunächst die Schaltung der Abb. 5.14 um einen Widerstand R erweitern (Abb. 5.17).

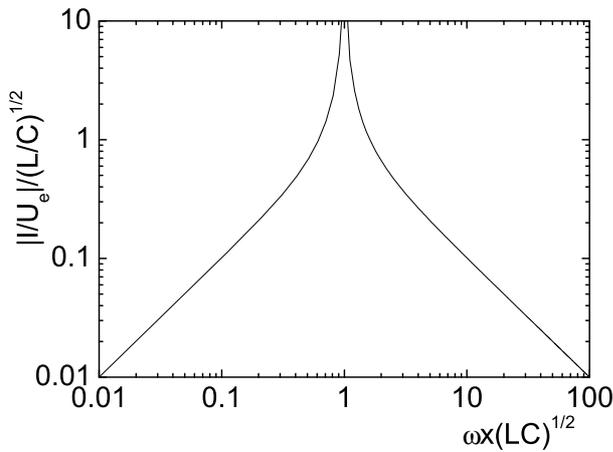


Abbildung 5.16: Verhältnis $|I/U_0|$ im Schaltkreis der Abb. 5.14

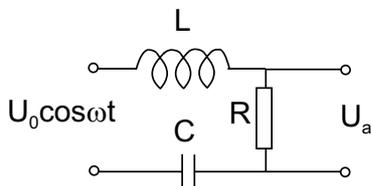


Abbildung 5.17: Serienschwingkreis mit Dämpfung

Für den komplexen Widerstand erhalten wir: $Z = R + i(\omega L - 1/\omega R)$. Für $|U_a/U_e|$ ergibt sich:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}. \quad (5.32)$$

Für die Phasenlage δ erhalten wir:

$$\tan \delta = \frac{-(\omega L - 1/\omega C)}{R} = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}. \quad (5.33)$$

$|U_a/U_e|$, sowie δ sind in Abb. 5.18 für verschiedene Werte von R (genauer: das Verhältnis $R(C/L)^{1/2}$) aufgetragen. Bei $\omega = 1/\sqrt{LC}$ wird $|U_a/U_e| = 1$ und $\delta = 0$. Die Anordnung wirkt als "Bandpass", die Frequenzen in der Nähe von $\omega = 1/\sqrt{LC}$ durchlässt. Für kleine Frequenzen geht δ gegen $\pi/2$, für große gegen $-\pi/2$. Auch diese Schaltung überprüfen wir experimentell.

Wie können wir den Schaltkreis weiter analysieren?

Wir legen hierzu anstelle einer Wechselspannung eine Rechteckspannung an. Wir beobachten, dass der Strom im Schwingkreis insbesondere nach Ausschalten der Spannung eine gedämpfte Schwingung ausführt.

Für $U_a = 0$ haben wir den in Abb. 5.19 dargestellten Schaltkreis vorliegen.

Hier gilt:

$$U_L + U_C + U_R = 0 \quad (5.34)$$

bzw. mit $U_R = RI$, $U_c = Q/C$ und $U_L = L\dot{I}$

$$L\dot{I} + \frac{Q}{C} + RI = 0 \quad (5.35)$$

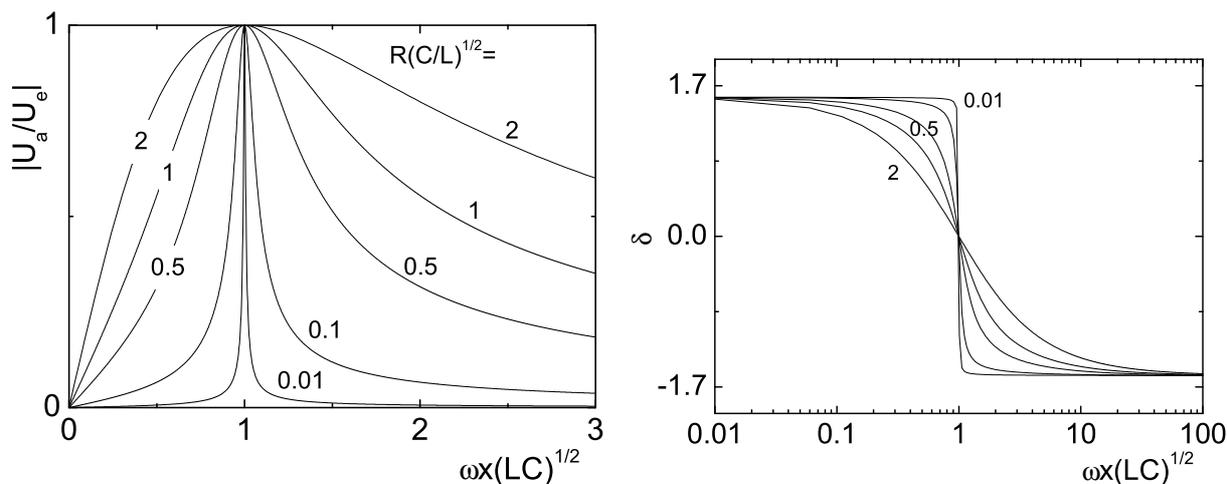


Abbildung 5.18: Übertragungsfunktion $|U_a/U_e|$ und Phasenwinkel δ als Funktion von ω für die Schaltung der Abb. 5.14.

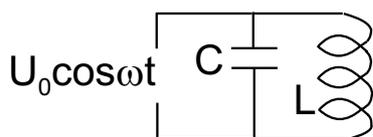


Abbildung 5.19: Kurzgeschlossener Schwingkreis

Differenzieren nach der Zeit liefert:

$$LC\ddot{I} + I + RC\dot{I} = 0 \quad (5.36)$$

Dies ist die Differentialgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators. Mit dem Ansatz

$$I(t) = I_0 e^{-\lambda t} \quad (5.37)$$

finden wir:

$$\lambda^2 LC + 1 - \lambda RC = 0 \quad (5.38)$$

und hieraus die zwei Lösungen:

$$\lambda_{\pm} = \frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}. \quad (5.39)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination $I(t) = I_{0,1} \exp(-\lambda_+ t) + I_{0,2} \exp(-\lambda_- t)$, wobei die Koeffizienten durch geeignete Anfangsbedingungen festgelegt sind. Für $(R/L)^2 > 4/LC$ (d. h. $R > 2(L/C)^{1/2}$ bzw. **„Gütefaktor“** $Q := (L/C)^{1/2}/R < 2$) ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv und λ_{\pm} reell und größer (oder gleich) Null. Der Strom klingt ohne Oszillationen exponentiell ab. Für $Q > 2$ ist λ_{\pm} komplex, man erhält eine gedämpfte Oszillation. Für $Q = 2$ schließlich ist $\lambda_+ = R/2L$ und $\lambda_- = 0$; dies ist der aperiodische Grenzfall.

Die Schaltung 5.17 bzw. 5.19 ist ein Schwingkreis mit der Eigenfrequenz (bei schwacher Dämpfung) $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Die in Abb. 5.18 gezeigten Kurven sind die Resonanzkurven dieses Kreises. R , L und C sind bei diesem Schwingkreis in Reihe geschaltet. Man spricht

deshalb von seriellen Schwingkreis. Es gibt allerdings einen Unterschied zu dem in Physik I behandelten getriebenen Oszillator: Dort war die homogene Schwingungsgleichung durch die anregende Kraft zu ergänzen. In (5.36) müssen wir aber wegen der zeitlichen Differentiation von (5.35) die zeitliche Ableitung der anregenden Spannung schreiben, also $-\omega U_0 \sin(\omega t)$. Dies erklärt beispielsweise, warum $|U_a|$ für $\omega = 0$ verschwindet (im mechanischen Fall war die Amplitude des Oszillators bei kleinen Frequenzen proportional zur anregenden Amplitude)⁷.

Es ist ebenfalls instruktiv, für die Oszillationen im Schwingkreis eine **Energiebetrachtung** für den Fall verschwindender Dämpfung aufzustellen. Die Energie im Kondensator ist $W_C = CU^2/2$, die Energie in der Spule $W_L = LI^2/2$. Die Spannung im Kondensator ist gegenüber dem Strom um 90° phasenverschoben. Es gilt also:

$$W_C = \frac{1}{2}CU_0^2 \cos^2 \omega t \quad W_L = \frac{1}{2}LI_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Die Energie im Kondensator ist maximal, wenn die Energie in der Spule minimal ist und umgekehrt. Für $R = 0$ müssen die Spannungsabfälle über der Spule und dem Kondensator entgegengesetzt gleich sein. Hieraus folgt unmittelbar $I_0 = \omega CU_0$. Mit $\omega = 1/(LC)^{1/2}$ erhalten wir schließlich:

$$W_L = \frac{1}{2}L(\omega C)^2 U_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}CU_0^2 \sin^2 \omega t$$

Die Amplituden von W_C und W_L sind also gleich groß. Hieraus ergibt sich für die Gesamtenergie :

$$W_c + W_L = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Die Energie "schaukelt" periodisch zwischen Spule und Kondensator hin- und her; die Summe aus beiden Energien ist konstant, wie wir aus dem allgemeinen Prinzip der Energieerhaltung auch hätten erwarten können. Für $R > 0$ wird dagegen Energie im Widerstand dissipiert, der Widerstand erwärmt sich.

Im Experiment beobachten wir das Abklingen der Schwingungen des Kreises der Abb. 5.19 für verschiedene Dämpfungen (die Anregung des Kreises erfolgt durch eine Rechteckspannung). Wir bringen ebenfalls verschiedene Kerne in die Spule. Wenn wir einen Ferriten einbringen, so nimmt (bei kleinem Widerstand R) die Periode der Oszillationen zu, was wir wegen der um den Faktor μ vergrößerten Induktivität auch erwarten. Bringen wir dagegen Weicheisenkerne ein, so nimmt die *Dämpfung* der Oszillationen stark zu. Woher kommt dies? Zum einen ist Weicheisen leitfähig; der zeitlich variable Fluss in der Spule induziert daher Wirbelströme im Kern, die den Kreis dämpfen. Wir sehen allerdings relativ wenig Unterschied im Abklingverhalten des Stroms, wenn wir einen Vollzylinder, einen Hohlzylinder oder einen geschlitzten Hohlzylinder einschieben.

Der wesentlich größere Dämpfungseffekt kommt durch die Hystereseschleife des Kerns zustande. Während einer Periode des Wechselstroms wird die Energie $\oint \mu_0 \vec{M} d\vec{H}$ im Kern

⁷Wenn wir uns dagegen wie in Abb. 5.14 für die über dem Kondensator abgegriffene Spannung U_c als Ausgangsgröße interessieren, so erhalten wir zunächst: $U_e = U_R + U_L + U_C$. Mit $U_R = RI$, $U_L = LI\dot{}$ und $I = C\dot{U}_C$ erhalten wir: $U_e = RC\dot{U}_C + LC\ddot{U}_C + U_C$. Für die Spannung am Kondensator erhalten wir also eine Differenzialgleichung, die der für die Auslenkungsamplitude des getriebenen mechanischen Oszillators völlig äquivalent ist.

verbraucht. Die während eines Magnetisierungszyklus durchfahrene Fläche $M(H)$ ergibt also gerade die Energie, die für die Ummagnetisierung nötig ist. Diese Fläche und damit der Energieverlust ist bei den Eisenkernen wesentlich größer als bei den Ferriten, weshalb Ferrite für Wechselstromanwendungen eindeutig vorteilhaft sind.

5.2.9 Paralleler Schwingkreis

Als Beispiel für eine Parallelschaltung komplexer Widerstände behandeln wir noch kurz den Kreis der Abb. 5.20 (Parallelschaltung aus L und C)

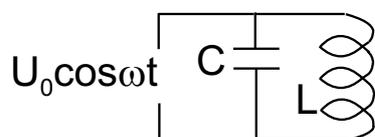


Abbildung 5.20: Parallelschwingkreis

Der komplexe Widerstand der Anordnung ist:

$$Z = \frac{1}{i\omega C + 1/(i\omega L)} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (5.40)$$

Z ist immer imaginär und wechselt bei $\omega = 1/(\sqrt{LC})$ das Vorzeichen. Für $|I_e/U_e|$ erhalten wir:

$$\left| \frac{I_e}{U_e} \right| = \frac{1}{|Z|} = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{\omega L}. \quad (5.41)$$

Die Funktion ist in Abb. 5.21 dargestellt.

Der Ausdruck ist gleich Null für $\omega = 1/(\sqrt{LC})$; Für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ divergiert $|I/U_e|$ (Hätten wir noch einen Widerstand R in Reihe mit der Spannungsquelle berücksichtigt, so hätten wir $|I/U_e| \rightarrow R$ in diesen Grenzfällen erhalten).

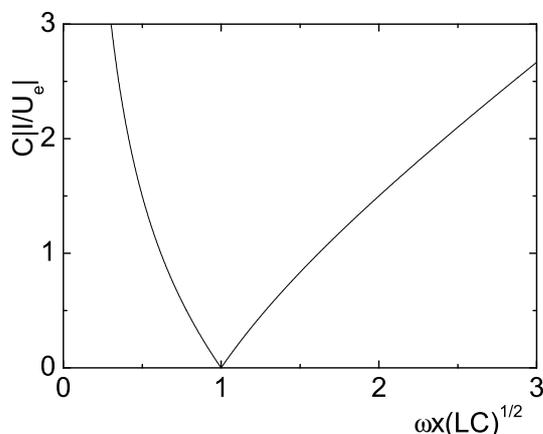


Abbildung 5.21: Übertragungsfunktion $C|I/U_e|$ für die Schaltung der Abb. 5.20.

Die Impedanz des Parallelschwingkreises wird bei der Resonanzfrequenz unendlich. Hier fließt kein Strom durch die Anordnung, die damit als "Bandsperr" wirkt.

5.2.10 Selbsterregender Schwingkreis

Wir haben bislang in diesem Abschnitt rein passive Bauelemente (R, L, C) betrachtet, die durch eine "Spannungsquelle" angeregt wurde. Wie erzeugt man Wechselspannungen? Bei niedrigen Frequenzen (z. B. 50 Hz) konnten wir das Induktionsgesetz ausnutzen und beispielsweise eine Induktionsschleife im Magnetfeld drehen. Für Frequenzen im kHz- bis GHz - Bereich ist dies nicht praktikabel. Hier können aber Bauelemente wie Transistoren oder Trioden⁸ verwendet werden. Auf deren genaueres Funktionsprinzip gehen wir im nächsten Unterabschnitt genauer ein. Hier soll zunächst nur gesagt werden, dass diese Verstärker zwei Eingangsklemmen haben, die einen gegebenen Stromkreis schließen, sowie einen Ausgang, der die am Eingang anliegende Spannung verstärkt herausgibt. Das Prinzip ist in Abb. 5.22 an Hand des Schaltsymbols eines "bipolaren Transistors" gezeigt.

Die Eingänge sind mit E (Emitter) und C (Kollektor) bezeichnet. Der Ausgang ist B (Basis). Zwischen Emitter und Kollektor fließt der Strom I_{EC} . Er kann durch die Spannung U_B stark geändert werden, wobei nur ein geringer Strom I_B durch die Basis fließt. Man kann damit mit sehr geringer Leistung $U_B I_B$ eine sehr große Leistungsänderung $\Delta(U_{CE} I_{CE})$ erzielen⁹.

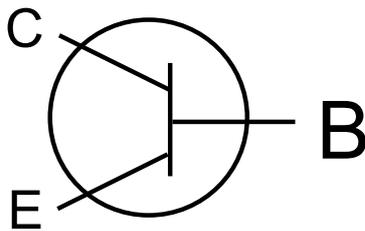


Abbildung 5.22: Schaltsymbol des bipolaren Transistors

Wir schließen nun die Eingänge E und C an den Parallelschwingkreis der Abb. 5.20 an. Zusätzlich bringen wir noch eine Gleichspannungsquelle U_0 (Batterie) in Reihe mit dem Transistor in den Stromkreis ein. Betrachten wir den Transistor als Widerstand R_T , so besteht unsere Schaltung aus einer durch Reihenschaltung aus R_T und dem Schwingkreis, die durch die Spannung U_0 versorgt wird. Durch die Schaltung fließt jetzt der (Gleich-)Strom $I_{CE} = U/R_T$. Jetzt bringen wir parallel zur Spule S_1 (Induktivität L_1) eine Spule S_2 (Induktivität L_2) an und verbinden diese mit E und B. Auch dieser Stromkreis muss eine Gleichspannungsquelle U'_0 enthalten, die die Basis versorgt. Auch in diesem sekundären Stromkreis fließt jetzt ein gewisser (Gleich-)Strom I_{BE} (s. Abb. 5.23)

Wären die beiden Stromkreise entkoppelt, würde nichts weiteres passieren. Zwischen den Beide Spulen sind aber induktiv über eine Gegeninduktivität L_{12} gekoppelt. Falls im ersten Stromkreis I_{BE} mit der Frequenz ω oszilliert, so wird über L_{12} in S_2 eine Wechselspannung induziert, die wiederum den Strom I_{BE} bzw. R_T moduliert. Der erste Kreis besteht jetzt aus einem Schwingkreis mit zeitlich moduliertem Widerstand R . Es zeigt sich nun, dass in einem derartigen Kreis Schwingungen, die ursprünglich mit einer nur

⁸Trioden (Röhrenverstärker) wurden früher sehr häufig benutzt, sind aber weitgehend von Transistoren ersetzt worden. Heute verwendet man Röhrenverstärker noch für die Verstärkung sehr hoher Leistungen.

⁹Ein mechanisches Analog ist ein (leicht drehbarer) Wasserhahn. Er lässt sich mit geringem Aufwand auf- und zudrehen und steuert damit einen u. U. sehr großen Wasserfluss durch die Leitung, der seinerseits zur Energiegewinnung genutzt werden kann. Man kann beispielsweise einen Teil dieser Energie entnehmen, um wiederum den Wasserhahn auf- und zuzudrehen.

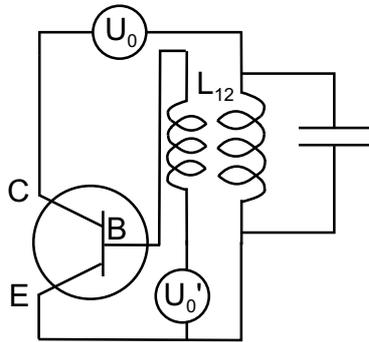


Abbildung 5.23: Selbsterregender Schwingkreis (Meißnersche Rückkoppelschaltung).

kleinen Amplitude vorhanden waren, verstärkt werden. Das System schaukelt sich zu einem gewissen Sättigungswert auf und oszilliert "von selbst" mit einer Frequenz, die durch L_1 , L_2 und C bestimmt ist ("Parametrische Verstärkung").

Dieser Vorgang ist Ihnen bereits aus der Physik I (bzw. sogar aus dem Kindheitsalter) wohlbekannt. Auch Pendeluhr pendeln von selbst, sobald sie angestoßen werden. Die Energie kommt dabei von einem ablaufenden Gewicht, die Rückkopplung wird durch die Unruh erzielt (vgl. Physik I). Aus Ihrer Kindheit kennen Sie die **Kinderschaukel** bzw. die Schiffschaukel. An den Umkehrpunkten der Schaukel sollte der Schwerpunkt des Kindes niedrig sein (das Kind kniet leicht), im Minimum hoch (das Kind steht aufrecht). Insgesamt "pumpt" das Kind bzw. sein Schwerpunkt mit 2ω . Die Energie, die für diese Pumpbewegung nötig ist, liefert Energie in die Schaukelbewegung¹⁰.

Mit selbsterregenden Schwingkreisen wie in Abb. 5.23 lassen sich sinnvoll Schwingungen mit Frequenzen von kHz bis wenige GHz erzeugen. Die Erzeugung von Schwingungen höherer Frequenz werden wir etwas später diskutieren.

5.2.11 Transistoren und andere verstärkende Bauelemente

Wir betrachten hier kurz das Funktionsprinzip von Transistoren¹¹ und Trioden.

Bei der **Triode** (s. Abb. 5.24) werden freie Elektronen durch Glühemission aus einer Kathode erzeugt und durch eine Spannung U_a zu der Anode hin beschleunigt. Zwischen Kathode und Anode befindet sich ein Gitter das bezüglich der Kathode auf einem Potenzial U_g liegt. Durch Variation von U_g wird der Elektronenstrom gesteuert.

Wie sieht bei festem U_a der Elektronenstrom als Funktion von U_g aus?

Für stark negative Werte von U_g nur wenige Elektronen (Boltzmann-Verteilung!) in der Lage, die Gegenspannung U_g zu durchlaufen. Mit wachsendem U_a (d. h. fallendem $|U_a|$) nimmt I zunächst exponentiell zu und sättigt schließlich für schwach negative oder positive Werte von U_a (fast alle Elektronen erreichen die Anode).

In einem gewissen Bereich ist der differentielle Leitwert dI/dU_g sehr groß. Eine kleine Änderung ΔU_g bewirkt eine große Änderung ΔI , die z. B. zu einer großen Änderung des Spannungsabfalls über dem in Abb. 5.24 eingezeichneten Widerstand R führt. Die Triode

¹⁰Wäre allerdings die Schaukel zu Beginn völlig ruhig gestanden, hätte das Kind beliebig zappeln können. Die Schaukel hätte sich nicht in Bewegung gesetzt.

¹¹Das genaue Verständnis der Funktionsweise eines Transistors verlangt detaillierte Kenntnisse aus der Festkörperphysik. Wir können daher das Funktionsprinzip des Transistors nur kurz umreißen.

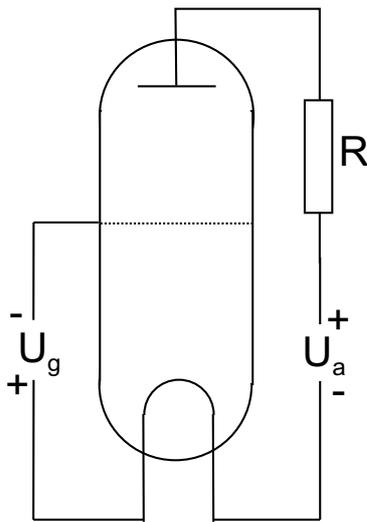


Abbildung 5.24: Triode.

kann, bei geeignet gewählten Betriebsspannungen, Spannungsänderungen verstärken und z. B. zur Anregung von Schwingkreisen, wie im letzten Abschnitt diskutiert, verwendet werden.

Transistoren sind aus halbleitenden Materialien aufgebaut. Man unterscheidet bipolare Transistoren und Feldeffekt-Transistoren (FETs) (Abb. 5.25).

Die Konzentration freier Elektronen ist in reinen Halbleitern bei Zimmertemperatur sehr gering. Bringt man Fremdatome in das Material ein ("dotieren"), so können diese entweder Elektronen abgeben ("Donatoren") oder binden "Akzeptoren". Bei Dotierung mit Donatoren leiten diese überzähligen Elektronen den Strom ("n-Dotierung") bei Dotierung mit Akzeptoren verhalten sich die übriggebliebenen nichtgebundenen Elektronen so, als hätte der Akzeptor einen Ladungssträger mit positiver Ladung ("Loch") freigesetzt ("p-Dotierung"). Die "Löcher" sind analog zu Luftblasen im Wasser zu sehen.

Im bipolaren Transistor (Abb. 5.25(a)) bringt man zwischen zwei Elektroden einer Dotierung (z. B. "n") eine dünne Schicht der anderen Dotierung ein (nnp-Transistor bzw. pnp-Transistor). In der Zwischenschicht bilden sich Raumladungszonen aus, die insbesondere zu einer starken Verringerung der Ladungsträgerkonzentration führen ("Verarmungszone"). Nur sehr wenige Elektronen (nnp-Transistor) bzw. Löcher (pnp-Transistor) gelangen über diese Schicht. Durch Anlegen einer Spannung U_B an die Zwischenschicht verringert sich die Ausdehnung der Raumladungszone, der Strom I_{CE} wächst stark an. Man hat also wiederum die Möglichkeit, bei geeignet gewählten Vorspannungen eine große Änderung $\Delta I_{CE}/\Delta U_B$ zu erreichen. Feldeffekttransistoren (vgl. Abb. 5.25(b)) werden auf der Oberfläche eines reinen Halbleitermaterials realisiert. Zwei äußere Elektroden ("Source" und "Drain") befinden sich elektrisch leitfähig auf einem stark dotierten Untergrund. Zwischen den Elektroden befindet sich ein schwach dotierter, leitfähiger Kanal. Über dem Kanal befindet sich elektrisch isoliert eine weitere Elektrode ("Gate"). Legt man an das Gate eine Spannung an, so ändert sich der Querschnitt des Kanals und damit die Leitfähigkeit zwischen Source und Drain. Durch die Gate-Spannung kann der Strom I_{SD} zwischen Source und Drain gesteuert werden.

Feldeffekttransistoren auf der Basis von GaAs sind sehr schnell. Der Kanal kann in wenigen ps geschaltet werden, so dass Frequenzen bis zu etlichen GHz verarbeitet werden können.

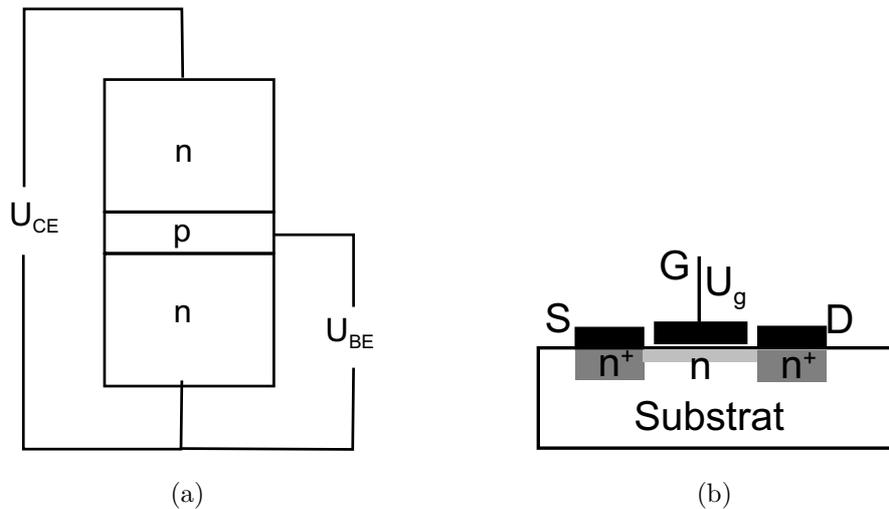


Abbildung 5.25: Bipolarer Transistor (a) und Feldeffekttransistor (b).

5.2.12 Transformatoren

Das letzte Bauelement, das wir hier betrachten wollen, ist der Transformator. Seine Aufgabe ist es, eine Wechselspannung mit Amplitude U_1 auf eine Wechselspannung mit Amplitude U_2 zu transformieren. Man setzt kleine Transformatoren in der Elektronik ein, sehr große Transformatoren, um die von den Kraftwerken erzeugte Hochspannung (380 kV bzw. 220 kV) schrittweise auf die in den Haushalten üblichen 220 V zu transformieren¹². Abb. 5.26 zeigt nochmals den Aufbau des Transformators. Eingangsseitig liegt an der Primärspule (Windungszahl: N_1) die Primärspannung U_e an. Für den in dieser Spule erzeugten magnetischen Fluss gilt:

$$U_1 = -N_1 \dot{\varphi}_1. \quad (5.42)$$

Dieser Fluss wird durch den Kern praktisch vollständig in die Sekundärspule übertragen, d. h. $\varphi_s \approx \varphi_p$.¹³

Die in der Sekundärspule induzierte Spannung ist $U_a = -N_2 \dot{\varphi}_2$.

Das Verhältnis Sekundärspannung zu Primärspannung ist also gleich N_2/N_1 .

Offensichtlich sollte der Kern des Transformators möglichst verlustfrei sein, d. h. die Hysterese $M(H)$ sollte gering sein, ebenfalls die Leitfähigkeit des Materials. Man verwendet vorzugsweise Ferrit, das deshalb auch "Transformatorblech" genannt wird.

Bislang hatten wir einen unbelasteten Transformator mit offener Ausgangsseite betrachtet (d. h. der Strom im Ausgangskreis war $I_2 = 0$).

Wir wollen jetzt den belasteten Transformator diskutieren und drücken dazu die Schaltung zunächst durch Induktivitäten und Gegeninduktivitäten aus.

¹²In Umspannwerken werden 220 kV bzw. 380 kV zunächst auf 110 kV umgesetzt. Die regionale Verteilung erfolgt mit dieser Spannung, die dann anschließend auf 30 kV und dann regional auf haushaltsübliche Werte transformiert wird.

¹³Je nach Windungssinn der Sekundärspule muss φ_2 evtl. auch negativ gezählt werden.

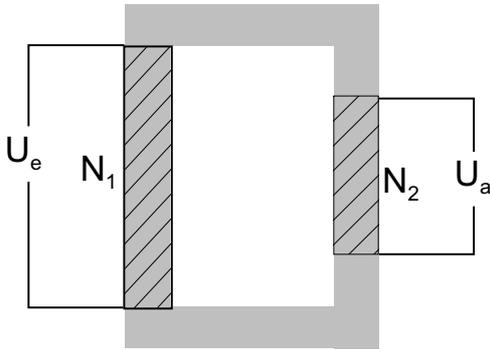


Abbildung 5.26: Transformator

Es gilt:

$$U_e = i\omega L_{11}I_1 + i\omega L_{12}I_2 \quad (5.43a)$$

$$U_a = i\omega L_{22}I_2 + i\omega L_{21}I_1 \quad (5.43b)$$

Hierbei haben wir angenommen, dass U_e eine Wechselspannung sei. L_{11} und L_{22} sind die Eigeninduktivitäten der Primär- bzw. Sekundärspule, L_{12} bzw. L_{21} die Gegeninduktivitäten. Wir können die Induktivitäten mit den Windungszahlen der beiden Spulen in Verbindung setzen, wenn wir nochmals den offenen Trafo betrachten:

Mit $I_2 = 0$ erhalten wir: $U_e = i\omega L_{11}I_1$ und $U_a = i\omega L_{21}I_1$ und hieraus: $U_a/U_e = L_{21}/L_{11}$.

Mit $U_a/U_e = N_2/N_1$ ergibt sich:

$$L_{21} = L_{11} \frac{N_2}{N_1}. \quad (5.44a)$$

Ganz analog können wir $I_1 = 0$ setzen (bzw. "Primär" und "Sekundär" vertauschen). Wir erhalten:

$$L_{12} = L_{22} \frac{N_1}{N_2}. \quad (5.44b)$$

Schließlich erhalten wir für das Verhältnis L_{21}/L_{12} :

$$\frac{L_{21}}{L_{12}} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \left(\frac{L_{11}}{L_{22}}\right)^2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 1.$$

Nun ist $L_{22} = \text{const.} \cdot N_2^2$ und $L_{11} = \text{const.} \cdot N_1^2$ und damit $L_{22}/L_{11} = (N_2/N_1)^2$. Hieraus folgt schließlich:

$$L_{21} = L_{12}. \quad (5.44c)$$

Wenn wir an die Sekundärspule einen Widerstand R anschließen, so gilt:

$$I_2 = \frac{U_a}{R}. \quad (5.45)$$

(5.45) zusammen mit (5.43a) und (5.43b) erlaubt, die Übertragungsfunktionen des Transformators (z. B. U_a/U_e oder I_1/U_e), oder auch andere Größen wie Wirk- und Blindleistung zu bestimmen.

Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch gesagt, dass es (relativ) leicht ist, die Übertragungsgröße eines vorgegebenen Schaltkreises zu berechnen. In der Praxis ist es eher üblich, dass ein noch unbekannter Schaltkreis eine gewünschte Funktion erfüllen muss. Dieses "inverse" Problem ist erheblich schwieriger und verlangt oft umfangreiche Kenntnisse in der Elektrotechnik.

