Philosophische Logik: Ausgewählte Themen

Skript zur Vorlesung
von
Thomas Piecha

Sommersemester 2014

Universität Tübingen
Philosophisches Seminar und
Fachbereich Informatik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Vorlesung werden verschiedene philosophische Logiken behandelt. Dies sind im wesentlichen Logiken, die in Bezug auf philosophische Probleme eine Rolle spielen. Einen Überblick über eine Vielzahl von philosophischen Logiken bieten z. B. die Sammelbände

- D. Jacquette (Hrsg.) (2002), *A Companion to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.
- L. Goble (Hrsg.) (2001), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.

Das Hauptthema der Vorlesung sind aussagen- und quantorenlogische Modallogiken. Es werden unter anderem folgende Quellen verwendet (weitere finden sich im Literaturverzeichnis):

- M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.
- G. E. Hughes & M. J. Cresswell (1996), *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge.

In Teilen orientiert sich die Vorlesung auch an Vorlesungen von P. Schroeder-Heister. Es wird darauf verzichtet, jede Verwendung dieser Quellen immer kenntlich zu machen.

Wir beginnen mit einer Wiederholung zur klassischen Aussagenlogik. Dabei weisen wir auch auf mögliche Modifikationen der klassischen Logik hin, die zu verschiedenen philosophischen Logiken führen.

2 Aussagenlogik

2.1 Syntax und Semantik

Definition 2.1 Das *Alphabet der Sprache der Aussagenlogik* besteht aus folgenden Zeichen: *Alphabet*

(i) *Aussagesymbole* (*Aussagevariablen*): $p, q, r, \ldots$, auch mit Indizes: $p_0, p_1, p_2, \ldots$
Es sei $\mathrm{AV} = \{p, q, r, \ldots\}$ die *Menge der Aussagesymbole* (bzw. *der Aussagevariablen*).

(ii) *Konnektive* (*Junktoren, logische Konstanten*): $\top$ (Verum), $\bot$ (Falsum), $\neg$ (Negation), $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion) und $\rightarrow$ (Implikation).

(iii) Klammern: (,)

Definition 2.2 Die (*aussagenlogischen*) *Formeln* über $\mathrm{AV} = \{p, q, r, \ldots\}$ sind wie folgt definiert: *Formeln*

(i) Jedes Aussagesymbol in AV ist eine Formel. $\top$ und $\bot$ sind ebenfalls Formeln.

(ii) Wenn A eine Formel ist, dann auch $\neg A$.

(iii) Wenn A und B Formeln sind, dann auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$.

Die *Sprache der Aussagenlogik* ist die Menge aller (aussagenlogischen) Formeln. Diese Menge bezeichnen wir auch mit FORMEL. *Sprache der Aussagenlogik*

Beispiel. Der Ausdruck $(((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3)$ ist eine aussagenlogische Formel.

Bemerkung. Wir fassen die Klauseln (i)-(iii) als Regeln zur Erzeugung von Formeln auf, so dass Formeln genau die mit diesen Regeln erzeugbaren Ausdrücke sind. Wir verzichten daher auf die weitere Bedingung, dass nichts sonst eine Formel sei, oder dass die Menge der Formeln gemäß (i)-(iii) die kleinste derartige Menge sei. (Wir werden das so auch bei anderen Definitionen entsprechender Form handhaben.)

Bemerkungen. (i) Die Sprache der Aussagenlogik ist unsere *Objektsprache*. In ihr kommen ausschließlich Zeichen des Alphabets gemäß Definition 2.1 vor. Wir verwenden $A, B, C, \ldots$ (ggf. mit Indizes) als *metasprachliche Variablen* für in der Objektsprache ausgedrückte Formeln.

(ii) Die Aussagesymbole werden auch als *atomare Formeln*, kurz: *Atome*, bezeichnet. Ebenso $\top$ und $\bot$.

(iii) Nicht-atomare Formeln heißen *komplex*.

(iv) Aussagenlogische Formeln werden im Folgenden auch einfach als "Aussagen" bezeichnet.

Bemerkung. Regeln zur *Klammerersparnis*: *Klammerersparnis*

(i) Außenklammern können weggelassen werden.

(ii) *Bindungsstärke*: wie üblich, d. h. $\neg$ bindet am stärksten, $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\to$.

(iii) Wir verwenden Linksklammerung.

Beispiel. Die Formel mit Klammerersparnis $A \wedge B \wedge C \wedge D \to A \vee B \vee C \vee D$ steht für die Formel $((((A \wedge B) \wedge C) \wedge D) \to (((A \vee B) \vee C) \vee D))$.

Definition 2.3 Die Erzeugung von Formeln kann als *Strukturbaum* dargestellt werden. Dieser ist rekursiv definiert wie folgt: *Strukturbaum*

(i) Der Strukturbaum $Sb(A)$ einer atomaren Formel A ist der Knoten

$$A$$

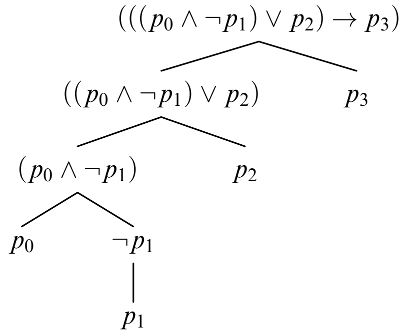
(ii) Der Strukturbaum $Sb(\neg A)$ einer negierten Formel $\neg A$ ist

$$\begin{tikzcd} \neg A \arrow[d, no head] \\ Sb(A) \end{tikzcd}$$

(iii) Die Strukturbäume $Sb(A \wedge B)$, $Sb(A \vee B)$, bzw. $Sb(A \to B)$ von Formeln $A \wedge B$, $A \vee B$, bzw. $A \to B$ sind

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A \wedge B \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & & A \vee B \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & & A \to B \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ Sb(A) & & Sb(B) & Sb(A) & & Sb(B) & Sb(A) & & Sb(B) \end{tikzcd}$$

Beispiel. Der Strukturbaum der Formel $(((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2) \to p_3)$ ist:



Bemerkung. Durch die Festlegung der Syntax als formale Sprache kann diese mathematisch behandelt werden. Es ergibt sich jedoch gegenüber der natürlichen Sprache eine Einschränkung der Ausdrucksstärke. Viele philosophische Logiken sind durch Spracherweiterungen gekennzeichnet.

Soviel zur Syntax. Nun behandeln wir noch die Semantik.

In der Semantik werden zunächst den Aussagesymbolen Wahrheitswerte zugeordnet (durch eine Bewertung h), und die Bedeutung der logischen Konstanten $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\to$ wird durch Funktionen von Wahrheitswerten festgelegt.

Definition 2.4 Eine *Bewertung h* ist eine Funktion, die jedem Aussagesymbol aus AV einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, d. h. $h : \mathrm{AV} \to \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$. Für $A \in \mathrm{AV}$ heißt A *wahr unter h*, falls $h(A) = \mathrm{w}$, und *falsch unter h*, falls $h(A) = \mathrm{f}$. *Bewertung*

Definition 2.5 Durch eine Funktion $[\![\ ]\!]^h : \textsc{Formel} \to \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$ wird jeder Formel über AV ein Wahrheitswert w oder f zugeordnet. Der *Wahrheitswert* $[\![A]\!]^h$ einer Formel A unter der Bewertung h ist wie folgt über dem Aufbau von Formeln definiert: *Wahrheitswert*

Für Aussagesymbole $A \in \mathrm{AV}$:

$$[\![A]\!]^h := \begin{cases} \mathrm{w} & \text{falls } h(A) = \mathrm{w}, \\ \mathrm{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die übrigen aussagenlogischen Formeln:

$$\begin{aligned}
[\![\top]\!]^h &:= \mathrm{w} \\
[\![\bot]\!]^h &:= \mathrm{f} \\
[\![\neg A]\!]^h &:= \begin{cases} \mathrm{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = \mathrm{f}, \\ \mathrm{f} & \text{sonst.} \end{cases} \\
[\![A \wedge B]\!]^h &:= \begin{cases} \mathrm{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = \mathrm{w} \text{ und } [\![B]\!]^h = \mathrm{w}, \\ \mathrm{f} & \text{sonst.} \end{cases} \\
[\![A \vee B]\!]^h &:= \begin{cases} \mathrm{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = \mathrm{w} \text{ oder } [\![B]\!]^h = \mathrm{w}, \\ \mathrm{f} & \text{sonst.} \end{cases} \\
[\![A \to B]\!]^h &:= \begin{cases} \mathrm{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = \mathrm{f} \text{ oder } [\![B]\!]^h = \mathrm{w}, \\ \mathrm{f} & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Entsprechender Ausdruck der Wahrheitswertabhängigkeit durch Wahrheitstafeln:

Negation

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Implikation

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Für das *Verum*: $\frac{\top}{\mathrm{w}}$, und für das *Falsum*: $\frac{\bot}{\mathrm{f}}$.

Bemerkung. Alle weiteren aussagenlogischen Konnektive (beliebiger Stelligkeit) können durch die angegebenen ausgedrückt werden (*funktionale Vollständigkeit*).
Zum Beispiel kann die Biimplikation $A \leftrightarrow B$, wobei

$$[\![A \leftrightarrow B]\!]^h := \begin{cases} \mathrm{w} & \text{falls } [\![A]\!]^h = [\![B]\!]^h, \\ \mathrm{f} & \text{sonst,} \end{cases}$$

durch $(A \to B) \wedge (B \to A)$ ausgedrückt werden.

Definition 2.6 Alternativ kann die Semantik der Aussagenlogik durch Definition der Relation $h \vDash A$ ("*A gilt in h*", "*A ist wahr unter h*"), bzw. $h \nvDash A$ ("*in h gilt A nicht*", "*A ist falsch unter h*") wie folgt angegeben werden: *A gilt in h*

Für Aussagesymbole $A \in \mathrm{AV}$:

$$h \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; h(A) = \mathrm{w}$$

(Entsprechend sei $h \nvDash A \;:\Longleftrightarrow\; h(A) = \mathrm{f}$.)

Für die übrigen aussagenlogischen Formeln:

$$\begin{aligned} h &\vDash \top \\ h &\nvDash \bot \\ h \vDash \neg A &\;:\Longleftrightarrow\; h \nvDash A \\ h \vDash A \wedge B &\;:\Longleftrightarrow\; h \vDash A \text{ und } h \vDash B \\ h \vDash A \vee B &\;:\Longleftrightarrow\; h \vDash A \text{ oder } h \vDash B \\ h \vDash A \to B &\;:\Longleftrightarrow\; h \nvDash A \text{ oder } h \vDash B \\ &\;\Longleftrightarrow\; \text{Wenn } h \vDash A, \text{ dann } h \vDash B \end{aligned}$$

Definition 2.7 (i) A heißt *allgemeingültig* (oder *tautologisch*), falls A unter allen Bewertungen wahr ist (d. h. falls $h \vDash A$ für alle h gilt). Schreibweise: $\vDash A$. *allgemeingültig*

(ii) A heißt *erfüllbar* (oder *konsistent*), falls A unter mindestens einer Bewertung wahr ist (d. h. falls es eine Bewertung h gibt, so dass $h \vDash A$). *erfüllbar*

(iii) A heißt *unerfüllbar* (oder *inkonsistent* oder *kontradiktorisch*), falls A unter keiner Bewertung wahr ist (d. h. falls $h \nvDash A$ für alle h gilt). *unerfüllbar*

(iv) A heißt *kontingent*, falls A weder allgemeingültig noch unerfüllbar ist. *kontingent*

Bemerkung. Für Formelmengen Γ bedeutet $h \vDash \Gamma$, dass $h \vDash A$ für alle Formeln $A \in \Gamma$.

Definition 2.8 Die *(aussagen-)logische Folgerung* einer Formel A aus einer Formelmenge Γ ist wie folgt definiert: *logische Folgerung*

$$\Gamma \models A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle Bewertungen } h\text{: wenn } h \models \Gamma, \text{ dann } h \models A$$

(Man sagt auch: Γ *impliziert* (*logisch*) A. Die Formeln in Γ heißen in diesem Zusammenhang *Prämissen*, und die Formel A heißt *Konklusion*.)
Zwei Formeln A und B heißen *logisch äquivalent*, falls $A \models B$ und $B \models A$ (kurz: $A \mathrel{=\!\!|\!\models} B$). *logisch äquivalent*

Bemerkung. Wir verwenden das Zeichen "$\models$" sowohl für die Gültigkeitsrelation $h \models A$, bzw. $h \models \Gamma$, als auch für die logische Folgerung ($\Gamma \models A$). Die jeweilige Bedeutung ist aber durch den Bezug auf eine Bewertung h bzw. auf eine Formelmenge Γ eindeutig. Ist $\Gamma = \emptyset$, schreiben wir $\models A$, was die Allgemeingültigkeit von A ausdrückt.

Beispiele. Überprüfung der logischen Folgerung unter Verwendung von Wahrheitstafeln (es seien $A, B \in$ AV):

(i) Gilt die Folgerungsbehauptung $A \vee B, \neg A \models B$?

	A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\models$	B
	w	w	w	f		w
	w	f	w	f		f
→	f	w	w	w	✓	w
	f	f	f	w		f

Es gibt nur eine Bewertung, unter der alle Prämissen wahr sind (dritte Zeile). Unter dieser Bewertung ist auch die Konklusion B wahr. Die Konklusion B ist also unter allen Bewertungen wahr, unter denen auch die Prämissen $A \vee B, \neg A$ wahr sind, es gilt also $A \vee B, \neg A \models B$.

(ii) Gilt die Folgerungsbehauptung $A \vee B, A \models B$?

	A	B	$A \vee B$	A	$\models$	B
→	w	w	w	w	✓	w
→	w	f	w	w	✗	f
	f	w	w	f		w
	f	f	f	f		f

Es gibt zwei Bewertungen, unter denen alle Prämissen wahr sind (erste und zweite Zeile). Allerdings ist die Konklusion B unter der zweiten Bewertung falsch. Es ist also $A \vee B, A \not\models B$, d. h. $A \vee B, A \models B$ gilt nicht.

Bemerkung. Es gilt das Import-Export-Theorem: $\Gamma, A \models B \iff \Gamma \models A \to B$.
Für $\Gamma = \emptyset$ ist der Nachweis von $A \models B$ somit äquivalent zum Nachweis der Allgemeingültigkeit von $A \to B$.

Bemerkungen. (i) In der klassischen Logik werden lediglich zwei Wahrheitswerte verwendet (*Bivalenzprinzip*): w und f.

Bewertungen können natürlich auch für mehr als zwei Wahrheitswerte definiert werden. Dies führt zu den *mehrwertigen Logiken*.

(ii) In der angegebenen Semantik für aussagenlogische Formeln werden Aussagesymbole durch die Wahrheitswerte w oder f interpretiert. Die Semantik ist somit nur auf Formeln anwendbar, die aus atomaren Formeln zusammengesetzt sind, die einen Wahrheitswert haben (*Wahrheitsdefinitheit*).

Dies kann zu Problemen z. B. bei der Behandlung der Implikation führen. In bestimmten *nicht-klassischen Logiken* wird auf die Forderung nach Wahrheitsdefinitheit verzichtet.

(iii) Die Semantik legt fest, dass der Wahrheitswert einer komplexen Formel eine Funktion der Wahrheitswerte ihrer Teilformeln ist (*Wahrheitsfunktionalität*). Dies ist ebenfalls eine Einschränkung.

Sei z. B. A die Aussage "Jeder Gegenstand ist mit sich selbst identisch" und B die Aussage "Tübingen liegt am Neckar". Sowohl A als auch B sind wahr. Jedoch ist die Aussage "Es ist notwendig, dass A" wahr, während die Aussage "Es ist notwendig, dass B" falsch ist. "Es ist notwendig, dass" ist also kein wahrheitsfunktionaler Operator, der im Rahmen der aussagenlogischen Semantik behandelt werden könnte.

In *Modallogiken* wird diese Einschränkung nicht gemacht.

Neben der Semantik spielen Kalküle eine Rolle. Sie gestatten das Ableiten von Aussagen aus Axiomen oder Annahmen mittels Regeln. Im Unterschied zur logischen Folgerung im semantischen Sinne gibt das regelbasierte Schließen die Form tatsächlicher Argumentationen genauer wieder. Dies ist insbesondere beim Kalkül des natürlichen Schließens der Fall.

2.2 Kalkül des natürlichen Schließens

Es werden keine Axiome, sondern nur Annahmen verwendet. Die Abhängigkeit von Annahmen kann gelöscht werden: In der Ableitung

$$\frac{\begin{matrix} A \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \to B} \text{ (Implikationseinführung)}$$

ist die Prämisse B der Implikationseinführung noch von der Annahme A abhängig, während die Konklusion $A \to B$ nicht mehr von A abhängt.

Definition 2.9 Der *Kalkül NK des natürlichen Schließens* für *klassische Logik* ist durch folgende Regeln gegeben: *Kalkül NK*

Einführung (Introduction)	*Beseitigung (Elimination)*
$\dfrac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2}\ (\wedge\,\mathrm{I})$	$\dfrac{A_1 \wedge A_2}{A_i}\ (\wedge\,\mathrm{E})\ (i = 1 \text{ oder } 2)$
$\dfrac{A_i}{A_1 \vee A_2}\ (\vee\,\mathrm{I})\ (i = 1 \text{ oder } 2)$	$\dfrac{A_1 \vee A_2 \quad \begin{matrix}[A_1]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A_2]\\ C\end{matrix}}{C}\ (\vee\,\mathrm{E})$
$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \to B}\ (\to\mathrm{I})$	$\dfrac{A \quad A \to B}{B}\ (\to\mathrm{E})$

$$\begin{array}{c}[\neg A]\\ \dfrac{\bot}{A}\,(\bot)_c\end{array}$$

Bemerkung. Die Einführungsregeln geben an, wie von Aussagen auf eine komplexere Aussage, die eine bestimmte zusätzliche logische Konstante enthält, geschlossen werden darf. Die Beseitigungsregeln geben an, was aus einer komplexen Aussage (ggf. unter Verwendung weiterer Aussagen) geschlossen werden kann.
Die Regeln legen somit den Gebrauch der logischen Konstanten fest. Sie dürfen jedoch nicht beliebig gewählt werden, wie das folgende Regelpaar für das Konnektiv "tonk" zeigt ($i = 1$ oder 2):

$$\frac{A_i}{A_1 \text{ tonk } A_2}\,(\text{tonk I}) \qquad\qquad \frac{A_1 \text{ tonk } A_2}{A_i}\,(\text{tonk E})$$

Mit diesen Regeln lassen sich nämlich aus beliebigen Annahmen A beliebige Aussagen B ableiten:

$$\dfrac{\dfrac{A}{A \text{ tonk } B}\,(\text{tonk I})}{B}\,(\text{tonk E})$$

Das resultierende System würde man nicht unbedingt als Logik bezeichnen wollen. Man braucht hier also zusätzliche Prinzipien, denen Regeln für logische Konstanten gehorchen müssen (z. B. sogenannte "Harmonieprinzipien" für das Verhältnis zwischen Einführungs- und Beseitigungsregeln).

Beispiel. Im Kalkül NK kann das *tertium non datur* (Satz vom ausgeschlossenen Dritten) abgeleitet werden (wir verwenden $\neg A := A \to \bot$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1}{A \vee \neg A}\,(\vee\,\text{I}) \qquad [\neg(A \vee \neg A)]^3}{\bot}\,(\to\text{E})}{A}\,(\bot)_c^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2}{A \vee \neg A}\,(\vee\,\text{I}) \qquad [\neg(A \vee \neg A)]^3}{\bot}\,(\to\text{E})}{\neg A}\,(\to\text{I})^2}{\bot}\,(\to\text{E})}{A \vee \neg A}\,(\bot)_c^3$$

Es gilt also $\vdash_{\mathrm{NK}} A \vee \neg A$.

Bemerkungen. (i) In der Ableitung von $A \vee \neg A$ ist die Verwendung von *reductio ad absurdum* in Form von

$$\begin{array}{c}[\neg A]\\ \dfrac{\bot}{A}\,(\bot)_c\end{array}$$

wesentlich. Schränkt man die Regel $(\bot)_c$ auf das *ex falso quodlibet*

$$\frac{\bot}{A}\,(\bot)$$

ein, bei dem Annahmen der Form $\neg A$ nicht mehr gelöscht werden dürfen, so kann $A \vee \neg A$ nicht mehr abgeleitet werden.

Beweistheoretisch führt diese Einschränkung zum *Kalkül NI des natürlichen Schließens* für *intuitionistische Logik*. *Kalkül NI*

Lässt man diese Regel ganz weg, erhält man den *Kalkül NM des natürlichen Schließens* für *minimale Logik*. *Kalkül NM*

Intuitionistische und minimale Logik sind Beispiele für nicht-klassische (philosophische) Logiken, die in dem Sinne schwächer sind als die klassische Logik, als dass in ihnen weniger logische Gesetze gelten als in der klassischen Logik. Es gilt: $\{A \mid \vdash_{\mathrm{NM}} A\} \subset \{A \mid \vdash_{\mathrm{NI}} A\} \subset \{A \mid \vdash_{\mathrm{NK}} A\}$.

(ii) Die in NK und NI ableitbaren Formeln $A \to (B \to A)$ (*ex quodlibet verum sequitur*) und $\neg A \to (A \to B)$ (*ex falso quodlibet sequitur*, bzw. *ex contradictione quodlibet sequitur*) werden als Paradoxien der Implikation aufgefasst. Betrachtet man deren Ableitungen

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1}{B \to A}\,(\to \mathrm{I})}{A \to (B \to A)}\,(\to \mathrm{I})^1 \qquad \text{und} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^1}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{B}\,(\bot)}{A \to B}\,(\to \mathrm{I})^1}{\neg A \to (A \to B)}\,(\to \mathrm{I})^2$$

so fällt auf, dass B in beiden Ableitungen beliebig gewählt werden kann. In der ersten Ableitung ist B in $B \to A$ in diesem Sinne nicht relevant für A, und in der zweiten Ableitung ist A in $A \to B$ nicht relevant für B.

Eine Logik, in der weder $A \to (B \to A)$ noch $\neg A \to (A \to B)$ gilt, bezeichnet man als *Relevanzlogik*.

(iii) Neben den logischen Regeln, also Regeln bei denen eine logische Konstante eingeführt oder beseitigt wird, spielen auch strukturelle Operationen eine Rolle.

In der Ableitung von $A \vee \neg A$ wurden zwei Vorkommen der Annahme $\neg(A \vee \neg A)$ bei einer Regelwendung gelöscht. Dies entspricht der strukturellen Operation der *Kontraktion*.

In der Ableitung von $A \to (B \to A)$ wurde von der Prämisse A zur Konklusion B übergegangen, ohne dabei eine Annahme B zu löschen. Dies entspricht der strukturellen Operation der *Verdünnung*.

Durch Einschränkungen bezüglich der strukturellen Operationen gelangt man zu *substrukturellen Logiken*.

Bemerkung. Für den Kalkül NK und die angegebene aussagenlogische Semantik gilt Korrektheit und Vollständigkeit:

(i) NK ist *korrekt*, d. h. es gilt: $\vdash_{\mathrm{NK}} A \implies \vDash A$.

(ii) NK ist außerdem *vollständig*, d. h. es gilt: $\vDash A \implies \vdash_{\mathrm{NK}} A$.

3 Modale Aussagenlogik

Literatur

- P. Blackburn, M. de Rijke & Y. Venema (2001), *Modal Logic*. Cambridge University Press.
- M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.
- R. Girle (2009), *Modal Logics and Philosophy*, 2nd edition. Durham: Acumen.
- G. E. Hughes & M. J. Cresswell (1996), *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge.

3.1 Vorbemerkungen

Modalitäten sind zusätzliche Bestimmungen bezüglich der Wahrheit von Aussagen. Sie legen der Wahrheit zusätzliche Eigenschaften bei. Beispiele für Modalitäten sind "notwendig" und "möglich", die man auch als *alethische* Modalitäten bezeichnet, da sie sich auf Wahrheit (griech. ἀλήθεια) beziehen. Andere Modalitäten sind die *temporalen*, z. B. "es war einmal der Fall, dass" oder "es wird immer der Fall sein, dass", die *deontischen*, die sich auf Rechte und Pflichten beziehen, wie z. B. "es sollte der Fall sein" oder "es ist verboten", und die *epistemischen* oder *doxastischen*, die sich auf Wissen, Glauben und Meinen beziehen, z. B. "man weiß, dass", "man glaubt, dass".

Am Beispiel der Aussagen "Jeder Gegenstand ist mit sich selbst identisch" (A) und "Tübingen liegt am Neckar" (B) haben wir gesehen (vgl. S. 10), dass "es ist notwendig, dass" kein wahrheitsfunktionaler Operator ist, der im Rahmen der aussagenlogischen Semantik behandelt werden könnte. Denn sowohl A als auch B sind wahr. Jedoch ist die Aussage "Es ist notwendig, dass A" wahr, während die Aussage "Es ist notwendig, dass B" falsch ist.

Zur Behandlung von Modalitäten werden deshalb mögliche Welten betrachtet. Sie werden dadurch charakterisiert, dass in ihnen Aussagen andere Wahrheitswerte haben als z. B. in der realen Welt. Eine Aussage wie "Es ist notwendig, dass B" ist dann wahr, wenn die Aussage B in jeder möglichen Welt wahr ist, andernfalls ist sie falsch. Entsprechend ist die Aussage "Es ist möglich, dass B" wahr, falls es mindestens eine mögliche Welt gibt, in der B wahr ist. In unserem Beispiel ist die Notwendigkeitsaussage falsch, da es mögliche Welten gibt, in denen B falsch ist (nämlich Welten, in denen Tübingen nicht am Neckar liegt). Die Möglichkeitsaussage ist jedoch wahr, da es eine Welt gibt, in der B wahr ist, nämlich die reale.

Für die Bewertungsfunktion h, die Aussagesymbolen Wahrheitswerte zuordnet, bedeutet dies, dass wir diese für jede mögliche Welt extra angeben müssen. Die Funktion h erhält also als zusätzliches Argument den Namen der Welt (z. B. u), für die wir den Wahrheitswert einer Aussage festlegen wollen, z. B. $h(p,u) = \mathrm{w}$ ("die Aussage p ist in der Welt u wahr").

Darüber hinaus möchte man bezüglich des Verhältnisses möglicher Welten zueinander gewisse Einschränkungen machen können. Zum Beispiel möchte man sagen können, dass nur solche möglichen Welten relevant sein sollen, in denen dieselben Naturgesetze gelten. Bei temporalen Modalitäten möchte man evtl. nur solche möglichen Welten betrachten, die zukünftige oder vergangene Situationen repräsentieren. Für die Semantik von Modaloperatoren bedeutet dies, dass im Allgemeinen noch eine Relation zwischen Welten berücksichtigt werden muss, die sogenannte Erreichbarkeitsrelation R. Ob eine

modallogische Aussage in einer bestimmten Welt wahr oder falsch ist, hängt dann auch von der Relation R ab.
Gegenüber der Semantik für die Aussagenlogik, die im wesentlichen auf der zweiwertigen Bewertungsfunktion $h(A)$ für $A \in \mathrm{AV}$ beruht, werden wir bei der Semantik für die Modallogik die folgenden drei Komponenten zu berücksichtigen haben: Mengen möglicher Welten W, erweiterte Bewertungsfunktionen $h(A, u)$ für $A \in \mathrm{AV}$ und $u \in W$, sowie Erreichbarkeitsrelationen R.

3.2 Syntax und Semantik der modalen Aussagenlogik

Definition 3.1 Wir erweitern das Alphabet der Aussagenlogik um die beiden *Modaloperatoren* $\Box$ ("Box") und $\Diamond$ ("Raute", "Diamant"), und erweitern die Definition von *Formeln* wie folgt:

Modaloperatoren

(i) Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Box A$ eine Formel.

(ii) Wenn A eine Formel ist, dann auch $\Diamond A$.

Bemerkung. Die *Bindungsstärke* von $\Box$ und $\Diamond$ ist gleich der Bindungsstärke von $\neg$. Die Modaloperatoren $\Box$ und $\Diamond$ binden also (wie $\neg$) stärker als $\wedge$ und $\vee$, die stärker binden als $\rightarrow$. (Die Formel mit Klammerersparnis $\Box A \rightarrow B$ steht also für die Formel $(\Box A \rightarrow B)$.)

Bindungsstärke

Bemerkung. Je nach intendierter Interpretation der Modaloperatoren sprechen wir z. B. auch von "notwendig A" bei $\Box A$ und von "möglich A" bei $\Diamond A$.

Definition 3.2 Gegeben sei eine nichtleere Menge W, deren Elemente "(mögliche) Welten", "(Referenz)punkte" oder "Zustände" genannt werden, und eine zweistellige Relation R auf W (d. h. $R \subseteq W \times W$), die wir "Erreichbarkeits-" oder "Zugänglichkeitsrelation" nennen. Das Paar $\langle W, R\rangle$ heißt *Rahmen*.

Rahmen

Bemerkung. Wir verwenden $u, v, \ldots$ als Namen für Welten. Falls u und v in Relation R zueinander stehen, schreiben wir uRv, lies: "v ist von u aus erreichbar" oder "u sieht v".

Definition 3.3 Wir erweitern aussagenlogische Bewertungen wie folgt: Eine *Bewertung h über W* ist eine Funktion, die jedem Aussagesymbol aus AV und jeder Welt in W einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, d. h. $h : \mathrm{AV} \times W \rightarrow \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$.

Bewertung

Definition 3.4 Ein (*aussagenlogisches modales*) *Modell* ist ein Tripel $\langle W, R, h\rangle$, bestehend aus einem Rahmen $\langle W, R\rangle$ und einer Bewertung h.

Modell

Definition 3.5 Sei $\mathfrak{M}$ das Modell $\langle W, R, h\rangle$. Wir definieren die Relation $\mathfrak{M}, u \vDash A$ ("*A gilt im Modell $\mathfrak{M}$ in der Welt $u \in W$*") wie folgt:

A gilt in $\mathfrak{M}$ in der Welt u

Für Aussagesymbole $A \in \mathrm{AV}$:

$$\langle W, R, h\rangle, u \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; h(A, u) = \mathrm{w}$$

(Entsprechend sei $\langle W, R, h\rangle, u \nvDash A \;:\Longleftrightarrow\; h(A, u) = \mathrm{f}$.)

Für die übrigen aussagenlogischen Formeln:

$$\mathfrak{M}, u \vDash \top$$
$$\mathfrak{M}, u \nvDash \bot$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}, u \vDash \neg A &:\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, u \nvDash A \\
\mathfrak{M}, u \vDash A \wedge B &:\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, u \vDash A \text{ und } \mathfrak{M}, u \vDash B \\
\mathfrak{M}, u \vDash A \vee B &:\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, u \vDash A \text{ oder } \mathfrak{M}, u \vDash B \\
\mathfrak{M}, u \vDash A \to B &:\Longleftrightarrow \mathfrak{M}, u \nvDash A \text{ oder } \mathfrak{M}, u \vDash B \\
&\Longleftrightarrow \text{Wenn } \mathfrak{M}, u \vDash A, \text{ dann } \mathfrak{M}, u \vDash B
\end{aligned}
$$

Für modallogische Formeln:

$$
\begin{aligned}
\langle W, R, h \rangle, u \vDash \Box A &:\Longleftrightarrow \text{Für alle } v \in W\text{: wenn } uRv, \text{ dann } \langle W, R, h \rangle, v \vDash A \\
\langle W, R, h \rangle, u \vDash \Diamond A &:\Longleftrightarrow \text{Es gibt } v \in W\text{: } uRv \text{ und } \langle W, R, h \rangle, v \vDash A
\end{aligned}
$$

Bemerkung. In der Semantik der Aussagenlogik mussten lediglich Bewertungen von Aussagesymbolen betrachtet werden. Durch jede solche Bewertung ist für jede komplexe aussagenlogische Formel ein Wahrheitswert festgelegt. Jede Bewertung der Aussagesymbole in (einer Zeile) einer Wahrheitstafel legt in diesem Sinne ein Modell fest. Der Wahrheitswert einer komplexen Formel ist eine Funktion allein der Wahrheitswerte der in ihr vorkommenden Teilformeln. Die aussagenlogische Semantik ist also wahrheitsfunktional.
In der eben angegebenen Semantik für die aussagenlogische Modallogik ist dies nicht mehr der Fall. Es genügt nicht mehr die bloße Angabe von Bewertungen $h(A)$ für jedes Aussagesymbol A, sondern es muss für jede Welt $u \in W$ und für jedes Aussagesymbol A eine Bewertung $h(A, u)$ angegeben werden. Darüber hinaus geht auch noch die Relation R mit ein.

Bemerkung. Für ein gegebenes Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$ schreiben wir auch $|\mathfrak{M}|$, um die Menge W zu bezeichnen.

Definition 3.6 Wir definieren

Gültigkeit im Modell: *Gültigkeit im Modell*

$$\mathfrak{M} \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } u \in |\mathfrak{M}|\text{: } \mathfrak{M}, u \vDash A$$

Gültigkeit im Rahmen: *Gültigkeit im Rahmen*

$$\langle W, R \rangle \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle Bewertungen } h\text{: } \langle W, R, h \rangle \vDash A$$

Allgemeingültigkeit: *Allgemeingültigkeit*

$$
\begin{aligned}
\vDash A &:\Longleftrightarrow \text{Für alle Rahmen } \langle W, R \rangle\text{: } \langle W, R \rangle \vDash A \\
&\Longleftrightarrow \text{Für alle Modelle } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \vDash A
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Modelle $\langle W, R, h \rangle$ können auch diagrammatisch angegeben werden. Welten $u \in W$ schreiben wir dann als Kästchen $\boxed{u}$. Ist $\langle u, v \rangle \in R$, d. h. gilt uRv, dann zeichnen wir einen Pfeil von $\boxed{u}$ nach $\boxed{v}$, also $\boxed{u} \xrightarrow{R} \boxed{v}$ (wobei die Beschriftung "R" auch weggelassen werden kann). Welche Aussagesymbole in den Welten $u \in W$ gemäß der Bewertung h gelten, notieren wir bei den Kästchen für die jeweiligen Welten; ist z. B. $h(p, u) = \mathrm{w}$, dann schreiben wir $\boxed{u} \vDash p$. Wir notieren bei einer Welt u lediglich alle Aussagesymbole, die in dieser Welt gelten; für alle nicht notierten Aussagesymbole $A \in \mathrm{AV}$ gilt $h(A, u) = \mathrm{f}$.

Beispiel. Wir betrachten das Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$, wobei $W = \{u, v\}$, $R = \{\langle u, v \rangle\}$ (d. h. uRv) und $h(A, u) = \mathrm{f}$ für alle $A \in \mathrm{AV}$, $h(p, v) = \mathrm{w}$, und $h(A, v) = \mathrm{f}$ für alle $A \in \mathrm{AV} \setminus \{p\}$. Diagramm für $\mathfrak{M}$:

$$\boxed{u} \xrightarrow{R} \boxed{v} \models p$$

Gilt $\Box p \to p$ im Modell $\mathfrak{M}$ in der Welt u? Das heißt, ist $\mathfrak{M}, u \models \Box p \to p$? Es ist

$$\mathfrak{M}, u \models \Box p \to p \iff \mathfrak{M}, u \not\models \Box p \text{ oder } \mathfrak{M}, u \models p$$

Wegen $h(p, u) = \mathrm{f}$ gilt $\mathfrak{M}, u \not\models p$, und damit

$$\mathfrak{M}, u \models \Box p \to p \iff \mathfrak{M}, u \not\models \Box p$$

$\mathfrak{M}, u \not\models \Box p$ gilt genau dann, wenn nicht in allen von u aus erreichbaren Welten p gilt; d. h. wenn es mindestens eine von u aus erreichbare Welt v gibt, in der p nicht gilt. Es ist also (für unser konkretes Modell $\mathfrak{M}$)

$$\mathfrak{M}, u \models \Box p \to p \iff \text{Es gibt } w \in W\text{: } uRw \text{ und } \mathfrak{M}, w \not\models p$$

In $\mathfrak{M}$ ist jedoch v die einzige von u aus erreichbare Welt, und in v gilt p. Die rechte Seite ist also falsch: es gibt keine von u aus erreichbare Welt, in der p nicht gilt. Also ist $\mathfrak{M}, u \not\models \Box p \to p$, d. h. $\Box p \to p$ gilt im Modell $\mathfrak{M}$ in der Welt u *nicht*.
Folglich ist $\Box p \to p$ auch nicht gültig im Modell $\mathfrak{M}$ (es gilt $\mathfrak{M} \not\models \Box p \to p$), und somit auch nicht allgemeingültig (es gilt $\not\models \Box p \to p$).

Nun modifizieren wir das Modell $\mathfrak{M}$, indem wir R zu $R' = \{\langle u, u \rangle, \langle u, v \rangle\}$ erweitern; es ist nun also $uR'u$ und $uR'v$. Das resultierende Modell heiße $\mathfrak{M}'$. Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \boxed{u} \arrow[loop left, "R'"] \arrow[r, "R'"] & \boxed{v} \models p \end{tikzcd}$$

Gilt $\mathfrak{M}', u \models \Box p \to p$? Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}', u \models \Box p \to p &\iff \mathfrak{M}', u \not\models \Box p \text{ oder } \mathfrak{M}', u \models p \\ &\iff \mathfrak{M}', u \not\models \Box p \\ &\iff \text{Es gibt } w \in W\text{: } uR'w \text{ und } \mathfrak{M}', w \not\models p \end{aligned}$$

Nun ist die rechte Seite wahr, denn für u $(= w)$ gilt $uR'u$ und $\mathfrak{M}', u \not\models p$. Es ist also $\mathfrak{M}', u \models \Box p \to p$.
Gilt auch $\mathfrak{M}' \models \Box p \to p$? Dazu müssen wir noch überprüfen, ob $\mathfrak{M}', v \models \Box p \to p$ gilt. Es ist

$$\mathfrak{M}', v \models \Box p \to p \iff \mathfrak{M}', v \not\models \Box p \text{ oder } \mathfrak{M}', v \models p$$

$\mathfrak{M}', v \not\models \Box p$ ist falsch, da es keine von v aus erreichbare Welt gibt, in der p nicht gilt. $\mathfrak{M}', v \models p$ ist jedoch wahr, da $h(p, v) = \mathrm{w}$. Also gilt auch $\mathfrak{M}', v \models \Box p \to p$. Damit gilt für alle $w \in |\mathfrak{M}'|$: $\mathfrak{M}', w \models \Box p \to p$, d. h. $\mathfrak{M}' \models \Box p \to p$.

Wie schon festgestellt, ist $\Box p \to p$ jedoch nicht allgemeingültig, da $\Box p \to p$ nicht in jedem Modell gültig ist; $\mathfrak{M}$ ist ein Gegenbeispiel.

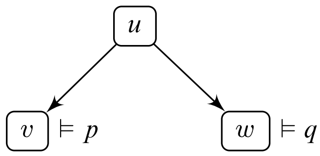
Bemerkung. Ist ein Modell $\mathfrak{M}$ ein Gegenbeispiel für die Gültigkeit einer Formel A, so bezeichnen wir $\mathfrak{M}$ auch als *Gegenmodell* für A.

Bemerkung. Ist von einer Welt aus keine (andere oder dieselbe) Welt erreichbar (führen im Diagramm also aus einer Welt keine Pfeile heraus), so ist in dieser Welt jede Aussage der Form $\Box A$ gültig. Es ist

$$\mathfrak{M}, u \vDash \Box A \iff \text{Für alle } v \in W\text{: wenn } uRv\text{, dann } \mathfrak{M}, v \vDash A$$

Für eine "Sackgasse" u gilt jedoch für alle $v \in W$, dass $\langle u, v\rangle \notin R$, d. h. dass uRv falsch ist, und somit die rechte Seite wahr ist.
Insbesondere gilt für solche Welten u auch $\mathfrak{M}, u \vDash \Box\bot$. Ist $R = \emptyset$, gilt sogar $\mathfrak{M} \vDash \Box\bot$.

Beispiel. Ist die Formel $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ allgemeingültig?
Wir betrachten das Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h\rangle$, wobei $W = \{u, v, w\}$, $R = \{\langle u, v\rangle, \langle u, w\rangle\}$ (d. h. uRv und uRw) und $h(p, u) = \text{w}$, $h(q, w) = \text{w}$; für alle übrigen Aussagesymbole sei $h = \text{f}$ für alle Welten. Als Diagramm:



Es gilt $\mathfrak{M}, u \vDash \Box(p \vee q)$, denn mit $\mathfrak{M}, v \vDash p$ gilt wegen

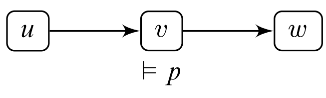
$$\mathfrak{M}, v \vDash p \vee q \iff \mathfrak{M}, v \vDash p \text{ oder } \mathfrak{M}, v \vDash q$$

auch $\mathfrak{M}, v \vDash p \vee q$, mit $\mathfrak{M}, w \vDash q$ entsprechend $\mathfrak{M}, w \vDash p \vee q$, und v und w sind alle von u aus erreichbaren Welten.
Jedoch gilt $\Box p \vee \Box q$ in u nicht. Es ist $\mathfrak{M}, u \nvDash \Box p$, da $\mathfrak{M}, w \nvDash p$, und $\mathfrak{M}, u \nvDash \Box q$, da $\mathfrak{M}, v \nvDash q$.
Wegen

$$\mathfrak{M}, u \vDash \Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q) \iff \mathfrak{M}, u \nvDash \Box(p \vee q) \text{ oder } \mathfrak{M}, u \vDash \Box p \vee \Box q$$

ist somit $\mathfrak{M}, u \nvDash \Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$. Folglich ist die Formel nicht gültig in $\mathfrak{M}$ und daher auch nicht allgemeingültig.

Beispiel. Das Modell



ist ein Gegenbeispiel für $\Box p \to \Box\Box p$.
In u gilt $\Box p$, da u nur v sieht, wo p gilt. In u gilt aber nicht $\Box\Box p$, da dafür $\Box p$ in v gelten müsste. Dazu müsste jedoch p in w gelten. Da dies nicht der Fall ist, kann $\Box p \to \Box\Box p$ nicht in u gelten.

Bemerkung. Aus uRv und vRw folgt *nicht* uRw. Diagrammatisch:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] & v \arrow[r] & w \end{tikzcd} \quad \not\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} u \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & v \arrow[r] & w \end{tikzcd}$$

Im linken Modell ist $R = \{\langle u, v\rangle, \langle v, w\rangle\}$, im rechten ist $R = \{\langle u, v\rangle, \langle u, w\rangle, \langle v, w\rangle\}$.

In den bisherigen Beispielen haben wir nur Formeln betrachtet, für die wir durch Angabe geeigneter Modelle nachweisen konnten, dass sie *nicht* gültig sind. Im folgenden Beispiel zeigen wir nun die Allgemeingültigkeit einer Formel.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass $\models \Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$. Dazu müssen wir nachweisen, dass $\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$ in jedem Modell in jeder Welt gültig ist.
Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R, h\rangle$ ein Modell, wobei $u \in W$. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{M}, u \models \Box(p \wedge q)$. Sei w eine beliebige Welt in W, für die uRw gilt. Mit der Annahme $\mathfrak{M}, u \models \Box(p \wedge q)$ folgt dann $\mathfrak{M}, w \models p \wedge q$, und wegen

$$\mathfrak{M}, w \models p \wedge q \iff \mathfrak{M}, w \models p \text{ und } \mathfrak{M}, w \models q$$

$\mathfrak{M}, w \models p$ und $\mathfrak{M}, w \models q$. Da w beliebig, gilt dies für alle von u aus erreichbaren Welten. Somit gilt in u auch $\Box p$ und $\Box q$. Daraus folgt $\mathfrak{M}, u \models \Box p \wedge \Box q$, und schließlich $\mathfrak{M}, u \models \Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$, für beliebige u und $\mathfrak{M}$. Folglich $\models \Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$.

Theorem 3.7 *Die Modallogik ist eine konservative Erweiterung der Aussagenlogik. Das heißt, es gilt für alle Formeln A, in denen keine Modaloperatoren vorkommen, dass A aussagenlogisch allgemeingültig ist genau dann, wenn A modallogisch allgemeingültig ist.*

Beweis. Übungsaufgabe. Hinweis: Sei h eine modallogische Bewertung. Sei $h_u(A) := h(A, u)$ (für $A \in \mathrm{AV}$). Dann gilt: $h_u \models A \iff \langle W, R, h\rangle, u \models A$, falls A keine Modaloperatoren enthält. QED

3.3 Logische Folgerung

In der Aussagenlogik haben wir logische Folgerung wie folgt definiert:

$$\Gamma \models A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle Bewertungen } h\text{: wenn } h \models \Gamma, \text{ dann } h \models A$$

Mit anderen Worten, eine Formel A folgt logisch aus einer Menge von Formeln Γ genau dann, wenn in jedem Modell, in dem die Prämissen Γ gelten, auch die Konklusion A gilt.

In der Modallogik stellt sich die Frage, welchen Gültigkeitsbegriff man für die logische Folgerungsbeziehung zugrunde legen möchte:

(i) Legt man Gültigkeit im Modell $\mathfrak{M}$ in der Welt u (d. h. "$\mathfrak{M}, u \models A$") zugrunde, so lautet die Definition der logischen Folgerung

$$\Gamma \models^l A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Wenn } \mathfrak{M}, u \models \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M}, u \models A$$

Diesen Begriff der logischen Folgerung nennt man *lokal*, da logische Folgerung hier punkt- bzw. weltenweise definiert wird. *lokale logische Folgerung*

(ii) Legt man Gültigkeit im Modell $\mathfrak{M}$ zugrunde, dann wird logische Folgerung definiert durch

$$\Gamma \models^g A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Wenn } \mathfrak{M} \models \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M} \models A$$

Diesen Begriff nennt man *globale logische Folgerung*. *globale logische Folgerung*

Die beiden Begriffe sind offensichtlich nicht äquivalent.

- Für (ii) gilt z. B. $p \vDash^g \Box p$: Angenommen $\mathfrak{M} \vDash p$, d. h. für alle $u \in |\mathfrak{M}|$ gilt $h(p,u) = \mathrm{w}$. Seien v, w beliebige Welten in $|\mathfrak{M}|$, wobei $v = w$ sein kann. Es ist entweder $\langle v, w\rangle \in R$ oder $\langle v, w\rangle \notin R$. Im ersten Fall gilt $\mathfrak{M}, v \vDash \Box p$, da p in jeder Welt w gilt. Im zweiten Fall gilt ebenfalls $\mathfrak{M}, v \vDash \Box p$, da v dann eine "Sackgasse" ist. Es gilt also $\mathfrak{M} \vDash p \implies \mathfrak{M} \vDash \Box p$.
- Für (i) gilt jedoch $p \nvDash^l \Box p$, denn im Modell

$$\begin{array}{ccc} \boxed{u} & \xrightarrow{R} & \boxed{v} \\ \vDash p & & \end{array}$$

ist $\mathfrak{M}, u \vDash p$, aber $\mathfrak{M}, u \nvDash \Box p$, also $\mathfrak{M}, u \vDash p \;\not\Longrightarrow\; \mathfrak{M}, u \vDash \Box p$.

Wir interessieren uns im Weiteren hauptsächlich für den *lokalen* logischen Folgerungsbegriff (i) und verwenden daher die folgende Definition (ohne den Index ^{l}).

Definition 3.8 Aus Γ *folgt (modal-)logisch* A (formal: $\Gamma \vDash A$), falls in jedem Modell $\mathfrak{M}$ und in jeder Welt u, in der Γ gilt, auch A gilt. Das heißt: *logische Folgerung*

$$\Gamma \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Wenn } \mathfrak{M}, u \vDash \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M}, u \vDash A$$

Zwei Formeln A und B sind *logisch äquivalent*, wenn B aus A und A aus B logisch folgt: *logisch äquivalent*

$$A \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} B \;:\Longleftrightarrow\; A \vDash B \text{ und } B \vDash A$$

Bemerkung. Es gilt $\Box A \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} \neg\Diamond\neg A$ und $\Diamond A \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} \neg\Box\neg A$. Per Definition $\Box A := \neg\Diamond\neg A$ oder $\Diamond A := \neg\Box\neg A$ kann somit auf einen der beiden Modaloperatoren verzichtet werden, ohne dadurch die Ausdrucksstärke der Sprache der Modallogik einzuschränken.

Viele Eigenschaften der aussagenlogischen Folgerung gelten auch für die modallogische Folgerung; z. B. Monotonie und Kompaktheit:

Theorem 3.9 *Die Folgerungsrelation ist monoton, d. h. wenn $\Gamma \vDash A$, dann gilt für $\Gamma' \supseteq \Gamma$ auch $\Gamma' \vDash A$.*

Theorem 3.10 *Die Folgerungsrelation ist kompakt, d. h. wenn $\Gamma \vDash A$, dann gibt es eine endliche Menge $\Gamma' \subseteq \Gamma$, so dass $\Gamma' \vDash A$.*

Das Import-Export-Theorem gilt ebenfalls:

Theorem 3.11 $\Gamma, A \vDash B \iff \Gamma \vDash A \to B$.

Das Theorem gilt jedoch *nicht* für den *globalen* logischen Folgerungsbegriff. Für diesen gilt jedoch mit $\Box^n A := \underbrace{\Box \ldots \Box}_{n\text{-mal}} A$:

Theorem 3.12 $\Gamma, A \vDash B \iff$ *Es gibt ein n, so dass $\Gamma \vDash (\Box^0 A \wedge \Box^1 A \wedge \ldots \wedge \Box^n A) \to B$.*

3.4 Einige Standardmodallogiken

Bisher haben wir lediglich *eine* Modallogik semantisch spezifiziert. In ihr sind genau jene Formeln allgemeingültig, die in allen Rahmen $\langle W, R\rangle$ gültig sind. Durch geeignete Einschränkungen bezüglich der Rahmen, und insbesondere der Erreichbarkeitsrelation R, können verschiedene Modallogiken charakterisiert werden. Im Folgenden betrachten wir einige Standardmodallogiken.

Definition 3.13 Ein Modell $\mathfrak{M}$ *beruht auf* einem Rahmen $\langle W, R\rangle$, falls $\mathfrak{M} = \langle W, R, h\rangle$. *$\mathfrak{M}$ beruht auf Rahmen*

Definition 3.14 Ein Rahmen $\langle W, R\rangle$ *hat eine Relationseigenschaft*, falls die Erreichbarkeitsrelation R sie hat. Ein Rahmen $\langle W, R\rangle$ ist *$\langle W, R\rangle$ hat Relationseigenschaft*

(i) *reflexiv*, falls für alle $u \in W$: uRu,

(ii) *symmetrisch*, falls für alle $u, v \in W$: wenn uRv, dann vRu,

(iii) *transitiv*, falls für alle $u, v, w \in W$: wenn uRv und vRw, dann uRw,

(iv) *seriell*, falls es für alle $u \in W$ ein $v \in W$ gibt, so dass uRv.

Ist ein Rahmen reflexiv, symmetrisch und transitiv, so heißt er *Äquivalenzrahmen*. *Äquivalenzrahmen*

Definition 3.15 Gültigkeit im Rahmen hatten wir wie folgt definiert:

$$\langle W, R\rangle \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle Bewertungen } h\text{: } \langle W, R, h\rangle \vDash A$$

Das heißt, eine Formel A ist gültig in einem Rahmen $\langle W, R\rangle$, falls A in jedem Modell $\langle W, R, h\rangle$ gültig ist, das auf dem Rahmen $\langle W, R\rangle$ beruht.
Sei S eine Klasse von Rahmen. Eine Formel A ist *S-gültig*, falls A in jedem Rahmen in S gültig ist. *S-gültig*
Ist S eine Klasse von Rahmen mit Relationseigenschaft s und $\mathfrak{M}_S$ ein Modell, das auf einem Rahmen in S beruht, so ist durch

$$\Gamma \vDash_s A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } \mathfrak{M}_S \text{ und alle } u \in |\mathfrak{M}_S|\text{: Wenn } \mathfrak{M}_S, u \vDash \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{M}_S, u \vDash A$$

eine logische Folgerungsrelation definiert.

Bemerkung. Wir schreiben z. B. $\Gamma \vDash_{\text{refl}} A$, um auszudrücken, dass A für reflexive Rahmen aus Γ logisch folgt, oder $\Gamma \vDash_{\text{äq}} A$, um zu sagen, dass A für Äquivalenzrahmen aus Γ folgt.

Bestimmte Rahmeneigenschaften können durch modallogische Formeln charakterisiert werden. Umgekehrt können bestimmte S-gültige Formeln durch Rahmeneigenschaften s charakterisiert werden.

Beispiele. (i) $\langle W, R\rangle \vDash \Box A \to A \implies R$ reflexiv.

Angenommen, R ist nicht reflexiv. Dann gibt es $u \in W$, so dass nicht uRu. Dann ist jedoch

$$\boxed{u} \xrightarrow{R} \boxed{v} \vDash p$$

ein Gegenbeispiel für $\langle W, R\rangle \vDash \Box A \to A$. Also gilt die Behauptung.

(ii) $\langle W, R \rangle \vDash \Box A \to \Box\Box A \implies R$ transitiv.

Angenommen, R ist nicht transitiv. Dann gibt es $u, v, w \in W$, so dass uRv und vRw, aber nicht uRw. Setze $h(p, v) = \mathrm{w}$, $h(p, w) = \mathrm{f}$ und für die restlichen Aussagesymbole in allen Welten den Wert w. Dann gilt $\langle W, R, h \rangle, u \vDash \Box p$, aber $\langle W, R, h \rangle, u \nvDash \Box\Box p$. Widerspruch. Also gilt die Behauptung.

Die Umkehrungen gelten ebenfalls.

Theorem 3.16 *Es gilt:*

(i) $\langle W, R \rangle \vDash \Box A \to A \iff R$ *reflexiv,*

(ii) $\langle W, R \rangle \vDash A \to \Box\Diamond A \iff R$ *symmetrisch,*

(iii) $\langle W, R \rangle \vDash \Box A \to \Box\Box A \iff R$ *transitiv,*

(iv) $\langle W, R \rangle \vDash \Diamond A \to \Box\Diamond A \iff R$ *euklidisch (wobei eine Relation* R *euklidisch heißt, falls mit* uRv *und* uRw *auch* vRw *gilt).*

Beweis. Übungsaufgabe. QED

Durch Klassen S von Rahmen können Mengen S-gültiger Formeln, d. h. Logiken, charakterisiert werden. Einige Standardmodallogiken sind:

Logik	*Rahmeneigenschaften*
K	keine
D	seriell
T	reflexiv
B	reflexiv und symmetrisch
K4	transitiv
S4	reflexiv und transitiv
S5	reflexiv, symmetrisch und transitiv

Bemerkung. Die Buchstaben K, D, T usw. werden nicht nur als Namen für die jeweilige Logik verwendet, sondern auch um die entsprechenden Klassen von Rahmen zu bezeichnen. Man spricht dann z. B. von S5-Rahmen, um die Klasse aller Äquivalenzrahmen zu bezeichnen.
Eine Logik kann allerdings auch durch verschiedene Klassen von Rahmen charakterisiert sein. Ein Beispiel ist die Logik S5, die nicht nur durch Äquivalenzrahmen charakterisiert ist, sondern auch durch die Klasse der universellen Rahmen $\langle W, R \rangle$, in denen uRv für alle $u, v \in W$ gilt; in einem universellen Rahmen sieht also jede Welt alle Welten. Äquivalenzrahmen und universelle Rahmen induzieren verschiedene Arten von Modellen, charakterisieren aber dennoch beide die Logik S5.

Bisher haben wir lediglich die Logik K betrachtet, da wir Allgemeingültigkeit durch Gültigkeit in *allen* Rahmen definiert haben, also keinerlei Einschränkungen bezüglich der Erreichbarkeitsrelation vorgenommen haben.
K ist die stärkste Modallogik insofern, als dass K-gültige Formeln nicht nur in allen Rahmen mit einer bestimmten Rahmeneigenschaft gelten müssen, sondern in allen Rahmen überhaupt. Die Menge der K-gültigen Formeln ist also eine Teilmenge jeder anderen Menge S-gültiger Formeln (in diesem Sinne ist K die schwächste Modallogik).

Bemerkungen. (i) Es ist $\not\models_{\mathrm{K}} \Box p \to \Box\Box p$ (siehe Gegenbeispiel auf S. 17).

Es gilt jedoch $\models_{\mathrm{K4}} \Box p \to \Box\Box p$. Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R, h\rangle$ ein Modell, das auf einem transitiven Rahmen beruht. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{M}, u \models \Box p \to \Box\Box p$ für alle $u \in W$. Angenommen $\mathfrak{M}, u \models \Box p$. Um nun $\mathfrak{M}, u \models \Box\Box p$ zu zeigen, zeigen wir für eine beliebige Welt $v \in W$ mit uRv, dass $\mathfrak{M}, v \models \Box p$. Dazu zeigen wir für eine beliebige Welt $w \in W$ mit vRw, dass $\mathfrak{M}, w \models p$. Nun haben wir uRv und vRw, woraus aufgrund Transitivität von R folgt, dass uRw. Nach Annahme ist $\mathfrak{M}, u \models \Box p$; wegen uRw muss dann $\mathfrak{M}, w \models p$ gelten.

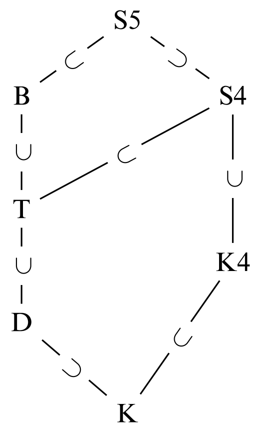
Da alle K-gültigen Formeln auch K4-gültig sind, ist somit K4 eine echte Erweiterung von K. Die Formel $\Box p \to \Box\Box p$ ist auch S4- und S5-gültig, da S4 und S5 auch die Rahmeneigenschaft der Transitivität haben.

(ii) Jede K4-gültige Formel ist auch S4-gültig, da jede in einem transitiven Rahmen gültige Formel auch in einem Rahmen gilt, der transitiv und reflexiv ist. K4 ist also eine Teilmenge von S4.

(iii) Entsprechend sind B und S4 Teilmengen von S5, und T ist eine Teilmenge von S4.

(iv) Da jeder reflexive Rahmen auch seriell ist, ist D eine Teilmenge von T. Obgleich nicht jeder serielle Rahmen auch reflexiv ist, könnte es dennoch sein, dass auch T eine Teilmenge von D ist, die beiden Logiken D und T also gleich sind (vgl. den Fall zweier Charakterisierungen von S5). Dies ist hier jedoch nicht der Fall: $\Box p \to p$ ist ein Beispiel für eine T-gültige Formel, die nicht D-gültig ist.

Unter Hinzunahme weiterer Überlegungen ergibt sich folgendes Bild:



(Es sind alle Teilmengenbeziehungen angegeben, die zwischen den betrachteten Logiken bestehen.)

3.5 Modallogische Hilberttypkalküle

Neben der semantischen Spezifizierung von Modallogiken können diese auch axiomatisch durch Hilberttypkalküle angegeben werden. Wir verwenden $\Box$ als Grundzeichen und definieren $\Diamond A := \neg\Box\neg A$.

Definition 3.17 Der *Hilberttypkalkül für* K ist gegeben durch: *Hilberttypkalkül für* K

Axiome:

– Alle aussagenlogischen Tautologien, sowie deren modallogische Substitutionsinstanzen.

– Axiomenschema K: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Regeln:

Modus Ponens: $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ Nezessitation: $\dfrac{A}{\Box A}$

Bemerkungen. (i) Mit der aussagenlogischen Tautologie $A \vee \neg A$ ist z. B. auch $\Box\Diamond A \vee \neg\Box\Diamond A$ ein Axiom, da Letzteres eine modallogische Substitutionsinstanz (d. h., eine Substitutionsinstanz in der Sprache der Modallogik) der aussagenlogischen Tautologie ist.

(ii) Die aussagenlogischen Tautologien haben wir bisher nur semantisch bestimmt (vgl. Definition 2.7). Dem Kalkül scheint deshalb ein semantischer Begriff zugrunde zu liegen. Hier wollen wir jedoch voraussetzen, dass die aussagenlogischen Tautologien axiomatisch bestimmt sind, z. B. durch folgende Axiomenschemata:

$$\begin{cases} A \to (B \to (A \wedge B)) \\ (A \wedge B) \to A \\ (A \wedge B) \to B \end{cases} \qquad \begin{cases} A \to (A \vee B) \\ B \to (A \vee B) \\ (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \to (B \to A) \\ (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)) \end{cases} \qquad \begin{cases} (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) \\ \neg\neg A \to A \end{cases}$$

(iii) Die Nezessitationsregel darf nicht mit der (nicht allgemeingültigen) Formel $A \to \Box A$ verwechselt werden. Um die Regel anwenden zu können, muss die Prämisse A im Kalkül erzeugt worden sein. Die Prämisse kann also nicht wie in $A \to \Box A$ eine beliebige Formel sein. Man überzeugt sich leicht, dass z. B. Aussagesymbole nicht als Prämisse der Nezessitationsregel vorkommen können.

Definition 3.18 Eine *Ableitung* ist eine endliche Folge von Formeln, die entweder Axiome oder durch Regeln erzeugte Formeln sind. *Ableitung*

Bemerkung. Der Kalkül kann um sogenannte *abgeleitete Regeln* erweitert werden, durch die Ableitungen verkürzt werden können. *abgeleitete Regel*

Beispiel. Die Regularitätsregel

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

ist eine abgeleitete Regel, denn jede Anwendung dieser Regel in einer Ableitung kann durch folgende (Teil-) Ableitung ersetzt werden:

$k.$	$A \to B$	Formel in Ableitung
$l.$	$\Box(A \to B)$	Nezessitation auf Zeile k
$m.$	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$	Axiom K
$n.$	$\Box A \to \Box B$	Modus Ponens auf Zeilen l und m

Bemerkung. Eine Ableitung besteht nur aus Formeln. Wir verwenden zusätzlich Zeilennummern und Kommentare, die aber nicht zur eigentlichen Ableitung gehören.

Beispiel. Wir geben eine Ableitung in K von $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$ an:

1.	$(A \wedge B) \to A$	Axiom
2.	$\Box(A \wedge B) \to \Box A$	Regularität auf 1
3.	$(A \wedge B) \to B$	Axiom
4.	$\Box(A \wedge B) \to \Box B$	Regularität auf 3
5.	$(\Box(A \wedge B) \to \Box A) \to ((\Box(A \wedge B) \to \Box B) \to (\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)))$	Axiom
6.	$(\Box(A \wedge B) \to \Box B) \to (\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$	Modus Ponens auf 2 und 5
7.	$\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$	Modus Ponens auf 4 und 6

In Zeile 5 haben wir eine modallogische Substitutionsinstanz der aussagenlogischen Tautologie $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$ verwendet.

Beispiele. (i) Eine Ableitung in K von $\Box A \to \neg\Diamond\neg A$ ist:

1.	$A \to \neg\neg A$	Axiom
2.	$\Box A \to \Box\neg\neg A$	Regularität auf 1 $\lceil$Axiom
3.	$(\Box A \to \Box\neg\neg A) \to ((\Box A \to (\Box\neg\neg A \to \neg\neg\Box\neg\neg A)) \to (\Box A \to \neg\neg\Box\neg\neg A))$	
4.	$(\Box A \to (\Box\neg\neg A \to \neg\neg\Box\neg\neg A)) \to (\Box A \to \neg\neg\Box\neg\neg A)$	Mod. Ponens auf 2, 3
5.	$\Box A \to (\Box\neg\neg A \to \neg\neg\Box\neg\neg A)$	Axiom
6.	$\Box A \to \neg\neg\Box\neg\neg A$	Modus Ponens auf 4 und 5
7.	$\Box A \to \neg\Diamond\neg A$	Definition von $\Diamond$ auf 6

Zeile 3 ist eine Instanz des Axiomenschemas $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$.

(ii) Mit diesem Schema erhalten wir auch die Schnittregel

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$

als abgeleitete Regel:

i.	$A \to B$	Formel in Ableitung
j.	$B \to C$	Formel in Ableitung
k.	$(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$	Axiom
l.	$(A \to (B \to C)) \to (A \to C)$	Modus Ponens auf i und k
m.	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	Axiom
n.	$A \to (B \to C)$	Modus Ponens auf j und m
o.	$A \to C$	Modus Ponens auf l und n

(iii) Unter Verwendung der Schnittregel geben wir eine Ableitung von $\neg\Diamond\neg A \to \Box A$ in K an:

1.	$\neg\neg\Box\neg\neg A \to \Box\neg\neg A$	Axiom
2.	$\neg\neg A \to A$	Axiom
3.	$\Box\neg\neg A \to \Box A$	Regularität auf 2
4.	$\neg\neg\Box\neg\neg A \to \Box A$	Schnitt auf 1 und 3
5.	$\neg\Diamond\neg A \to \Box A$	Definition von $\Diamond$ auf 4

(iv) Wir sagen, dass $A \leftrightarrow B$ eine Ableitung hat, falls $A \to B$ und $B \to A$ Ableitungen haben. Mit den Ableitungen von $\Box A \to \neg\Diamond\neg A$ und $\neg\Diamond\neg A \to \Box A$ hat somit auch $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ eine Ableitung.

Neben der Verwendung abgeleiteter Regeln können Ableitungen auch durch Verwendung des folgenden Ersetzungstheorems abgekürzt werden:

Theorem 3.19 *Sei A eine Teilformel von B, und sei die Formel B' das Resultat einer Ersetzung von A in B durch eine Formel A'. Wenn $A \leftrightarrow A'$ eine Ableitung hat, dann hat auch $B \leftrightarrow B'$ eine Ableitung.*

Beweis. Übungsaufgabe. QED

Hilberttypkalküle für andere Standardmodallogiken lassen sich einfach durch Hinzunahme weiterer Axiomenschemata angeben. Wir verwenden:

Name	*Axiomenschema*
D	$\Box A \to \Diamond A$
T	$\Box A \to A$
B	$A \to \Box\Diamond A$
4	$\Box A \to \Box\Box A$
5	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$

Man erhält:

Logik	*zusätzliche Axiomenschemata*
D	D
T	T
B	T, B
K4	4
S4	$T, 4$
S5	$T, 5$ oder $T, B, 4$

Definition 3.20 Alle Erweiterungen von K (einschließlich K) bezeichnet man als *normale Modallogiken*. *normale Modallogiken*

Bemerkung. Ein Beispiel für eine *nicht-normale* Modallogik erhält man ausgehend vom Kalkül für K dadurch, dass man in ihm das Axiomenschema K weglässt und die Regularitätsregel hinzufügt.
(Nicht-normale Modallogiken werden z. B. in Girle (2009), Hughes & Cresswell (1996) und Priest (2008) behandelt.)

Durch die jeweiligen Kalküle für die Logiken S werden Ableitbarkeitsrelationen $\vdash_S$ induziert.

Definition 3.21 Für die *Ableitbarkeit* von A aus Annahmen Γ in einem Hilberttypkalkül für S legen wir fest: *Ableitbarkeit*

$$\Gamma \vdash_S A \;:\Longleftrightarrow\; \vdash_S \bigwedge\!\!\!\!\bigwedge \Gamma' \to A$$

für endliche $\Gamma' \subseteq \Gamma$, wobei $\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge \Gamma' := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$ für $B_i \in \Gamma'$.

Für diese Ableitbarkeitsrelationen $\vdash_S$ kann man zeigen, dass sie mit den jeweiligen Folgerungsrelationen $\vDash_S$ übereinstimmen, d. h. dass die Spezifizierung einer Modallogik durch den jeweiligen Kalkül mit deren semantischer Spezifizierung übereinstimmt.

Mit anderen Worten, man kann zeigen, dass Korrektheit und Vollständigkeit gilt: $\Gamma \vdash_S A \iff \Gamma \vDash_S A$.

3.6 Exkurs zur Temporallogik

Literatur

– R. Goldblatt (1992), *Logics of Time and Computation*, 2nd edition. Stanford: CSLI Publications.

Wir betrachten den Satz

> Lea schreibt.

Wenn Aussagen stets einen zeitunabhängigen Wahrheitswert haben sollen, dann kann der Satz keine Aussage sein. Denn Lea schreibt nicht zu jeder Zeit. Der Satz ist also abhängig vom Zeitpunkt seiner Äußerung wahr oder falsch.
Um einen zeitunabhängigen Wahrheitswert zu erhalten, können wir einen Zeitindex t anbringen:

> Lea schreibt *zur Zeit t*.

Der Zeitindex t ist hier eine Variable, die durch einen Quantor gebunden werden kann, oder für die bestimmte Zeitpunkte eingesetzt werden können. Dass Lea schreibt, ist in dieser Lesart keine Aussage, sondern eine Eigenschaft der Zeit t. Es ist ein offener Satz, in dem t als indexikalisches "jetzt" fungiert.
Angenommen Lea schreibt am 1.5.2014 um 8 Uhr, aber nicht um 10 Uhr. Dann ist der Satz

> Lea schreibt *am 1.5.2014 um 8 Uhr*

wahr, wohingegen der Satz

> Lea schreibt *am 1.5.2014 um 10 Uhr*

falsch ist. Der (etwas umständliche) Satz

> Es gibt eine Zeit t: Lea schreibt *zur Zeit t*

ist dann wahr, und der Satz

> Für alle Zeiten t: Lea schreibt *zur Zeit t*

ist falsch.
Hierdurch wird eine *temporale Interpretation* der Modaloperatoren $\Box$ und $\Diamond$ nahegelegt:

$$\begin{aligned} \Box \text{ Lea schreibt } &:\iff \text{Für alle Zeiten } t\text{: Lea schreibt } \textit{zur Zeit } t \\ \Diamond \text{ Lea schreibt } &:\iff \text{Es gibt eine Zeit } t\text{: Lea schreibt } \textit{zur Zeit } t \end{aligned}$$

bzw. formal:

$$\begin{aligned} \Box A &:\iff \text{Für alle Zeiten } t\text{: } t \vDash A \\ \Diamond A &:\iff \text{Es gibt eine Zeit } t\text{: } t \vDash A \end{aligned}$$

In dieser Interpretation gilt $\Box A \to A$ und $A \to \Diamond A$, aber weder $A \to \Box A$ noch $\Diamond A \to A$.

Alternativ können wir auch vier Modaloperatoren G, F, H und P verwenden, deren Bedeutung wie folgt festgelegt wird:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{G}\,A &:\Longleftrightarrow \text{Es wird immer der Fall sein, dass } A \\
\mathsf{F}\,A &:\Longleftrightarrow \text{Es wird einmal der Fall sein, dass } A \\
\mathsf{H}\,A &:\Longleftrightarrow \text{Es war immer der Fall, dass } A \\
\mathsf{P}\,A &:\Longleftrightarrow \text{Es war einmal der Fall, dass } A
\end{aligned}
$$

($\mathsf{G}\,A$: "it is always Going to be the case that A", $\mathsf{F}\,A$: "at some Future time it will be the case that A", $\mathsf{H}\,A$: "it always Has been the case that A", $\mathsf{P}\,A$: "at some Past time it will be the case that A".)

Beispiele. Mit diesen Modaloperatoren können natürlichsprachliche Tempora ausgedrückt werden.

(i) q: Lea schreibt

(ii) $\mathsf{F}\,q$: Lea wird schreiben

(iii) $\mathsf{P}\,q$: Lea hat geschrieben

(iv) $\mathsf{P}\,\mathsf{P}\,q$: Lea hatte geschrieben

(v) $\mathsf{F}\,\mathsf{P}\,q$: Lea wird geschrieben haben

(vi) $\mathsf{P}\,\mathsf{F}\,q$: Lea würde schreiben

Unter Verwendung dieser vier Modaloperatoren können für $\Box$ und $\Diamond$ direkt zwei verschiedene Modallogiken angegeben werden (unabhängig von Definitionen $\mathsf{G}\,A := \neg\,\mathsf{F}\,\neg A$ und $\mathsf{H}\,A := \neg\,\mathsf{P}\,\neg A$):

(1) $\Box A := \mathsf{G}\,A$ und $\Diamond A := \mathsf{F}\,A$

(2) $\Box A := \mathsf{H}\,A$ und $\Diamond A := \mathsf{P}\,A$

Bemerkung. Im Unterschied zur zuvor betrachteten temporalen Interpretation gilt in der Modallogik (1) z. B. nicht mehr $\Box A \to A$: Daraus, dass A immer der Fall sein wird, folgt nicht, dass A auch jetzt der Fall ist. In (2) gilt z. B. $A \to \Diamond A$ nicht.

Die Reihung von Modaloperatoren, wie etwa in den Beispielen (iv), (v) und (vi), führt zu folgendem Problem: Die Bedeutung von Aussagen der Form $\Diamond A$ ist in der Modallogik (1) festgelegt als "Es wird eine Zeit t geben: $t \vDash A$", bzw. in der Modallogik (2) als "Es gab eine Zeit t: $t \vDash A$". Darin kommt jedoch keine freie Variable vor, die durch einen zusätzlichen Modaloperator gebunden werden könnte.
Steht $\Diamond A$ etwa für $\mathsf{P}\,A$ (Modallogik (2)), so ist $\Diamond\Diamond A$ ebenso gleichbedeutend zu $\Diamond A$ wie $\mathsf{F}\,\Diamond A$. Die Aussagen (iv) $\mathsf{P}\,\mathsf{P}\,q$ und (v) $\mathsf{F}\,\mathsf{P}\,q$ im Beispiel würden dann dieselbe Bedeutung haben; der natürlichsprachliche Unterschied könnte also nicht formal abgebildet werden. Entsprechendes gilt für (v) und (vi).
Was wir benötigen, ist eine Semantik, in der z. B. für (v) gilt:

$$\mathsf{F}\,\mathsf{P}\,q \;:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt } t'' \text{ und es gibt } t'\text{: } t'' > t \text{ und } t' < t'' \text{ und } t' \vDash q$$

und in der z. B. für (vi) gilt:

$$\mathsf{P}\,\mathsf{F}\,q \;:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt } t'' \text{ und es gibt } t'\text{: } t'' < t \text{ und } t' > t'' \text{ und } t' \vDash q$$

Man sieht, dass (v) und (vi) dann eine unterschiedliche Bedeutung haben, die der im Beispiel angegebenen intendierten Interpretation entspricht.
Wir stellen jedoch fest, dass hierbei nicht nur *eine* Erreichbarkeitsrelation verwendet wurde, sondern *zwei*, nämlich $<$ und $>$. Dass $<$ und $>$ zueinander invers sind, d. h. dass $u < v \iff v > u$, ist hierbei unerheblich.
Im Allgemeinen führt dies zu sogenannten Multimodallogiken.

Definition 3.22 (i) Eine *Multimodallogik* ist eine Modallogik, in der es n Paare von Modaloperatoren gibt: $\Box_1, \Diamond_1, \Box_2, \Diamond_2, \ldots, \Box_n, \Diamond_n$. *Multimodallogik*

(ii) Ein *multimodaler Rahmen* $\langle W, R_1, R_2, \ldots, R_n\rangle$ enthält für jedes Paar $\Box_k, \Diamond_k$ von Modaloperatoren eine eigene Erreichbarkeitsrelation R_k. *multimodaler Rahmen*

(iii) An den Bewertungen h ändert sich nichts. Ein *multimodales Modell* hat also die Form $\langle W, R_1, R_2, \ldots, R_n, h\rangle$. *multimodales Modell*

Beispiel. Wir betrachten die multimodale Formel $\Box_3 p \to \Diamond_1 p$.
Es gilt für $\mathfrak{M} = \langle W, R_1, R_2, R_3, h\rangle$:

$$\mathfrak{M}, u \vDash \Box_3 p \to \Diamond_1 p \iff \text{Wenn für alle } v \text{ mit } uR_3v\text{: } \mathfrak{M}, v \vDash p, \text{ dann gibt es ein } v \text{ mit } uR_1v\text{: } \mathfrak{M}, v \vDash p.$$

Definition 3.23 Eine *Temporallogik* ist eine Multimodallogik mit $n = 2$ Paaren von Modaloperatoren (d. h., eine Bimodallogik), bei der die beiden Erreichbarkeitsrelationen R_1 und R_2 zueinander invers sind, d. h. $uR_1v \iff vR_2u$. *Temporallogik*

Nun können wir die Semantik für die auf den vier Modaloperatoren G, F, H und P beruhende Temporallogik wie folgt angeben:

Definition 3.24 Sei T eine Menge von Zeitpunkten $t, t', \ldots$ und $<$ die zu $>$ inverse Erreichbarkeitsrelation ("Zeitordnung"). Sei $\langle T, <\rangle$ ein temporallogischer Rahmen (wobei wir wegen $t < t'$ invers zu $t' < t$ auf das zweite Relationszeichen $>$ verzichten können), und sei $\mathfrak{T} = \langle T, <, h\rangle$ ein temporallogisches Modell. Wir definieren $\mathfrak{T}, t \vDash A$ ("*A gilt im Modell $\mathfrak{T}$ zum Zeitpunkt t*") wie folgt: *A gilt in $\mathfrak{T}$ zum Zeitpunkt t*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}, t \vDash \mathsf{G}\,A &\;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } t' \in T\text{: wenn } t < t'\text{, dann } \mathfrak{T}, t' \vDash A\\
\mathfrak{T}, t \vDash \mathsf{F}\,A &\;:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt } t' \in T\text{: } t < t' \text{ und } \mathfrak{T}, t' \vDash A\\
\mathfrak{T}, t \vDash \mathsf{H}\,A &\;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } t' \in T\text{: wenn } t' < t\text{, dann } \mathfrak{T}, t' \vDash A\\
\mathfrak{T}, t \vDash \mathsf{P}\,A &\;:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt } t' \in T\text{: } t' < t \text{ und } \mathfrak{T}, t' \vDash A
\end{aligned}$$

(Die Begriffe *Gültigkeit im Modell*, *Gültigkeit im Rahmen* und *Allgemeingültigkeit* werden analog zur bisherigen Modallogik definiert.)

Beispiel. Es gilt $\vDash A \to \mathsf{G}\,\mathsf{P}\,A$.
Sei $\mathfrak{T}$ ein beliebiges temporallogisches Modell und $t \in T$. Wir zeigen $\mathfrak{T}, t \vDash A \to \mathsf{G}\,\mathsf{P}\,A$. Angenommen $\mathfrak{T}, t \vDash A$. Wir müssen zeigen, dass dann $\mathfrak{T}, t \vDash \mathsf{G}\,\mathsf{P}\,A$, d. h. dass es für alle $t' \in T$ mit $t < t'$ ein t'' mit $t'' < t'$ gibt, so dass $\mathfrak{T}, t'' \vDash A$. Setze $t'' = t$. Es folgt die Behauptung. (Entsprechend gilt auch $\vDash A \to \mathsf{H}\,\mathsf{F}\,A$.)

Beispiel. Durch temporallogische Formeln können bestimmte Rahmeneigenschaften festgelegt werden. Es gilt z. B.

$$\left.\begin{array}{l}\langle T,<\rangle \models \mathsf{G}\,A \to \mathsf{G}\,\mathsf{G}\,A \\ \langle T,<\rangle \models \mathsf{H}\,A \to \mathsf{H}\,\mathsf{H}\,A\end{array}\right\} \iff < \text{ transitiv}$$

3.7 Modallogische Tableaukalküle

Literatur

- M. D'Agostino, D. M. Gabbay, R. Hähnle und J. Posegga (Hrsg.) (1999), *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer.
- P. Schroeder-Heister (2008), *Einführung in die Logik*, Skriptum. http://www.uni-tuebingen.de/en/30440. (Nur für klassische Logik.)
- R. M. Smullyan (1995), *First-Order Logic*. New York: Dover Publications. (Nur für klassische Logik.)

Neben Hilberttypkalkülen werden auch sogenannte Tableaukalküle verwendet. Dabei handelt es sich um reine Regelkalküle, die keinerlei Axiome verwenden. In Ableitungen in Hilberttypkalkülen werden ausgehend von Axiomen unter Verwendung weniger Regeln Formeln "aufgebaut". Hilberttypkalküle werden deshalb auch als *synthetische* Kalküle bezeichnet. Die in Ableitungen erzeugten ("synthetisierten") Formeln sind die Theoreme des jeweiligen Kalküls, d. h. die bewiesenen Formeln. Im Unterschied dazu sind Tableaukalküle *analytische* Kalküle, in denen Formeln nach bestimmten Regeln "zerlegt" werden können. Dabei kommt ein Widerlegungsverfahren zum Einsatz: Die zu beweisende Ausgangsformel wird zunächst negiert. Aus der negierten Formel werden dann durch Regelanwendungen Formeln in einer Baumstruktur, dem sogenannten Tableau, abgeleitet. Diese abgeleiteten Formeln stellen Bedingungen für die negierte Formel dar; die negierte Formel wird in diesem Sinne analysiert. Widersprechen sich diese Bedingungen, so ist die negierte Formel widerlegt, woraus man schließt, dass die nicht-negierte Ausgangsformel bewiesen ist. Falls keine Widerlegung der negierten Formel erreicht werden kann, lässt sich aus dem Tableau ein Gegenmodell für die nicht-negierte Ausgangsformel konstruieren.

Wir behandeln zunächst aussagenlogische analytische Tableaux, und erweitern diese dann durch Hinzunahme weiterer Regeln zu modallogischen Tableaux. Dabei verwenden wir eine vereinfachte Objektsprache ohne Verum $\top$ und Falsum $\bot$.

3.7.1 Aussagenlogische analytische Tableaux

Definition 3.25 Eine *Signatur* σ ist eine endliche punktseparierte Liste positiver ganzer Zahlen. *Signatur*

Eine *signierte Formel* ist ein Ausdruck der Form $\sigma\ A$, wobei σ eine Signatur und A eine Formel ist. *signierte Formel*

Bemerkungen. (i) Die Signatur σ kann als Index über Welten gelesen werden. Den Ausdruck $\sigma\ A$ liest man als "A gilt in σ" bzw. "in σ gilt A".

(ii) Eine Signatur $\sigma.n$ ist eine Signatur σ gefolgt von einem Punkt und einer positiven ganzen Zahl n. Eine Signatur $\sigma.n$ steht für "σ sieht $\sigma.n$".

(iii) Beispiel für eine Signatur: 1.2.1.4 ("1.2.1 ($= \sigma$) sieht 1.2.1.4 ($= \sigma.4$)").

Definition 3.26 (i) Ein *aussagenlogisches (analytisches) Tableau* ist eine Baumstruktur von signierten Formeln, die nach folgenden Regeln erzeugt wird: *aussagenlogisches Tableau*

$$\alpha\text{-}\mathit{Regeln}\left\{ (\wedge)\,\frac{\sigma\ A \wedge B}{\begin{array}{c}\sigma\ A\\ \sigma\ B\end{array}} \qquad (\neg\vee)\,\frac{\sigma\ \neg(A \vee B)}{\begin{array}{c}\sigma\ \neg A\\ \sigma\ \neg B\end{array}} \qquad (\neg\to)\,\frac{\sigma\ \neg(A \to B)}{\begin{array}{c}\sigma\ A\\ \sigma\ \neg B\end{array}} \right.$$

$$\beta\text{-}\mathit{Regeln}\left\{ (\neg\wedge)\,\frac{\sigma\ \neg(A \wedge B)}{\sigma\ \neg A \mid \sigma\ \neg B} \qquad (\vee)\,\frac{\sigma\ A \vee B}{\sigma\ A \mid \sigma\ B} \qquad (\to)\,\frac{\sigma\ A \to B}{\sigma\ \neg A \mid \sigma\ B} \right.$$

α-Regeln bezeichnet man auch als *konjunktive Regeln*, β-Regeln als *disjunktive Regeln*.

Durch α-Regeln wird ein Zweig in der Baumstruktur um die beiden unter dem Regelstrich stehenden Formeln erweitert. Durch β-Regeln ergibt sich eine Verzweigung in einen linken Zweig, der mit der unter dem Regelstrich links stehenden Formel beginnt, und in einen rechten Zweig, der mit der unter dem Regelstrich rechts stehenden Formel beginnt.

Zusätzlich verwenden wir die Regel

$$(\neg)\,\frac{\sigma\ \neg\neg A}{\sigma\ A}$$

durch die ein Zweig um die unter dem Regelstrich stehende Formel erweitert wird.

(ii) Ein *Tableau für A* ist ein Tableau, das mit der signierten Formel $1\ \neg A$ beginnt. *Tableau für A*

(iii) Ein Zweig eines Tableaus heißt *geschlossen*, wenn er sowohl $\sigma\ B$ als auch $\sigma\ \neg B$ enthält, für eine beliebige Formel B.

(iv) Ein Tableau heißt *geschlossen*, wenn alle seine Zweige geschlossen sind.

(v) Ein Zweig eines Tableaus heißt *offen*, wenn der Zweig nicht geschlossen ist.

(vi) Ein Tableau heißt *offen*, wenn es einen offenen Zweig enthält.

Bemerkung. Die Regel ($\neg$) für die Negation zählen wir zu den α-Regeln. Alternativ könnte man eine β-Regel der Form $\frac{\sigma\ \neg\neg A}{\sigma\ A \mid \sigma\ A}$ verwenden. Dies würde jedoch zu unnötigen Verzweigungen führen.

Definition 3.27 Ein geschlossenes Tableau für die signierte Formel $1\ \neg A$ ist ein *Tableaubeweis* für die nicht-negierte Ausgangsformel A. *Tableaubeweis*
Die Formel A ist ein *Theorem*, falls es einen Tableaubeweis für A gibt. *Theorem*

Bemerkungen. (i) Die signierten Formeln sind die Knoten in der Tableau-Baumstruktur. Die Kanten zeichnen wir nicht ein; stattdessen machen wir die Zweige durch senkrechte Striche kenntlich.

(ii) Zusätzlich verwenden wir Zeilennummern (ganz links) und Kommentare der Form "(Regelname, Zeilennummer)" (jeweils rechts neben der Formel), die aber nicht zum eigentlichen Tableau gehören. Geschlossene Zweige markieren wir durch $n \times m$, wobei n und m die Zeilennummern jener beiden Zeilen sind, in denen $\sigma\ A$ und $\sigma\ \neg A$ vorkommen.

(iii) Zur Abkürzung dürfen Formeln $\neg\neg A$ in Tableaux auch gleich als A geschrieben werden, d. h. ohne die Regel $(\neg)$ explizit anzuwenden.

Beispiel. Tableaubeweis für $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$:

<table>
<tr><td>1.</td><td colspan="6">$1\ \neg((A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C)))$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="5">$1\ A \wedge B \to C$</td><td>$(\neg\!\to, 1)$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="5">$1\ \neg(A \to (B \to C))$</td><td>$(\neg\!\to, 1)$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="3">$1\ \neg(A \wedge B)$</td><td>$(\to, 2)$</td><td>$1\ C$</td><td>$(\to, 2)$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$1\ \neg A$</td><td>$(\neg\wedge, 4)$</td><td>$1\ \neg B$</td><td>$(\neg\wedge, 4)$</td><td>$1\ A$</td><td>$(\neg\!\to, 3)$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>$1\ A$</td><td>$(\neg\!\to, 3)$</td><td>$1\ A$</td><td>$(\neg\!\to, 3)$</td><td>$1\ \neg(B \to C)$</td><td>$(\neg\!\to, 3)$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>$1\ \neg(B \to C)$</td><td>$(\neg\!\to, 3)$</td><td>$1\ \neg(B \to C)$</td><td>$(\neg\!\to, 3)$</td><td>$1\ B$</td><td>$(\neg\!\to, 6)$</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>5×6</td><td></td><td>$1\ B$</td><td>$(\neg\!\to, 7)$</td><td>$1\ \neg C$</td><td>$(\neg\!\to, 6)$</td></tr>
<tr><td>9.</td><td></td><td></td><td>$1\ \neg C$</td><td>$(\neg\!\to, 7)$</td><td>4×8</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>5×8</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Beispiel. Die Reihenfolge der Regelanwendungen ist irrelevant. Auch das folgende Tableau ist ein Tableaubeweis für $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$:

<table>
<tr><td>1.</td><td colspan="6">$1\ \neg((A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C)))$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="5">$1\ A \wedge B \to C$</td><td>$(\neg\!\to, 1)$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="5">$1\ \neg(A \to (B \to C))$</td><td>$(\neg\!\to, 1)$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="5">$1\ A$</td><td>$(\neg\!\to, 3)$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="5">$1\ \neg(B \to C)$</td><td>$(\neg\!\to, 3)$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td colspan="5">$1\ B$</td><td>$(\neg\!\to, 5)$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td colspan="5">$1\ \neg C$</td><td>$(\neg\!\to, 5)$</td></tr>
<tr><td>8.</td><td colspan="3">$1\ \neg(A \wedge B)$</td><td>$(\to, 2)$</td><td>$1\ C$</td><td>$(\to,2)$</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>$1\ \neg A$</td><td>$(\neg\wedge,8)$</td><td>$1\ \neg B$</td><td>$(\neg\wedge,8)$</td><td>7×8</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>4×9</td><td></td><td>6×9</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Beispiel. Ein Tableau für $A \vee B \to A \wedge B$ ist

<table>
<tr><td>1.</td><td colspan="8">$1\ \neg(A \vee B \to A \wedge B)$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="7">$1\ A \vee B$</td><td>$(\neg\!\to, 1)$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="7">$1\ \neg(A \wedge B)$</td><td>$(\neg\!\to, 1)$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="3">$1\ A$</td><td>$(\vee, 2)$</td><td colspan="3">$1\ B$</td><td>$(\vee, 2)$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$1\ \neg A$</td><td>$(\neg\wedge, 3)$</td><td>$1\ \neg B$</td><td>$(\neg\wedge, 3)$</td><td>$1\ \neg A$</td><td>$(\neg\wedge, 3)$</td><td>$1\ \neg B$</td><td>$(\neg\wedge, 3)$</td></tr>
<tr><td></td><td>4×5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4×5</td><td></td></tr>
</table>

Dieses Tableau ist offen, und kann auch durch wiederholte Regelanwendungen nicht geschlossen werden. Die nicht-negierte Ausgangsformel $A \vee B \to A \wedge B$ ist also *kein* Theorem.

Ein offener Zweig liefert ein Gegenbeispiel: Gilt A in 1 und $\neg B$ in 1 (zweiter Zweig), so gilt $\neg(A \vee B \to A \wedge B)$ in 1. Die nicht-negierte Ausgangsformel $A \vee B \to A \wedge B$ kann also nicht gelten. Ebenso falls B in 1 gilt und $\neg A$ in 1 gilt (dritter Zweig).

3.7.2 Modallogische Tableaux für K

Definition 3.28 Ein *modallogisches Tableau für* K ist ein aussagenlogisches Tableau, in dem zusätzlich die folgenden Regeln verwendet werden dürfen: *modallogisches Tableau für* K

(i) Falls die Signatur $\sigma.n$ noch nicht im Zweig vorkommt:

$$(\Diamond)\ \frac{\sigma\ \Diamond A}{\sigma.n\ A} \qquad\qquad (\neg\Box)\ \frac{\sigma\ \neg\Box A}{\sigma.n\ \neg A}$$

(ii) Falls die Signatur $\sigma.n$ schon im Zweig vorkommt:

$$(\Box)\ \frac{\sigma\ \Box A}{\sigma.n\ A} \qquad\qquad (\neg\Diamond)\ \frac{\sigma\ \neg\Diamond A}{\sigma.n\ \neg A}$$

Bemerkungen. (i) Die Regeln ($\Diamond$) und ($\neg\Box$) dürfen nur für neue Signaturen $\sigma.n$ angewendet werden. Semantisch lässt sich das wie folgt motivieren: Angenommen wir haben in einem Zweig $\sigma\ \Diamond A$. Semantisch heißt das, dass $\Diamond A$ in der Welt σ gilt. Die Bedingung dafür ist, dass in einer von σ aus erreichbaren Welt A gilt. Eine solche Welt hat einen Namen der Form $\sigma.n$. Falls $\sigma.n$ im Zweig schon verwendet wurde, ist jedoch nicht sichergestellt, dass in der Welt $\sigma.n$ auch das Gewünschte (hier: A) gilt. Denn durch die vorherige Verwendung des Namens $\sigma.n$ wurde schon etwas für die benannte Welt festgelegt, nämlich was in ihr gilt. Deshalb muss man eine neue Signatur wählen, die dann einfach eine Welt bezeichnet, in der A gilt. Entsprechendes gilt für ($\neg\Box$).

(ii) Die Regeln ($\Box$) und ($\neg\Diamond$) dürfen nur für Signaturen $\sigma.n$ angewendet werden, die schon im Zweig vorkommen. Im Fall von ($\Box$) ist die Prämisse $\sigma\ \Box A$. Das heißt, in der durch σ benannten Welt gilt $\Box A$. Semantisch heißt das, dass in jeder von σ aus erreichbaren Welt $\sigma.n$ die Formel A gelten muss. Nun bezeichnen Namen der Form $\sigma.n$ gerade jene Welten, die von σ aus erreichbar sind. Da in allen diesen Welten $\sigma.n$ die Formel A gelten muss, wählt man in der Konklusion $\sigma.n\ A$ von ($\Box$) eine schon im Zweig vorkommende Signatur $\sigma.n$. Entsprechend für ($\neg\Diamond$).

(Diese Bemerkungen dienen lediglich der semantischen Motivation der Regeln, und dazu, plausibel zu machen, weshalb aus offenen Tableaux Gegenmodelle konstruiert werden können. Der (rein syntaktische) Begriff des Tableaubeweises ist unabhängig von semantischen Erläuterungen gegeben.)

Beispiel. Die Formel $\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$ hat den folgenden Tableaubeweis:

1.			$1\ \neg(\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q))$	
2.			$1\ \Box(p \wedge q)$	$(\neg\!\to, 1)$
3.			$1\ \neg(\Box p \wedge \Box q)$	$(\neg\!\to, 1)$
4.	$1\ \neg\Box p$	$(\neg\wedge, 3)$	$1\ \neg\Box q$	$(\neg\wedge, 3)$
5.	$1.1\ \neg p$	$(\neg\Box, 4)$	$1.1\ \neg q$	$(\neg\Box, 4)$
6.	$1.1\ p \wedge q$	$(\Box, 2)$	$1.1\ p \wedge q$	$(\Box, 2)$
7.	$1.1\ p$	$(\wedge, 6)$	$1.1\ p$	$(\wedge, 6)$
8.	$1.1\ q$	$(\wedge, 6)$	$1.1\ q$	$(\wedge, 6)$
	5×7		5×8	

Beispiele. (i) Aus offenen Zweigen, die nicht geschlossen werden können, lassen sich Gegenmodelle für die (nicht-negierte) Ausgangsformel ablesen. Das Tableau

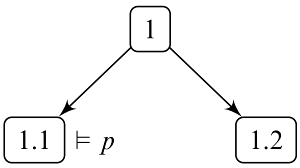
1.	$1\ \neg(\Diamond p \to \Box p)$	
2.	$1\ \Diamond p$	$(\neg\!\to, 1)$

(*Fortsetzung nächste Seite*)

3.	$1\ \neg\Box p$	$(\neg\!\rightarrow, 1)$
4.	$1.1\ p$	$(\Diamond, 2)$
5.	$1.2\ \neg p$	$(\neg\Box, 3)$

ist offen, und erneute Regelanwendungen auf schon behandelte Formeln können nicht zu einem geschlossenen Tableau führen.

Aus dem offenen Zweig kann man das Gegenmodell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h\rangle$



mit $W = \{1, 1.1, 1.2\}$, $R = \{\langle 1, 1.1\rangle, \langle 1, 1.2\rangle\}$ und $h(p, 1.1) = \mathrm{w}$, $h(p, 1.2) = \mathrm{f}$ (restliche Aussagesymbole überall f) ablesen.

(ii) Das Tableau

1.	$1\ \neg(\Box p \rightarrow \Diamond p)$	
2.	$1\ \Box p$	$(\neg\!\rightarrow, 1)$
3.	$1\ \neg\Diamond p$	$(\neg\!\rightarrow, 1)$

ist ebenfalls offen, und kann nicht geschlossen werden. Sowohl $(\Box, 2)$ als auch $(\neg\Diamond, 3)$ würden eine Signatur der Form $1.n$ erfordern, die schon im Zweig vorkommen müsste. Es kommt jedoch nur die Signatur 1 vor. Das Gegenmodell ist $\mathfrak{M} = \langle W, R, h\rangle$, wobei $W = \{1\}$, $R = \emptyset$ und $h(A, 1) = \mathrm{f}$ für alle $A \in \mathrm{AV}$.

Bemerkung. Könnte man bei Anwendung von $(\Box)$ und $(\neg\Diamond)$ auch Signaturen einführen, die noch nicht im Zweig vorkommen, dann könnte man das folgende geschlossene Tableau erzeugen:

1.	$1\ \neg(\Box p \rightarrow \Diamond p)$	
2.	$1\ \Box p$	$(\neg\!\rightarrow, 1)$
3.	$1\ \neg\Diamond p$	$(\neg\!\rightarrow, 1)$
4.	$1.1\ p$	(modifizierte Regel $\Box$, 3)
5.	$\underline{1.1\ \neg p}$	(modifizierte Regel $\neg\Diamond$, 4)
	4×5	

Einen Tableaubeweis für $\Box p \rightarrow \Diamond p$ erhält man auch, wenn als zusätzliche Regeln (T)

$$\frac{\sigma\ \Box A}{\sigma\ A} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma\ \neg\Diamond A}{\sigma\ \neg A}$$

verwendet werden dürfen:

1.	$1\ \neg(\Box p \rightarrow \Diamond p)$	
2.	$1\ \Box p$	$(\neg\!\rightarrow, 1)$
3.	$1\ \neg\Diamond p$	$(\neg\!\rightarrow, 1)$
4.	$1\ p$	$(T, 3)$
5.	$\underline{1\ \neg p}$	$(T, 4)$
	4×5	

3.7.3 Tableaukalküle für Standardmodallogiken

Tableaukalküle für andere Standardmodallogiken können durch Hinzunahme weiterer Regelpaare definiert werden. Wir verwenden die folgenden Regeln, *wobei die Signaturen σ und $\sigma.n$ schon im Zweig vorkommen müssen:*

Regelname	*Regelpaar*	
D	$\dfrac{\sigma\ \Box A}{\sigma\ \Diamond A}$	$\dfrac{\sigma\ \neg\Diamond A}{\sigma\ \neg\Box A}$
T	$\dfrac{\sigma\ \Box A}{\sigma\ A}$	$\dfrac{\sigma\ \neg\Diamond A}{\sigma\ \neg A}$
B	$\dfrac{\sigma.n\ \Box A}{\sigma\ A}$	$\dfrac{\sigma.n\ \neg\Diamond A}{\sigma\ \neg A}$
4	$\dfrac{\sigma\ \Box A}{\sigma.n\ \Box A}$	$\dfrac{\sigma\ \neg\Diamond A}{\sigma.n\ \neg\Diamond A}$
4r	$\dfrac{\sigma.n\ \Box A}{\sigma\ \Box A}$	$\dfrac{\sigma.n\ \neg\Diamond A}{\sigma\ \neg\Diamond A}$

Ausgehend vom Tableaukalkül für K, erhält man die folgenden Tableaukalküle:

Tableaukalkül für	*zusätzliche Regelpaare*
D	*D*
T	*T*
B	*T*, *B*
K4	*4*
S4	*T*, *4*
S5	*T*, *4*, *4r*

Bemerkung. Bei einem *Tableaukalkül für S* (wobei $S = $ K, D, T usw.) sprechen wir auch von S-*Tableaux* und S-*Tableaubeweisen*, sowie bei aus offenen S-Tableaux konstruierten Gegenmodellen von S-*Gegenmodellen*. *Tableaukalkül für S*

Beispiele. (i) Ein B-Tableaubeweis für $A \to \Box\Diamond A$ ist

1.	$1\ \neg(A \to \Box\Diamond A)$	
2.	$1\ A$	$(\neg\!\to, 1)$
3.	$1\ \neg\Box\Diamond A$	$(\neg\!\to, 1)$
4.	$1.1\ \neg\Diamond A$	$(\neg\Box, 3)$
5.	$1\ \neg A$	$(B, 4)$
	2×5	

(ii) Ein K4-Tableaubeweis für $\Box A \to \Box\Box A$ ist

1.	$1\ \neg(\Box A \to \Box\Box A)$	
2.	$1\ \Box A$	$(\neg\!\to, 1)$
3.	$1\ \neg\Box\Box A$	$(\neg\!\to, 1)$
4.	$1.1\ \neg\Box A$	$(\neg\Box, 3)$

(*Fortsetzung nächste Seite*)

5.	1.1.1 $\neg A$	$(\neg\Box, 4)$
6.	1.1 $\Box A$	$(4, 2)$
	4×6	

3.7.4 Korrektheit und Vollständigkeit

Nun beweisen wir Korrektheit und Vollständigkeit für K-Tableaux. Wir beweisen zunächst Korrektheit: Wenn es einen K-Tableaubeweis für A gibt, dann ist A K-gültig. Danach beweisen wir Vollständigkeit: Wenn A K-gültig ist, dann gibt es einen K-Tableaubeweis für A.

Wir verwenden weiterhin die durch Verzicht auf Verum $\top$ und Falsum $\perp$ vereinfachte Objektsprache.

Definition 3.29 Eine Menge S signierter Formeln heißt *erfüllbar* im Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$, wenn es eine Funktion ϑ gibt, die jeder in S vorkommenden Signatur σ eine Welt $\vartheta(\sigma) \in W$ zuordnet, so dass gilt: *erfüllbar*

(i) Wenn die Signaturen σ und $\sigma.n$ beide in S vorkommen, dann ist $\langle \vartheta(\sigma), \vartheta(\sigma.n) \rangle \in R$.

(ii) Wenn $\sigma\ A \in S$, dann $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \vDash A$, d. h. dann gilt A in $\mathfrak{M}$ in der Welt $\vartheta(\sigma)$.

Ein *Zweig in einem Tableau ist erfüllbar*, falls die Menge S dieses Zweigs in einem Modell erfüllbar ist. Ein *Tableau ist erfüllbar*, falls es einen erfüllbaren Zweig enthält.

Zum Beweis von Korrektheit benötigen wir zwei Lemmas zur Erfüllbarkeit.

Lemma 3.30 *Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar.*

Beweis. Angenommen ein Tableau ist geschlossen und erfüllbar.

Da es erfüllbar ist, enthält es einen erfüllbaren Zweig. Die Menge S der in diesem Zweig vorkommenden signierten Formeln sei für die Zuordnung ϑ erfüllbar in einem Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$.

Da das Tableau geschlossen ist, muss es eine Signatur σ und eine Formel A geben, so dass $\sigma\ A \in S$ und $\sigma\ \neg A \in S$. Dann muss aber $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \vDash A$ und $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \vDash \neg A$ gelten, für eine Welt $\vartheta(\sigma) \in W$. Widerspruch. QED

Lemma 3.31 *Die Anwendung einer Tableauregel in einem erfüllbaren Tableau führt wieder zu einem erfüllbaren Tableau.*

Beweis. Sei $\mathcal{T}$ ein erfüllbares Tableau, in dem eine Tableauregel im Zweig $\mathcal{Z}$ angewendet wird. Da $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, gibt es einen erfüllbaren Zweig in $\mathcal{T}$.

Angenommen $\mathcal{Z}'$ ist ein erfüllbarer Zweig, der verschieden ist von $\mathcal{Z}$. Die Anwendung einer Tableauregel in $\mathcal{Z}$ lässt $\mathcal{Z}'$ unverändert. Also bleibt $\mathcal{Z}'$ erfüllbar, und die Regelanwendung führt damit zu einem erfüllbaren Tableau.

Nun nehmen wir an, dass der Zweig $\mathcal{Z}$, in dem eine Tableauregel angewendet wird, erfüllbar ist, wobei die Menge S der signierten Formeln dieses Zweigs mit ϑ im Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$ erfüllbar sei. Wir betrachten die möglichen Regelanwendungen:

(i) Für α-Regeln betrachten wir exemplarisch den Fall $(\wedge)$; die übrigen konjunktiven Regeln (einschließlich $(\neg)$) können analog behandelt werden.

Angenommen $\sigma\ A \wedge B$ kommt in $\mathcal{Z}$ vor; die Regelanwendung erweitert $\mathcal{Z}$ um $\sigma\ A$

und $\sigma\ B$. Da $\mathcal{Z}$ erfüllbar ist und $\sigma\ A \wedge B$ in $\mathcal{Z}$ vorkommt, gilt $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \models A \wedge B$, und damit auch $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \models A$ und $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \models B$. Also ist auch der um $\sigma\ A$ und $\sigma\ B$ erweiterte Zweig $\mathcal{Z}$ erfüllbar in $\mathfrak{M}$ mit ϑ. Die Regelanwendung führt also wieder zu einem erfüllbaren Tableau.

(ii) Für β-Regeln betrachten wir den Fall $(\vee)$; für die übrigen disjunktiven Regeln gilt Entsprechendes.

Angenommen $\sigma\ A \vee B$ kommt in $\mathcal{Z}$ vor; die Regelanwendung führt zu einer Verzweigung in einen linken Zweig mit $\sigma\ A$ und in einen rechten Zweig mit $\sigma\ B$. Da $\mathcal{Z}$ erfüllbar, gilt mit ϑ, dass $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \models A \vee B$, und somit auch $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \models A$ oder $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \models B$. Im ersten Fall ist der linke, um $\sigma\ A$ erweiterte Zweig $\mathcal{Z}$ in $\mathfrak{M}$ mit ϑ erfüllbar. Im zweiten Fall ist der rechte, um $\sigma\ B$ erweiterte Zweig $\mathcal{Z}$ erfüllbar. Es gibt also mindestens eine erfüllbare Erweiterung von $\mathcal{Z}$. Also ist ein Zweig des erweiterten Tableaus erfüllbar, und somit auch das resultierende Tableau.

(iii) Für die Regel $(\Diamond)$ gilt:

Angenommen $\sigma\ \Diamond A$ kommt in $\mathcal{Z}$ vor, und wir erweitern $\mathcal{Z}$ um $\sigma.n\ A$, wobei die Signatur $\sigma.n$ in $\mathcal{Z}$ noch nicht vorkommt. $\vartheta(\sigma.n)$ ist dann nicht definiert. Da $\mathcal{Z}$ erfüllbar, gilt $\mathfrak{M}, \vartheta(\sigma) \models \Diamond A$. Dann muss für eine Welt $u \in W$ mit $\vartheta(\sigma) R u$ gelten: $\mathfrak{M}, u \models A$.

Wir definieren eine neue Funktion ϑ' wie folgt:

- Für alle in S von $\mathcal{Z}$ vorkommenden Signaturen σ sei $\vartheta'(\sigma) := \vartheta(\sigma)$.
- Da $\sigma.n$ in S von $\mathcal{Z}$ nicht vorkommt, setzen wir einfach $\vartheta'(\sigma.n) := u$.

Die Gültigkeit der Formeln in $\mathcal{Z}$ im Modell $\mathfrak{M}$ ist unabhängig davon, ob ϑ oder ϑ' für die Zuordnung von Welten in W verwendet wird. Da $\vartheta'(\sigma) = \vartheta(\sigma)$, $\vartheta'(\sigma.n) = u$ und $\vartheta(\sigma) R u$, gilt $\vartheta'(\sigma) R \vartheta'(\sigma.n)$. Folglich gilt $\mathfrak{M}, \vartheta'(\sigma.n) \models A$. Also ist der um $\sigma.n\ A$ erweiterte Zweig $\mathcal{Z}$ erfüllbar, d. h. die Anwendung der Regel $(\Diamond)$ führt wieder zu einem erfüllbaren Tableau.

(iv) Für die Regel $(\neg\Box)$ argumentiert man entsprechend.

(v) Für die Regeln $(\Box)$ und $(\neg\Diamond)$: Übungsaufgabe. QED

Theorem 3.32 (Korrektheit) *Wenn A einen K-Tableaubeweis hat, dann ist A K-gültig.*

Beweis. Angenommen A hat einen K-Tableaubeweis, ist aber nicht K-gültig. Wir leiten einen Widerspruch ab.
Da A einen K-Tableaubeweis hat, gibt es ein geschlossenes Tableau $\mathcal{T}$, das mit $1\ \neg A$ beginnt. Sei $\mathcal{T}_0$ das Tableau, das nur aus dem Wurzelknoten $1\ \neg A$ besteht. $\mathcal{T}$ ist dann eine Erweiterung von $\mathcal{T}_0$.
Da A nicht K-gültig ist, gibt es ein Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h\rangle$ und eine Welt $u \in W$, so dass $\mathfrak{M}, u \not\models A$. Wir verwenden eine Funktion ϑ mit $\vartheta(1) := u$. Dann ist die Menge $S = \{1\ \neg A\}$ von $\mathcal{T}_0$ offensichtlich erfüllbar, und somit auch $\mathcal{T}_0$.
Mit Lemma 3.31 ist dann auch $\mathcal{T}$ als eine durch Anwendung von Tableauregeln erzeugte Erweiterung von $\mathcal{T}_0$ erfüllbar. Doch $\mathcal{T}$ ist geschlossen, kann also gemäß Lemma 3.30 nicht erfüllbar sein. Widerspruch. QED

Korrektheit des Tableaukalküls für K bedeutet, dass *nur* Formeln K-beweisbar sind, die auch K-gültig sind. (Ein Kalkül, in dem gar nichts beweisbar ist, ist also trivialerweise

korrekt.) Zusätzlich sollen im Tableaukalkül für K *alle* K-gültigen Formeln K-beweisbar sein. Dann ist der Kalkül vollständig. Korrektheit zusammen mit Vollständigkeit bedeutet für den Tableaukalkül für K, dass die K-beweisbaren Formeln *genau* die K-gültigen Formeln sind.
Im Folgenden beweisen wir Vollständigkeit für den Tableaukalkül für K per Kontraposition: Wir zeigen, dass wenn A nicht K-beweisbar ist, dann ist A nicht K-gültig. Dazu müssen wir zeigen, wie aus einem Tableau für A, das nicht geschlossen werden kann, ein Gegenmodell für A konstruiert werden kann. Dies erfordert sogenannte saturierte Tableaux, die wir zunächst einführen.

Definition 3.33 Ein K-Tableau heißt *saturiert*, falls für jeden offenen Zweig gilt: *saturiert*

(1) Auf jede signierte Formel, auf die eine α- oder β-Regel anwendbar ist, wurde die jeweilige α- oder β-Regel *einmal* angewandt.

(2) Auf jede signierte Formel $\sigma\ \Diamond A$ bzw. $\sigma\ \neg\Box A$ wurde die Regel ($\Diamond$) bzw. ($\neg\Box$) *einmal* angewandt.

(3) Auf jede signierte Formel $\sigma\ \Box A$ bzw. $\sigma\ \neg\Diamond A$ wurde die Regel ($\Box$) bzw. ($\neg\Diamond$) *einmal für jede im Zweig vorkommende Signatur $\sigma.n$* angewandt.

Bemerkungen. Für einen offenen Zweig $\mathcal{Z}$ in einem saturierten K-Tableau gilt z. B.:

(i) Kommt $\sigma\ A \wedge B$ in $\mathcal{Z}$ vor, dann kommen wegen (1) auch $\sigma\ A$ und $\sigma\ B$ in $\mathcal{Z}$ vor.

Falls $\sigma\ A \vee B$ in $\mathcal{Z}$ vorkommt, dann kommt, ebenfalls wegen (1), entweder $\sigma\ A$ oder $\sigma\ B$ in $\mathcal{Z}$ vor.

(ii) Falls $\sigma\ \Diamond A$ in $\mathcal{Z}$ vorkommt, dann auch $\sigma.n\ A$, für ein n (wegen (2)).

(iii) Falls $\sigma\ \Box A$ in $\mathcal{Z}$ vorkommt, dann auch $\sigma.n\ A$ für jede schon in $\mathcal{Z}$ vorkommende Signatur $\sigma.n$ (wegen (3)).

Lemma 3.34 *Für jede Formel A kann ein saturiertes K-Tableau angegeben werden.*

Beweis. Wir geben ein Verfahren zur *systematischen Tableauentwicklung* an, welches das Gewünschte leistet: *systematische Tableauentwicklung*

(0) Schreibe den Wurzelknoten $1\ \neg A$, und initialisiere eine leere Liste $F_{\mathcal{Z}}$ für fertige Zweige. Gehe zu (1).

(1) Wähle einen offenen Zweig, der nicht in $F_{\mathcal{Z}}$ vorkommt, und gehe zu (2). Falls es keinen solchen Zweig gibt, rufe "Juhu!".

(2) Wähle in diesem Zweig eine signierte Formel $\sigma\ B$, wobei B weder die Form $\Box C$, $\neg\Diamond C$, p oder $\neg p$ (für beliebige Aussagevariablen p) hat, und auf die in diesem Zweig noch keine Regel angewandt wurde.

Falls es keine solche Formel gibt, füge den Zweig zu $F_{\mathcal{Z}}$ hinzu, und gehe zu (1). Andernfalls gehe zu (3).

(3) Falls B nicht die Form $\Diamond C$ oder $\neg\Box C$ hat, dann wende die passende Regel auf $\sigma\ B$ an, und gehe zu (1). Andernfalls gehe zu (4).

(4) Falls $\sigma\ B$ die Form $\sigma\ \Diamond C$ hat, dann wähle das kleinste n, für das $\sigma.n$ nicht im Zweig vorkommt, und erweitere den Zweig um $\sigma.n\ C$.

Falls $\sigma\ B$ die Form $\sigma\ \neg\Box C$ hat, dann wähle das kleinste n, für das $\sigma.n$ nicht im Zweig vorkommt, und erweitere den Zweig um $\sigma.n\ \neg C$.

Für jede signierte Formel der Form $\sigma\ \Box C$ oder $\sigma\ \neg\Diamond C$ in diesem Zweig, erweitere den Zweig um $\sigma.n\ C$ bzw. um $\sigma.n\ \neg C$. Gehe zu (1).

Dieses Verfahren lässt offen, auf welche im jeweiligen Schritt noch nicht behandelte Formel eine Regel angewendet wird. Man kann aber zeigen, dass das Verfahren unabhängig von der Wahl der signierten Formel immer terminiert (siehe Fitting, 1983). QED

Beispiel. Das folgende systematisch entwickelte Tableau ist ein saturiertes K-Tableau für $\Box(p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(\Box p \wedge q)$:

$$
\begin{array}{rllll}
1. & & & 1\ \neg(\Box(p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(\Box p \wedge q)) & \\
2. & & & 1\ \Box(p \wedge \Box q) & (\neg\rightarrow, 1) \\
3. & & & 1\ \neg\Box(\Box p \wedge q) & (\neg\rightarrow, 1) \\
4. & & & 1.1\ \neg(\Box p \wedge q) & (\neg\Box, 3) \\
5. & & & 1.1\ p \wedge \Box q & (\Box, 2) \\
6. & & & 1.1\ p & (\wedge, 5) \\
7. & & & 1.1\ \Box q & (\wedge, 5) \\
8. & 1.1\ \neg\Box p & (\neg\wedge, 4) & \multicolumn{1}{|l}{1.1\ \neg q} & (\neg\wedge, 4) \\
9. & 1.1.1\ \neg p & (\neg\Box, 8) & \multicolumn{1}{|l}{} & \\
10. & 1.1.1\ q & (\Box, 7) & \multicolumn{1}{|l}{} &
\end{array}
$$

Die systematische Tableauentwicklung dafür verläuft wie folgt:

(0) Wir schreiben $1\ \neg(\Box(p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(\Box p \wedge q))$ und setzen $F_{\mathcal{Z}} = \emptyset$.

(1) Wahl von Zweig [1.].

(2) Wahl von $1\ \neg(\Box(p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(\Box p \wedge q))$.

(3) Anwendung von $(\neg\rightarrow)$ auf Zeile 1.

(1) Wahl von Zweig [1.-3.].

(2) Wahl von $1\ \neg\Box(\Box p \wedge q)$.

(3) $1\ \neg\Box(\Box p \wedge q)$ hat die Form $\neg\Box C$. Keine Regelanwendung.

(4) Wahl von $n = 1$; Erweiterung des Zweigs um $1.1\ \neg(\Box p \wedge q)$.

Erweiterung des Zweigs um $1.1\ p \wedge \Box q$ durch Anwendung von $(\Box)$ auf Zeile 2. (Die signierte Formel in Zeile 2 ist die einzige der Form $1\ \Box C$ oder $1\ \neg\Diamond C$.)

(1) Wahl von Zweig [1.-5.].

(2) Wahl von $1.1\ p \wedge \Box q$. (Die Formel in Zeile 4 könnte ebenfalls gewählt werden.)

(3) Anwendung von $(\wedge)$ auf Zeile 5.

(1) Wahl von Zweig [1.-7.].

(2) Wahl von $1.1\ \neg(\Box p \wedge q)$.

(3) Anwendung von $(\neg\wedge)$ auf Zeile 4.

(1) Wahl des rechten Zweigs [1.-8.]. (Der linke Zweig [1.-8.] könnte ebenfalls gewählt werden.)

(2) Es gibt keine passende Formel. Füge rechten Zweig [1.-8.] zu $F_{\mathcal{Z}}$ hinzu.

(1) Wahl des linken Zweigs [1.-8.].

(2) Wahl von $1.1\ \neg\Box p$.

(3) $1.1\ \neg\Box p$ hat die Form $\neg\Box C$. Gehe zu (4).

(4) Wahl von $n = 1$; Erweiterung des Zweigs um $1.1.1\ \neg p$.

Erweiterung des Zweigs um $1.1.1\ q$ durch Anwendung von ($\Box$) auf Zeile 7. (Die signierte Formel in Zeile 7 ist die einzige der Form $1.1\ \Box C$ oder $1.1\ \neg\Diamond C$.)

(1) Wahl des linken Zweigs [1.-10.].

(2) Es gibt keine passende Formel. Füge linken Zweig [1.-10.] zu $F_{\mathcal{Z}}$ hinzu.

(1) Es gibt keinen offenen Zweig, der nicht in $F_{\mathcal{Z}}$ vorkommt. Juhu!

Bemerkungen. (i) Das für K-Tableaux angegebene Verfahren kann in geeigneter Weise erweitert werden, um auch systematische D-, T-, B- usw. Tableauxentwicklungen anzugeben. Dazu fordert man in Schritt (4) zusätzlich, dass für jede signierte Formel der Form $\sigma\ \Box C$ oder $\sigma\ \neg\Diamond C$ im aktuellen Zweig, dieser Zweig auch durch jede mögliche Anwendung der Regeln D, T, B usw. (je nach Art des Tableaus) auf diese Formeln zu erweitern ist.

(ii) Für Formeln mit metasprachlichen Variablen A kann das Verfahren ebenfalls in geeigneter Weise angepasst werden, indem man in Schritt (2) bei der Wahl von $\sigma\ B$ auch Formeln B der Form A und $\neg A$ ausschließt.

Sei ein saturiertes Tableau $\mathcal{T}$ gegeben, in dem es einen offenen Zweig $\mathcal{Z}$ gibt. Dann liefert das folgende Verfahren ein Modell, in dem der Zweig $\mathcal{Z}$ erfüllbar ist:

Modellkonstruktion. Sei W die Menge der in $\mathcal{Z}$ vorkommenden Signaturen und $R = \emptyset$.

(i) Falls σ und $\sigma.n$ in W vorkommen, füge $\langle \sigma, \sigma.n \rangle$ zu R hinzu.

(ii) Falls $\sigma\ p$ (für eine Aussagevariable p) in $\mathcal{Z}$ vorkommt, setze $h(p,\sigma) = \mathrm{w}$. Andernfalls setze $h(p,\sigma) = \mathrm{f}$.

Hierdurch ist ein Modell $\langle W, R, h \rangle$ festgelegt.

Beispiel. (i) Im vorhergehenden Beispiel ist für den linken Zweig $W = \{1, 1.1, 1.1.1\}$, $R = \{\langle 1, 1.1 \rangle, \langle 1.1, 1.1.1 \rangle\}$, $h(p, 1, 1) = h(q, 1.1.1) = \mathrm{w}$ und $h(A, 1) = h(A, 1.1) = h(A, 1.1.1) = \mathrm{f}$ für alle übrigen $A \in \mathrm{AV}$.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \longrightarrow & \boxed{1.1} & \longrightarrow & \boxed{1.1.1} \\ & & \models p & & \models q \end{array}$$

In diesem Modell ist der linke Zweig erfüllbar.

(ii) Im rechten Zweig ist $W = \{1, 1.1\}$, $R = \{\langle 1, 1.1 \rangle\}$, $h(p, 1.1) = \mathrm{w}$, $h(q, 1) = \mathrm{f}$ und $h(A, 1) = h(A, 1.1) = \mathrm{f}$ für alle übrigen $A \in \mathrm{AV}$.

$$\boxed{1} \longrightarrow \boxed{1.1} \models p$$

In diesem Modell ist der rechte Zweig erfüllbar.

Beide Modelle sind ein Gegenmodell für $\Box(p \wedge \Box q) \to \Box(\Box p \wedge q)$.

Bei der Modellkonstruktion haben wir nur signierte Aussagevariablen betrachtet. Nun benötigen wir noch den allgemeinen Fall für beliebige in einem Zweig vorkommende signierte Formeln $\sigma\ A$, den wir im nachfolgenden Lemma zur Modellkonstruktion behandeln. Dieses Lemma werden wir per Induktion über dem Formelaufbau beweisen. Zunächst erläutern wir kurz, was das ist.

Bemerkung. Die Voraussetzung für einen Induktionsbeweis ist die Existenz eines *Induktionsmaßes*, nach dem die Gegenstände, über denen Induktion geführt werden soll, wie die natürlichen Zahlen geordnet werden können. Dies garantiert die Gültigkeit eines *Induktionsprinzips* für diese Gegenstände, denn für die natürlichen Zahlen gilt das *Prinzip der mathematischen Induktion:*

Angenommen, für eine Eigenschaft E gelten die Bedingungen

(1) $E(0)$, d. h. 0 hat die Eigenschaft E, und

(2) für jede natürliche Zahl n: wenn $E(n)$, dann $E(n+1)$.

Dann hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft E.

Als (nicht-logische) Regel hat das Prinzip der mathematischen Induktion im natürlichen Schließen die Form

$$\dfrac{n \in \mathbb{N} \qquad E(0) \qquad \begin{matrix}[E(n)] \\ E(n+1)\end{matrix}}{\forall n E(n)}$$

wobei n in keiner Annahme außer $E(n)$ vorkommen darf, von der die Prämisse $E(n+1)$ abhängt.
Bei einem Beweis per Induktion über dem Formelaufbau nutzt man aus, dass Formeln gemäß ihrer Komplexität wie die natürlichen Zahlen geordnet werden können.
Die Komplexität einer Formel kann man z. B. als Anzahl der in ihr vorkommenden logischen Konstanten festlegen; man spricht dann vom *Grad* g einer Formel, induktiv definiert wie folgt (für unsere vereinfachte Objektsprache ohne $\top$ und $\bot$):

(i) $g(A) := 0$, falls $A \in \mathrm{AV}$,

(ii) $g(*A) := g(A) + 1$, wobei $*$ für die einstelligen Operatoren $\neg$, $\Box$ und $\Diamond$ steht,

(iii) $g(A \circ B) := g(A) + g(B) + 1$, wobei $\circ$ für die zweistelligen Konnektive $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ steht.

Alternativ kann man jeder Formel eine natürliche Zahl r, den *Rang*, zuordnen wie folgt:

(i) $r(A) := 0$, falls $A \in \mathrm{AV}$,

(ii) $r(*A) := r(A) + 1$,

(iii) $r(A \circ B) := \max\{r(A), r(B)\} + 1$.

Ist das Induktionsmaß in einem Induktionsbeweis der Rang, so spricht man auch von *Ranginduktion*.
Man sieht, dass weder Grad noch Rang verschiedenen Formeln immer auch verschiedene natürliche Zahlen zuordnen; z. B. ist

$$\begin{aligned} r(p \wedge \Box q) &= \max\{r(p), r(\Box q)\} + 1 \\ &= \max\{0, r(q) + 1\} + 1 \\ &= \max\{0, 0 + 1\} + 1 \\ &= 1 + 1 = 2 = r(q \rightarrow \neg p_2) \end{aligned}$$

Eine Induktion über dem Grad einer Formel, bzw. eine Ranginduktion, erfordert

deshalb eine Fallunterscheidung, bei der Bedingung (2) des Prinzips der mathematischen Induktion für jede logische Konstante nachgewiesen werden muss.
Bei einer Induktion über dem Formelaufbau zum Nachweis einer Eigenschaft E für alle Formeln nimmt man an, dass die unmittelbaren Teilformeln einer beliebigen Formel A (d. h. jene Formeln, die im Strukturbaum von A direkt unter A stehen) die Eigenschaft E haben. Dann weist man nach, dass unter dieser Annahme auch die aus diesen Teilformeln zusammengesetzte Formel A die Eigenschaft E hat (vgl. Bedingung (2)). Dieser Nachweis ist der *Induktionsschritt*, die dabei gemachte Annahme ist die *Induktionsannahme*. Zusätzlich muss gezeigt werden, dass auch die Formeln kleinster Komplexität (also die Aussagevariablen, sowie ggf. $\top$ und $\bot$) die Eigenschaft E haben (vgl. Bedingung (1) im Prinzip der mathematischen Induktion). Dieser Nachweis ist der *Induktionsanfang*. Sind Induktionsanfang und Induktionsschritt (für jede logische Konstante) gezeigt, kann unter Verwendung des Induktionsprinzips geschlossen werden, dass alle Formeln die Eigenschaft E haben.
Zur Veranschaulichung: Seien $Tf(A)$ die unmittelbaren Teilformeln von A. Dann hat ein solcher Induktionsbeweis im natürlichen Schließen die Form

$$\dfrac{\begin{array}{c}\\ \text{IA}\\ E(A)\text{, für alle } A \in \text{AV}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[E(Tf(A))]^k\\ \text{IS}\\ E(A)\end{array}}{\text{Für alle Formeln } A\text{: } E(A)}\ (\text{Induktionsprinzip})^k$$

Hierbei steht IA für den Beweis des Induktionsanfangs, und IS steht für die Ableitung von $E(A)$ aus Annahmen $E(Tf(A))$, d. h. für den Induktionsschritt. Bei der Anwendung des Induktionsprinzips dürfen die Annahmen $E(Tf(A))$ gelöscht werden, so dass die Konklusion nicht mehr von diesen abhängt.
(Für Weiteres zur mathematischen Induktion siehe z. B. Smullyan, 2009, Ch. 15.)

Nun zum Lemma. Wir betrachten im Folgenden stets saturierte Tableaux, in denen $\mathcal{Z}$ ein offener Zweig sei.

Lemma 3.35 (zur Modellkonstruktion) *Für jede beliebige Formel A gilt:*

(i) Falls σ A in $\mathcal{Z}$ vorkommt, dann gilt $\mathfrak{M}, \sigma \models A$.

(ii) Falls σ $\neg A$ in $\mathcal{Z}$ vorkommt, dann gilt $\mathfrak{M}, \sigma \not\models A$.

Beweis. Per Induktion über dem Aufbau von A.

Induktionsanfang: Sei $A \in$ AV.

(i) Falls σ A in $\mathcal{Z}$, dann $\mathfrak{M}, \sigma \models A$, gemäß Verfahren zur Modellkonstruktion.

(ii) Falls σ $\neg A$ in $\mathcal{Z}$, dann kann σ A nicht in $\mathcal{Z}$ vorkommen, da $\mathcal{Z}$ ein offener Zweig ist. Folglich gilt $\mathfrak{M}, \sigma \not\models A$, gemäß Verfahren zur Modellkonstruktion.

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für die unmittelbaren Teilformeln einer Formel A.

Induktionsschritt: 1. Fall: Sei A die Formel $B \wedge C$.

(i) Falls σ $B \wedge C$ in $\mathcal{Z}$, dann sind auch σ B und σ C in $\mathcal{Z}$, da $\mathcal{Z}$ saturiert ist. Da B und C unmittelbare Teilformeln von A sind, gilt aufgrund der Induktionsannahme $\mathfrak{M}, \sigma \models B$ und $\mathfrak{M}, \sigma \models C$. Dann gilt aber auch $\mathfrak{M}, \sigma \models B \wedge C$, d. h. $\mathfrak{M}, \sigma \models A$.

(ii) Falls $\sigma\ \neg(B \wedge C)$ in $\mathcal{Z}$, dann ist entweder $\sigma\ \neg B$ oder $\sigma\ \neg C$ in $\mathcal{Z}$, da $\mathcal{Z}$ saturiert ist. Aufgrund der Induktionsannahme gilt $\mathfrak{M}, \sigma \not\models B$ oder $\mathfrak{M}, \sigma \not\models C$. Dann gilt aber auch $\mathfrak{M}, \sigma \not\models B \wedge C$, d. h. $\mathfrak{M}, \sigma \not\models A$.

2. Fall: Sei A die Formel $\Box B$.

(i) Falls $\sigma\ \Box B$ in $\mathcal{Z}$, dann ist auch $\sigma.n\ B$ in $\mathcal{Z}$, für alle in $\mathcal{Z}$ vorkommenden Signaturen der Form $\sigma.n$. Aufgrund der Induktionsannahme gilt $\mathfrak{M}, \sigma.n \models B$ für jede Signatur $\sigma.n$ in W von $\mathcal{Z}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt: Für alle $\sigma' \in W$: wenn $\sigma R \sigma'$, dann $\mathfrak{M}, \sigma' \models B$. Daraus folgt $\mathfrak{M}, \sigma \models \Box B$.

(ii) Falls $\sigma\ \neg\Box B$ in $\mathcal{Z}$, dann ist auch $\sigma.n\ \neg B$ in $\mathcal{Z}$, für eine in W von $\mathcal{Z}$ vorkommende Signatur der Form $\sigma.n$. Dann muss es aber ein $\sigma' \in W$ geben, nämlich $\sigma.n$, so dass $\sigma R \sigma'$, und aufgrund der Induktionsannahme gilt $\mathfrak{M}, \sigma' \not\models B$. Daraus folgt $\mathfrak{M}, \sigma \not\models \Box B$.

(Restliche Fälle als Übungsaufgabe.) QED

Theorem 3.36 (Vollständigkeit) *Wenn A K-gültig ist, dann gibt es einen K-Tableaubeweis für A.*

Beweis. Per Kontraposition; d. h. wir zeigen, dass wenn A keinen K-Tableaubeweis hat, dann kann A nicht K-gültig sein.
Angenommen A hat keinen K-Tableaubeweis. Wir entwickeln ein saturiertes K-Tableau $\mathcal{T}$ mit Wurzelknoten $1\ \neg A$. (Dies ist aufgrund von Lemma 3.34 immer möglich.)
Nach Annahme ist $\mathcal{T}$ offen. Sei $\mathcal{Z}$ ein offener Zweig in $\mathcal{T}$. Mit dem oben angegebenen Verfahren zur Modellkonstruktion erhalten wir ein Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R, h \rangle$, für das Lemma 3.35 gilt. Insbesondere gilt: Falls eine signierte Formel der Form $\sigma\ \neg B$ in $\mathcal{Z}$ vorkommt, dann gibt es eine Welt $\sigma \in W$, so dass $\mathfrak{M}, \sigma \not\models B$. Nun kommt aber $1\ \neg A$ als Wurzelknoten in jedem Zweig von $\mathcal{T}$ vor, also insbesondere auch in $\mathcal{Z}$. Also gilt $\mathfrak{M}, 1 \not\models A$. Somit kann A nicht K-gültig sein. QED

Für die Tableaukalküle für D, T, B usw. lassen sich entsprechende Korrektheits- und Vollständigkeitsresultate beweisen.

3.7.5 Tableaux mit Annahmen

Wir haben bisher nur Tableaux ohne Annahmen betrachtet. Man kann diese aber entsprechend erweitern, und dann zeigen: Es gibt einen Tableaubeweis für A aus Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n \models A$.
Analog zur Unterscheidung zwischen lokaler und globaler logischer Folgerung kann auch bei Tableaux zwischen lokaler und globaler Verwendung von Annahmen unterschieden werden.

Definition 3.37 (i) Die *lokale Verwendung einer Annahme A* besteht in der Erweiterung eines offenen Zweigs um die signierte Formel $1\ A$. *lokale Annahme*

(ii) Die *globale Verwendung einer Annahme A* besteht in der Erweiterung eines offenen Zweigs um die signierte Formel $\sigma\ A$, wobei σ schon in diesem Zweig vorkommen muss. *globale Annahme*

(iii) Einen Tableaubeweis für A aus Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ bezeichnen wir als *(Tableau-) Ableitung* von A aus $A_1, \ldots, A_n$. *Tableauableitung*

(iv) Werden in einem geschlossenen Tableau für A alle Annahmen $A_1, \dots, A_n$ lokal verwendet, so schreiben wir $A_1, \dots, A_n \vdash^l A$; falls alle Annahmen global verwendet werden, schreiben wir $A_1, \dots, A_n \vdash^g A$.

Beispiel. Wir zeigen $\Box p \to p \vdash^g \Box\Box p \to \Box p$:

$$
\begin{array}{lll|ll}
1. & & & 1\ \neg(\Box\Box p \to \Box p) & \\
2. & & & 1\ \Box\Box p & (\neg\to, 1) \\
3. & & & 1\ \neg\Box p & (\neg\to, 1) \\
4. & & & 1.1\ \neg p & (\neg\Box, 3) \\
5. & & & 1.1\ \Box p & (\Box, 2) \\
6. & & & 1.1\ \Box p \to p & (\text{globale Annahme}) \\
7. & \dfrac{1.1\ \neg\Box p}{5 \times 7} & (\to, 6) & \dfrac{1.1\ p}{4 \times 7} & (\to, 6)
\end{array}
$$

Bemerkung. Es gilt jeweils Korrektheit und Vollständigkeit:

$$
\begin{aligned}
A_1, \dots, A_n \vdash^l A &\iff A_1, \dots, A_n \models^l A \\
A_1, \dots, A_n \vdash^g A &\iff A_1, \dots, A_n \models^g A
\end{aligned}
$$

(Entsprechend auch für die anderen Standardmodallogiken.)

4 Quantorenlogik

Bevor wir die modale Quantorenlogik behandeln, geben wir zunächst Syntax und Semantik der klassischen (nicht-modalen) Quantorenlogik an, und führen quantorenlogische Tableaux ein. Die modale Quantorenlogik kann dann als Erweiterung angegeben werden.

4.1 Syntax der Quantorenlogik

Definition 4.1 Wir erweitern das *Alphabet* um folgende Zeichen: *Alphabet*

(i) *Quantoren*: $\forall$ (Allquantor, "Für alle") und $\exists$ (Existenzquantor, "Es gibt").

(ii) *Terme*:
   - *Variablen*: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
   - *Individuenkonstanten* (kurz: *Konstanten*): $k, k', k_1, k_2, \ldots, l, \ldots$

(iii) *Relationszeichen* (bzw. *Prädikatsymbole*): $P, Q, R, \ldots$ (Gegebenenfalls mit fester Stelligkeit. 0-stellige Relationszeichen entsprechen Aussagesymbolen.)

(iv) Komma: ,

Definition 4.2 Wir erweitern die Definition von *Formeln* wie folgt: *Formel*

(i) Ist R ein n-stelliges Relationszeichen und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel, die wir *atomare Formel* bzw. *Atom* nennen. (Abkürzend kann man auch $Rt_1 \ldots t_n$ schreiben.)

(ii) Ist A eine Formel und ist x eine Variable, dann sind $\forall xA$ und $\exists xA$ ebenfalls Formeln.

Bemerkungen. (i) Die Quantoren binden stärker als die übrigen logischen Konstanten. Klammerersparnis entsprechend. *Bindungsstärke*

(ii) Das *Vorkommen* eines Zeichens sei nur anhand eines Beispiels erläutert: In der Formel $\forall xP(x) \wedge Q(x, y))$ kommt x dreimal und y einmal vor. *Vorkommen*

Definition 4.3 Wir definieren *freie* bzw. *gebundene* Variablenvorkommen: *frei/gebunden*

(i) Jedes Variablenvorkommen in einer atomaren Formel ist frei.

(ii) Die freien bzw. gebundenen Variablenvorkommen in A und B sind auch freie bzw. gebundene Variablenvorkommen in $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$. (Ebenso für $\Box A$ und $\Diamond A$.)

(iii) Jedes freie Vorkommen von x in A ist ein gebundenes Vorkommen von x in $\forall xA$ und $\exists xA$.

   Alle anderen freien bzw. gebundenen Variablenvorkommen in A sind auch freie bzw. gebundene Variablenvorkommen in $\forall xA$ und $\exists xA$.

   Die freien Vorkommen von x in A liegen im *Wirkungsbereich* des $\forall$- bzw. $\exists$-Quantors in $\forall xA$ bzw. $\exists xA$.

Eine Formel ohne freie Variablenvorkommen heißt auch *geschlossen*, andernfalls *offen*.

Bemerkung. Wir schreiben z. B. $A(x)$, um auszudrücken, dass x in A frei vorkommen kann. (A steht hier für eine beliebige Formel; d. h. $A(x)$ steht i. A. nicht etwa für ein Atom wie z. B. $P(x)$.)

Beispiele. Für die Variablenvorkommen gilt:

(i) $\exists z(Q(z,k) \to \neg R(x,y,y))$ – x, y sind frei; z ist gebunden.
(In $\exists z$ ist z weder frei noch gebunden.)

(ii) $\exists y(P(x,y) \lor \exists z(Q(z,k) \to \neg R(x,y,y)))$ – x ist frei; y, z sind gebunden.
(In $\exists y$ ist y weder frei noch gebunden.)

(iii) $P(x) \land \forall x P(x)$ – das erste Vorkommen von x ist frei, das dritte gebunden; das zweite ist weder frei noch gebunden.

4.2 Semantik der Quantorenlogik

Definition 4.4 Eine *Struktur* für eine Sprache $\mathscr{L}$ ist ein geordnetes Paar $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$, wobei M eine nichtleere Menge ist und $\mathcal{I}$ eine Funktion, die jedem Symbol aus $\mathscr{L}$ eine *Interpretation* zuordnet wie folgt: *Struktur* *Interpretation*

(i) $\mathcal{I}(k) \in M$ für Konstanten $k \in \mathscr{L}$,

(ii) $\mathcal{I}(R) \subseteq M^n$, falls $R \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Relationszeichen ist $(n \geq 1)$,

(iii) $\mathcal{I}(R) \in \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$, falls $R \in \mathscr{L}$ ein 0-stelliges Relationszeichen, d. h. ein Aussagesymbol ist, und $\mathrm{w} := \emptyset$, $\mathrm{f} := M$.

Die Menge M heißt *Gegenstandsbereich* (oder auch *Individuenbereich*, *Universum*).

Beispiel. $\mathscr{L}$ enthalte lediglich die Konstanten $k', k_1, k_2, \ldots$ und ein 2-stelliges Relationszeichen Q.

(i) Der Gegenstandsbereich M sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

(ii) die Interpretation der Konstanten sei durch $\mathcal{I}(k') = 5$ und $\mathcal{I}(k_n) = n$ gegeben (d. h. $\mathcal{I}$ ordnet der Individuenkonstante (d. h. dem *Term*) $k' \in \mathscr{L}$ als *Gegenstand* die Zahl $5 \in \mathbb{N}$ zu; den Individuenkonstanten (d. h. den *Termen*) $k_n \in \mathscr{L}$ ordnet $\mathcal{I}$ als *Gegenstände* die Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu, z. B. $\mathcal{I}(k_7) = 7$),

(iii) und die Interpretation von Q sei $\mathcal{I}(Q) = \{\langle n, n' \rangle \mid n < n'\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (d. h. das 2-stellige Relations*zeichen* wird durch $\mathcal{I}$ als die 2-stellige kleiner-als-*Relation* auf $\mathbb{N}^2$ interpretiert; dann ist z. B. $\langle 5, 3 \rangle \notin \mathcal{I}(Q)$, da $5 \not< 3$).

Dann ist $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur für die Sprache $\mathscr{L}$.

Durch eine Struktur $\langle M, \mathcal{I} \rangle$ für eine Sprache $\mathscr{L}$ werden den *Konstanten* in $\mathscr{L}$ also *Gegenstände* in M zugeordnet. Um beliebige Terme, also auch Variablen, behandeln zu können, benötigen wir zusätzlich Variablenbelegungen.

Definition 4.5 Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur. Eine *Variablenbelegung* in $\mathfrak{M}$ ist eine Funktion v, die jeder Variable x einen Wert $v(x) \in M$ zuordnet. (Also $v : \textsc{Var} \to M$, wobei $\textsc{Var}$ die Menge aller Variablen sei.) *Variablenbelegung*
Unterscheidet sich eine Variablenbelegung v' höchstens durch die Zuordnung $v'(x) = m \in M$ von einer Variablenbelegung v, so schreiben wir $v[x \mapsto m]$ für v'. Es gilt

$$v[x \mapsto m](y) = \begin{cases} m & \text{falls } x = y, \\ v(y) & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Die Variablenbelegung $v[x \mapsto m]$ heißt x-*Variante* von v. x-*Variante*

Beispiele. Wir erweitern die Sprache $\mathscr{L}$ aus dem vorherigen Beispiel um die Variablen x, y, z, z_1, und behalten die dort angegebene Struktur $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ bei.

(i) Dann ist durch

$$v(x) = 4, \quad v(y) = 7, \quad v(z) = 0, \quad v(z_1) = 7$$

eine Variablenbelegung v in $\mathfrak{N}$ gegeben.

(ii) Die durch die Zuordnungen

$$v'(x) = 4, \quad v'(y) = 11, \quad v'(z) = 0, \quad v'(z_1) = 7$$

gegebene Variablenbelegung v' ist eine y-Variante von v, da $v' = v[y \mapsto 11]$.

(iii) Desweiteren ist z. B. $v[z \mapsto 0]$, also die Variablenbelegung v selbst, eine (triviale) z-Variante von v.

Durch Interpretation $\mathcal{I}$ und Variablenbelegung v können nun allen Termen Gegenstände des Individuenbereichs zugeordnet werden. Durch Kombination von Interpretation und Variablenbelegung erhält man eine Termbelegung.

Definition 4.6 Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur für $\mathscr{L}$, v eine Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$ und TERM die Menge aller Terme. Dann ist die *Termbelegung* als Funktion $[\![\ ]\!]_v^{\mathfrak{M}} : \text{TERM} \to M$ durch $[\![x]\!]_v^{\mathfrak{M}} := v(x)$ (für Variablen x) und $[\![k]\!]_v^{\mathfrak{M}} := \mathcal{I}(k)$ (für Konstanten k) definiert. *Termbelegung*

Beispiel. Für unsere Struktur $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ und die Variablenbelegung v' erhalten wir beispielsweise die Termbelegungen $[\![k_{11}]\!]_{v'}^{\mathfrak{N}} = [\![y]\!]_{v'}^{\mathfrak{N}} = 11$. Für die Variablenbelegung v ist $[\![y]\!]_v^{\mathfrak{N}} = [\![z_1]\!]_v^{\mathfrak{N}} = [\![k_7]\!]_v^{\mathfrak{N}} = 7$.

Definition 4.7 Sei $\mathfrak{M}$ eine Struktur $\langle M, \mathcal{I} \rangle$, v eine Variablenbelegung und $[\![\ ]\!]_v^{\mathfrak{M}}$ eine Termbelegung. Wir definieren die Relation $\mathfrak{M} \vDash_v A$ ("*A gilt in der Struktur $\mathfrak{M}$ unter der Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$*") wie folgt: *A gilt in $\mathfrak{M}$ unter v*

Für n-stellige Relationszeichen R:

$$\mathfrak{M} \vDash_v R(t_1, \ldots, t_n) \;:\Longleftrightarrow\; \langle [\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{M}}, \ldots, [\![t_n]\!]_v^{\mathfrak{M}} \rangle \in \mathcal{I}(R)$$

Für die übrigen Formeln:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \vDash_v \neg A \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \nvDash_v A \\
\mathfrak{M} \vDash_v A \wedge B \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \vDash_v A \text{ und } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
\mathfrak{M} \vDash_v A \vee B \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \vDash_v A \text{ oder } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
\mathfrak{M} \vDash_v A \to B \;&:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \nvDash_v A \text{ oder } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
&\;\Longleftrightarrow\; \text{Wenn } \mathfrak{M} \vDash_v A, \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash_v B \\
\mathfrak{M} \vDash_v \forall x A(x) \;&:\Longleftrightarrow\; \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \vDash_{v'} A(x) \\
\mathfrak{M} \vDash_v \exists x A(x) \;&:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \vDash_{v'} A(x)
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Berücksichtigung von Variablenbelegungen ist nötig, um auch bei offenen Formeln eine Aussage über deren Gültigkeit machen zu können.
Sei z. B. $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ mit $M = \{m, m'\}$ und $\mathcal{I}(P) = \{m, m'\}$ für das 1-stellige Relationszeichen P. Die Formel $\forall x P(x)$ soll in $\mathfrak{M}$ unter einer Variablenbelegung v genau dann gelten, wenn die offene Formel $P(x)$ für alle Gegenstände in M gilt. Um Letzteres

auszudrücken, können wir jedoch *nicht* einfach schreiben, dass $P(m)$ und $P(m')$ gilt. Denn m und m' sind keine Zeichen unserer Objektsprache, sondern Gegenstände in M; die Ausdrücke “$P(m)$” und “$P(m')$” sind somit keine Formeln. Hingegen können wir sagen, dass die offene Formel $P(x)$ für jede Zuordnung eines Gegenstands in M zur freien Variable x, also hier für die beiden Variablenbelegungen $v' = v[x \mapsto m]$ und $v'' = v[x \mapsto m']$, gilt. Es ist sowohl $\mathfrak{M} \vDash_{v'} P(x)$ als auch $\mathfrak{M} \vDash_{v''} P(x)$, da sowohl $v'(x) = m \in \mathcal{I}(P)$ als auch $v''(x) = m' \in \mathcal{I}(P)$.
Das begriffliche Hilfsmittel der x-Varianten benötigen wir auch, um eine Aussage über die Gültigkeit von z. B. $\forall x Q(x, y)$ in $\mathfrak{M}$ unter einer Variablenbelegung v machen zu können. Sei wieder $M = \{m, m'\}$, $\mathcal{I}(Q) = \{\langle m, m\rangle, \langle m', m\rangle\}$ für das 2-stellige Relationszeichen Q, und $v(y) = m$. Sowohl für die x-Variante $v' = v[x \mapsto m]$ als auch für die x-Variante $v'' = v[x \mapsto m']$ gilt $Q(x, y)$, denn $\langle [\![x]\!]^{\mathfrak{M}}_{v'}, [\![y]\!]^{\mathfrak{M}}_{v'}\rangle = \langle m, m\rangle \in \mathcal{I}(Q)$ und $\langle [\![x]\!]^{\mathfrak{M}}_{v''}, [\![y]\!]^{\mathfrak{M}}_{v''}\rangle = \langle m', m\rangle \in \mathcal{I}(Q)$. Die offene Formel $Q(x, y)$ gilt also für jede x-Variante von v in $\mathfrak{M}$. Somit gilt auch $\forall x Q(x, y)$ in $\mathfrak{M}$ unter v.

Definition 4.8 Wir definieren

(i) *Gültigkeit in einer Struktur* (“*A gilt in der Struktur $\mathfrak{M}$*”): *Gültigkeit in einer Struktur*

$$\mathfrak{M} \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \vDash_v A \text{ für alle Variablenbelegungen } v \text{ in } \mathfrak{M}$$

Falls A in $\mathfrak{M}$ gilt, heißt die Struktur $\mathfrak{M}$ *Modell von A*. (Falls $\mathfrak{M}$ kein Modell von A ist, schreiben wir auch $\mathfrak{M} \nvDash A$.) *Modell von A*

(ii) A heißt *erfüllbar* (oder *konsistent*), falls es eine Struktur $\mathfrak{M}$ und eine Variablenbelegung v gibt, so dass $\mathfrak{M} \vDash_v A$. *Erfüllbarkeit*

Ist A eine geschlossene Formel, dann heißt A *erfüllbar*, falls es eine Struktur $\mathfrak{M}$ gibt, so dass $\mathfrak{M} \vDash A$, d. h. falls A ein Modell hat.

Andernfalls heißt A *unerfüllbar* (oder *inkonsistent* oder *kontradiktorisch*).

(iii) *Allgemeingültigkeit*: $\vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \vDash A$ für alle Strukturen $\mathfrak{M}$. *Allgemeingültigkeit*

(iv) A heißt *kontingent*, falls A erfüllbar aber nicht allgemeingültig ist.

Beispiele. Wir betrachten wieder die Struktur $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I}\rangle$.

(i) Es ist $\mathfrak{N} \nvDash_v Q(k', k_3)$, da $\langle [\![k']\!]^{\mathfrak{N}}_v, [\![k_3]\!]^{\mathfrak{N}}_v\rangle = \langle 5, 3\rangle \notin \mathcal{I}(Q)$. (Es ist $5 \nless 3$.)

Die Variablenbelegung v spielt keine Rolle, da $Q(k', k_3)$ eine geschlossene Formel ist. Folglich gilt $\mathfrak{N} \nvDash_v Q(k', k_3)$ für alle v. Also $\mathfrak{N} \nvDash Q(k', k_3)$.

Die Formel $Q(k', k_3)$ ist jedoch erfüllbar, da z. B. die Struktur $\mathfrak{N}' = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I}'\rangle$ mit $\mathcal{I}'(Q) = \{\langle n, n'\rangle \mid n > n'\} \subseteq \mathbb{N}^2$, und $\mathcal{I}'(k') = 5$, $\mathcal{I}'(k_3) = 3$, ein Modell von $Q(k', k_3)$ ist, d. h. $\mathfrak{N}' \vDash Q(k', k_3)$.

(ii) Sei v' die Variablenbelegung mit $v'(y) = 11$ und $v'(z_1) = 7$. Dann ist $\mathfrak{N} \vDash_{v'} Q(z_1, y)$, da $\langle [\![z_1]\!]^{\mathfrak{N}}_{v'}, [\![y]\!]^{\mathfrak{N}}_{v'}\rangle = \langle 7, 11\rangle \in \mathcal{I}(Q)$. (Es ist $7 < 11$.)

Die Formel $Q(z_1, y)$ ist also erfüllbar. Die Struktur $\mathfrak{N}$ ist jedoch kein Modell von $Q(z_1, y)$, da es eine Variablenbelegung v in $\mathfrak{N}$ gibt (z. B. $v(y) = v(z_1) = 7$), so dass $\mathfrak{N} \nvDash_v Q(z_1, y)$.

(iii) Für beliebige Variablenbelegungen v gilt $\mathfrak{N} \vDash_v \forall x \exists y Q(x, y)$.

$$\mathfrak{N} \vDash_v \forall x \exists y Q(x, y) \iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{N}\text{: } \mathfrak{N} \vDash_{v'} \exists y Q(x, y)$$

$$\iff \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{N}$$
$$\text{gibt es eine } y\text{-Variante } v'' \text{ von } v' \text{ in } \mathfrak{N}\text{: } \mathfrak{N} \vDash_{v''} Q(x, y)$$

Sei v beliebig, und $v' = v[x \mapsto n]$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Setze $v'' = v'[y \mapsto n+1]$. Dann ist $\mathfrak{N} \vDash_{v''} Q(x, y)$, da $\langle [\![x]\!]^{\mathfrak{N}}_{v''}, [\![y]\!]^{\mathfrak{N}}_{v''} \rangle = \langle n, n+1 \rangle \in \mathcal{I}(Q)$.

Da v beliebig, gilt $\mathfrak{N} \vDash \forall x \exists y Q(x, y)$. Die Struktur $\mathfrak{N}$ ist also ein Modell von $\forall x \exists y Q(x, y)$.

Keine der betrachteten Formeln ist allgemeingültig. Ein Gegenmodell ist z. B. die Struktur $\mathfrak{M} = \langle \{m\}, \mathcal{I}'' \rangle$ mit $\mathcal{I}''(Q) = \{\langle m, m' \rangle \mid m \neq m'\}$ (und $\mathcal{I}''(k) = m$ für alle Konstanten $k \in \mathscr{L}$).

Bemerkung. Für beliebige (offene oder geschlossene) Formeln A und B gilt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \vDash \neg A &\implies \mathfrak{M} \nvDash A \\
\mathfrak{M} \vDash A \to B &\implies \text{Wenn } \mathfrak{M} \vDash A, \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash B \\
\mathfrak{M} \vDash A \text{ oder } \mathfrak{M} \vDash B &\implies \mathfrak{M} \vDash A \vee B
\end{aligned}$$

Die umgekehrte Richtung "$\Longleftarrow$" gilt i. A. jeweils *nicht*. Es gilt aber

$$\mathfrak{M} \vDash A \wedge B \iff \mathfrak{M} \vDash A \text{ und } \mathfrak{M} \vDash B$$

Ein Gegenbeispiel für $\mathfrak{M} \nvDash A \implies \mathfrak{M} \vDash \neg A$ ist die offene Formel $R(x, y)$ zusammen mit der Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$, wobei $M = \{0, 1\}$ und $\mathcal{I}(R) = \{\langle n, n' \rangle \mid n = n'\} \subseteq M^2$. Es gilt $\mathfrak{M} \nvDash R(x, y)$, da es eine Variablenbelegung v gibt, so dass $\mathfrak{M} \nvDash_v R(x, y)$. Ist z. B. $v(x) = 0$ und $v(y) = 1$, so ist $\langle [\![x]\!]^{\mathfrak{M}}_v, [\![y]\!]^{\mathfrak{M}}_v \rangle = \langle 0, 1 \rangle \notin \mathcal{I}(R)$, da $0 \neq 1$. Hingegen gilt $\mathfrak{M} \vDash \neg R(x, y)$ *nicht*, da es eine Variablenbelegung v' gibt, z. B. $v'(x) = v'(y) = 1$, so dass $\mathfrak{M} \nvDash_{v'} \neg R(x, y)$, und somit $\mathfrak{M} \nvDash \neg R(x, y)$.

Für *geschlossene* Formeln A und B gelten jeweils beide Richtungen, d. h. es ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \vDash \neg A &\iff \mathfrak{M} \nvDash A \\
\mathfrak{M} \vDash A \to B &\iff \text{Wenn } \mathfrak{M} \vDash A, \text{ dann } \mathfrak{M} \vDash B \\
\mathfrak{M} \vDash A \vee B &\iff \mathfrak{M} \vDash A \text{ oder } \mathfrak{M} \vDash B
\end{aligned}$$

(und, wie schon festgestellt, $\mathfrak{M} \vDash A \wedge B \iff \mathfrak{M} \vDash A$ und $\mathfrak{M} \vDash B$).

Definition 4.9 Sei $\Gamma \subseteq \mathscr{L}$ eine Formelmenge und $A \in \mathscr{L}$ eine Formel. Wir schreiben $\mathfrak{M} \vDash_v \Gamma$, falls $\mathfrak{M} \vDash_v B$ für alle $B \in \Gamma$. Aus Γ *folgt (quantoren-)logisch* A (formal: $\Gamma \vDash A$), falls für alle Strukturen $\mathfrak{M}$ für $\mathscr{L}$ und alle Variablenbelegungen v in $\mathfrak{M}$ gilt: Wenn $\mathfrak{M} \vDash_v \Gamma$, dann $\mathfrak{M} \vDash_v A$. *logische Folgerung*

Bemerkung. Für Formeln mit freien Variablen ist die logische Folgerung hier so definiert, dass $\Gamma \vDash A$ für jede Variablenbelegung gilt. Für geschlossene Formeln kann $\Gamma \vDash A$ (wobei $\Gamma \subseteq \mathscr{L}$ und $A \in \mathscr{L}$) definiert werden durch die Bedingung: Wenn $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, dann $\mathfrak{M} \vDash A$ für alle Strukturen $\mathfrak{M}$ für $\mathscr{L}$.

Theorem 4.10 (Unentscheidbarkeit der Quantorenlogik) *Es gibt kein Verfahren, das für beliebige Formelmengen Γ und beliebige Formeln A entscheidet, ob $\Gamma \vDash A$.*

Erfüllbarkeit ist ebenfalls unentscheidbar.

4.3 Quantorenlogische Tableaux

Für quantorenlogische Tableaux erweitern wir unser Alphabet um eine abzählbar unendliche Menge von neuen Konstanten $a, b, c, \ldots$, die wir *Individuenparameter* (kurz: *Parameter*) nennen. Dadurch ist sichergestellt, dass wir unbegrenzt viele Konstanten zur Verfügung haben. In der Ausgangsformel komme kein Parameter vor.

Individuenparameter

Definition 4.11 Ein *quantorenlogisches Tableau* ist ein aussagenlogisches Tableau, in dem zusätzlich die folgenden Regeln verwendet werden dürfen:

quantorenlogisches Tableau

(i) Für eine beliebige Konstante a (einschließlich Parameter):

$$\gamma\text{-}\mathit{Regeln}\left\{\ (\forall)\ \frac{\sigma\ \forall x A(x)}{\sigma\ A(a)} \qquad\qquad (\neg\exists)\ \frac{\sigma\ \neg\exists x A(x)}{\sigma\ \neg A(a)}\right.$$

(ii) Für einen Parameter a, der im Zweig noch nicht vorkommt:

$$\delta\text{-}\mathit{Regeln}\left\{\ (\exists)\ \frac{\sigma\ \exists x A(x)}{\sigma\ A(a)} \qquad\qquad (\neg\forall)\ \frac{\sigma\ \neg\forall x A(x)}{\sigma\ \neg A(a)}\right.$$

Hierbei drückt $A(a)$ aus, dass die freien Vorkommen der Variable x in $A(x)$ durch den Parameter a ersetzt wurden.
(Die Signaturen σ benötigen wir erst bei modalen quantorenlogischen Tableaux. Bei rein quantorenlogischen Tableaux können sie weggelassen werden.)

Beispiel. Tableaubeweis für $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$:

1.	$1\ \neg(\exists x\forall y P(x,y) \to \forall y\exists x P(x,y))$	
2.	$1\ \exists x\forall y P(x,y)$	$(\neg\to, 1)$
3.	$1\ \neg\forall y\exists x P(x,y)$	$(\neg\to, 1)$
4.	$1\ \forall y P(a,y)$	$(\exists, 2)$
5.	$1\ \neg\exists x P(x,b)$	$(\neg\forall, 3)$
6.	$1\ \neg P(a,b)$	$(\neg\exists, 5)$
7.	$1\ P(a,b)$	$(\forall, 4)$
	6×7	

Das Beispiel zeigt, dass δ-Regeln vor γ-Regeln angewendet werden sollten. In Zeile 5 wurde erst die δ-Regel $(\neg\forall)$ auf Zeile 3 angewandt, und danach in Zeile 7 die γ-Regel $(\forall)$ auf Zeile 4. Bei umgekehrter Reihenfolge wäre kein Widerspruch aufgetreten, da bei Anwendung der δ-Regel ein neuer Parameter gewählt werden muss.

Beispiel. Tableaubeweis für $\exists y(P(y) \to \forall x P(x))$:

1.	$1\ \neg\exists y(P(y) \to \forall x P(x))$	
2.	$1\ \neg(P(a) \to \forall x P(x))$	$(\neg\exists, 1)$
3.	$1\ P(a)$	$(\neg\to, 2)$
4.	$1\ \neg\forall x P(x)$	$(\neg\to, 2)$
5.	$1\ \neg P(b)$	$(\neg\forall, 4)$
6.	$1\ \neg(P(b) \to \forall x P(x))$	$(\neg\exists, 1)$
7.	$1\ P(b)$	$(\neg\to, 6)$
8.	$1\ \neg\forall x P(x)$	$(\neg\to, 6)$
	5×7	

Hier ist die zweimalige Anwendung der γ-Regel $(\neg\exists)$ auf Zeile 1 in den Zeilen 2 und 6 wesentlich, um ein geschlossenes Tableau zu erhalten.

Beispiel. Tableau für $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$
\begin{array}{lll}
1. & 1\ \neg(\exists x P(x) \to \forall x P(x)) & \\
2. & 1\ \exists x P(x) & (\neg\to, 1) \\
3. & 1\ \neg\forall x P(x) & (\neg\to, 1) \\
4. & 1\ P(a) & (\exists, 2) \\
5. & 1\ \neg P(b) & (\neg\forall, 3)
\end{array}
$$

Das Tableau kann nicht geschlossen werden, da bei jeder erneuten Anwendung der δ-Regeln $(\exists)$ und $(\neg\forall)$ auf die Zeilen 2 und 3 ein neuer Parameter gewählt werden muss.

Beispiel. Tableau für $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$:

$$
\begin{array}{r|cc|cc|cc|cc}
1. & \multicolumn{8}{c}{1\ \neg(\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x))} \\
2. & \multicolumn{6}{c}{1\ \forall x(P(x) \vee Q(x))} & & (\neg\to, 1) \\
3. & \multicolumn{6}{c}{1\ \neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))} & & (\neg\to, 1) \\
4. & \multicolumn{6}{c}{1\ P(a) \vee Q(a)} & & (\forall, 2) \\
5. & \multicolumn{6}{c}{1\ \neg\forall x P(x)} & & (\neg\vee, 3) \\
6. & \multicolumn{6}{c}{1\ \neg\forall x Q(x)} & & (\neg\vee, 3) \\
7. & \multicolumn{3}{c}{1\ P(a)} & (\vee, 4) & \multicolumn{3}{c}{1\ Q(a)} & (\vee, 4) \\
8. & \multicolumn{3}{c}{1\ \neg P(b)} & (\neg\forall, 5) & \multicolumn{3}{c}{1\ \neg P(b)} & (\neg\forall, 5) \\
9. & \multicolumn{3}{c}{1\ \neg Q(c)} & (\neg\forall, 6) & \multicolumn{3}{c}{1\ \neg Q(c)} & (\neg\forall, 6) \\
10. & \multicolumn{3}{c}{1\ P(b) \vee Q(b)} & (\forall, 2) & \multicolumn{3}{c}{1\ P(b) \vee Q(b)} & (\forall, 2) \\
11. & \dfrac{1\ P(b)}{8 \times 11} & (\vee, 10) & 1\ Q(b) & (\vee, 10) & \dfrac{1\ P(b)}{8 \times 11} & (\vee, 10) & 1\ Q(b) & (\vee, 10) \\
 & & & \vdots & & & & \vdots &
\end{array}
$$

Dieses Tableau kann nicht geschlossen werden, da auch durch wiederholte Anwendung der γ-Regel $(\forall)$ auf Zeile 2 nicht alle Zweige geschlossen werden können.

5 Modale Quantorenlogik

Literatur

– M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.

5.1 *De re* und *de dicto*

Die Modaloperatoren $\Box$ und $\Diamond$ können als Quantoren aufgefasst werden, deren Gegenstandsbereich eine Menge (erreichbarer) möglicher Welten ist. In der modalen Quantorenlogik kommen als weitere Quantoren $\forall$ und $\exists$ hinzu, mit denen über Gegenstände in möglichen Welten quantifiziert werden kann. Bei beiden Arten von Quantoren ist der Wirkungsbereich die unmittelbare Teilformel (z. B. ist A in $\Box A$ im Wirkungsbereich von $\Box$). Quantoren einer Art können im Wirkungsbereich von Quantoren der anderen Art vorkommen. Dies ermöglicht die semantische Unterscheidung zwischen modalen Eigenschaften von Gegenständen (*de re*) und von Aussagen (*de dicto*).

Beispiel. Wir betrachten den Satz

> Alles ist notwendigerweise P.

Es können zwei Lesarten unterschieden werden:

> Es ist notwendig wahr, dass alles P ist.

und

> Jeder Gegenstand ist derart, dass er notwendigerweise P ist.

Die erste Lesart ist *de dicto*, da ausgedrückt wird, dass eine Aussage (“alles ist P”) notwendig wahr ist. Die zweite Lesart ist *de re*, da ausgedrückt wird, dass Gegenstände eine Eigenschaft notwendigerweise haben.

Beispiel. Der Satz

> Etwas existiert notwendigerweise

drückt in der *de dicto*-Lesart aus:

> Es ist notwendig wahr, dass etwas existiert.

Setzt man für jede (erreichbare) mögliche Welt einen nichtleeren Gegenstandsbereich voraus (wie auch in der Semantik der Quantorenlogik für jede Struktur geschehen), so gilt diese Aussage. In der *de re*-Lesart drückt der Satz hingegen aus:

> Es gibt etwas, das notwendigerweise existiert.

Damit diese Aussage gilt, muss es einen Gegenstand geben, der in jeder (erreichbaren) möglichen Welt existiert.

Beispiel. Wir betrachten den Satz

> Die Zahl der Planeten ist notwendigerweise gerade.

Gemäß der aktuellen Planetendefinition gibt es (in unserem Sonnensystem) 8 Planeten. In der *de dicto*-Lesart sagt der Satz, dass die Aussage "die Zahl der Planeten ist gerade" notwendig wahr ist. Dies ist nicht der Fall, da es eine (vorstellbare, und in diesem Sinne erreichbare) mögliche Welt gibt, in der auch Pluto die Umgebung seiner Bahn bereinigt hat (also kein Zwergplanet ist, sondern der neunte Planet), und die Zahl der Planeten somit nicht in jeder (im angegebenen Sinne erreichbaren) möglichen Welt gerade ist. In der *de re*-Lesart sagt der Satz hingegen über die Zahl der Planeten, dass diese Zahl notwendigerweise gerade ist. Dies ist der Fall, da die Zahl 8 in jeder möglichen Welt gerade ist.

Im Rahmen der modalen Quantorenlogik ist die Unterscheidung zwischen *de re* und *de dicto* eine Unterscheidung bezüglich des Wirkungsbereichs von Quantoren und Modaloperatoren.
Der Satz

Alles ist notwendigerweise P

wird *de dicto* als

$$\Box \forall x P(x)$$

formalisiert. Diese Formel gilt einer möglichen Welt, falls die Teilformel $\forall x P(x)$ in allen von dieser Welt aus erreichbaren Welten gilt, d. h. falls in jeder dieser Welten alle jeweils dort vorhandenen Gegenstände die dem Prädikatsymbol P zugeordnete Eigenschaft haben. Die *de re*-Formalisierung ist

$$\forall x \Box P(x)$$

Diese Formel gilt in einer möglichen Welt, falls für alle in dieser Welt vorhandenen Gegenstände gilt, dass sie in jeder erreichbaren Welt die dem Prädikatsymbol P zugeordnete Eigenschaft haben.
Entsprechend formalisiert man den Satz

Etwas ist notwendigerweise P

de dicto als

$$\Box \exists x P(x)$$

Diese Formel gilt in einer möglichen Welt, falls es in jeder von dieser Welt aus erreichbaren Welt einen Gegenstand gibt, für den P gilt. Der Gegenstand kann also von Welt zu Welt verschieden sein; es muss nur jeweils P für ihn gelten. Die *de re*-Formalisierung lautet

$$\exists x \Box P(x)$$

Diese Formel gilt in einer möglichen Welt, falls es einen Gegenstand in ihr gibt, für den in jeder von dieser Welt aus erreichbaren Welt P gilt. Hier muss P also in jeder der erreichbaren Welten auf denselben Gegenstand zutreffen.

Die Verwendung von Individuenkonstanten bereitet hier Schwierigkeiten. Angenommen, die Konstante k stehe für "die Zahl der Planeten" und das Prädikatsymbol P für die Eigenschaft "ist gerade". Den Satz

Die Zahl der Planeten ist notwendigerweise gerade kann man dann in der Sprache der modalen Quantorenlogik nur *de dicto* als

$$\Box P(k)$$

formalisieren. Eine Formalisierung *de re* ist nicht ohne Weiteres möglich. Dies ist ein Defizit der modalen Quantorenlogik.
Eine Unterscheidung zwischen *de re* und *de dicto* bei Verwendung von Konstanten gelingt erst durch eine Spracherweiterung, bei der man einen weiteren variablenbindenden Operator λ, die sogenannte *Prädikatabstraktion*, zur Verfügung hat. Die Bedeutung der Prädikatabstraktion erläutern wir hier nur anhand einiger Beispiele:

(i) $\langle \lambda x.P(x) \rangle$ steht für "die Eigenschaft, P zu sein".

(ii) $\langle \lambda x.\neg P(x) \wedge Q(x) \rangle$ steht für "die Eigenschaft, nicht P aber Q zu sein".

(iii) $\langle \lambda x.\Box P(x) \rangle$ steht für "die Eigenschaft, notwendig P zu sein".

(iv) $\langle \lambda x.\Box P(x) \rangle(k)$ steht für die Aussage "Die Eigenschaft, notwendig P zu sein, trifft auf k zu".

Für unseren Beispielsatz kann damit unterschieden werden zwischen der *de dicto*-Formalisierung

$$\Box \langle \lambda x.P(x) \rangle(k)$$

("Es ist notwendig, dass die Eigenschaft, P zu sein, auf k zutrifft" bzw. "Es ist notwendig, dass k gerade ist") und der *de re*-Formalisierung

$$\langle \lambda x.\Box P(x) \rangle(k)$$

("Die Eigenschaft, notwendig P zu sein, trifft auf k zu" bzw. "k ist derart, dass es notwendigerweise gerade ist").

Bei offenen Formeln spielt die Unterscheidung zwischen *de re* und *de dicto* keine Rolle. Sei das Prädikatsymbol P wieder interpretiert als die Eigenschaft "ist gerade". Dann gilt die offene Formel

$$\Box P(x)$$

z. B. für die Variablenbelegung $v(x) = 8$, da die Zahl 8 in jeder möglichen Welt gerade ist. Für die Variablenbelegung $v'(x) = 9$ gilt die Formel hingegen nicht. Für die Gültigkeit der Formel ist also lediglich der Wert der Variable x relevant, nicht jedoch eine Unterscheidung bezüglich dessen Modalität; d. h. ob der Wert die Eigenschaft z. B. notwendigerweise hat oder nicht, ist irrelevant.

Bezüglich des für die Quantoren $\forall$ und $\exists$ relevanten Gegenstandsbereichs hat man in der Semantik der modalen Quantorenlogik die Wahl, ob man nur *einen* Gegenstandsbereich für alle Welten verwendet, oder ob man von Welt zu Welt *verschiedene* Gegenstandsbereiche zulässt. Wir behandeln zunächst die erste Option, danach auch die zweite.

5.2 Semantik für konstante Gegenstandsbereiche

In der Semantik für konstante Gegenstandsbereiche werden ausschließlich Modelle betrachtet, in denen der Gegenstandsbereich für alle Welten gleich ist.

Definition 5.1 Ein *für konstante Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen* ist ein Tripel $\langle W, R_E, M \rangle$, wobei W wieder eine nichtleere Menge von Welten ist, R_E die Erreichbarkeitsrelation bezeichnet, und M eine nichtleere Menge, der Gegenstandsbereich, ist. *erweiterter Rahmen*

Definition 5.2 Sei $\langle W, R_E, M\rangle$ ein Rahmen und $\mathscr{L}$ eine Sprache. Eine *modallogische Interpretation* $\mathcal{I}$ (für konstante Gegenstandsbereiche) ist eine Funktion, die jeder Welt $w \in W$ eine Interpretation für $\mathscr{L}$ zuordnet wie folgt: *modallogische Interpretation*

(i) $\mathcal{I}(k, w) \in M$ für $w \in W$ und Konstanten $k \in \mathscr{L}$,

(ii) $\mathcal{I}(R, w) \subseteq M^n$, falls $w \in W$ und $R \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Relationszeichen ist für $n \geq 1$,

(iii) $\mathcal{I}(R, w) \in \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$, falls $w \in W$ und $R \in \mathscr{L}$ ein 0-stelliges Relationszeichen, d. h. ein Aussagesymbol ist, und $\mathrm{w} := \emptyset$, $\mathrm{f} := M$.

Definition 5.3 Ein (*quantorenlogisches modales*) *Modell* (für konstante Gegenstandsbereiche) ist ein Quadrupel $\langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$, bestehend aus einem erweiterten Rahmen $\langle W, R_E, M\rangle$ und einer modallogischen Interpretation $\mathcal{I}$. *Modell*

Gültigkeit in einem quantorenlogischen modalen Modell können wir nun als Verallgemeinerung von Gültigkeit in einer quantorenlogischen Struktur definieren, indem wir die um die Modaloperatoren erweiterte Sprache der Quantorenlogik betrachten, und die zusätzliche Abhängigkeit von möglichen Welten berücksichtigen.
Variablenbelegungen v sind definiert wie bisher, werden also unabhängig von Welten $w \in W$ angegeben. Bei Termbelegungen für Konstanten k muss aber die zusätzliche Abhängigkeit der Interpretation $\mathcal{I}$ von Welten $w \in W$ berücksichtigt werden; d. h. es ist $[\![k]\!]_v^{\mathfrak{M}} := \mathcal{I}(k, w)$. Da dies zu weiteren Komplikationen führt (siehe Diskussion zur Unterscheidung zwischen *de re* und *de dicto*), betrachten wir zunächst nur Sprachen $\mathscr{L}$ *ohne* Konstanten. Als Terme kommen also nur Variablen vor, so dass lediglich Variablenbelegungen v eine Rolle spielen.

Definition 5.4 Sei $\mathfrak{M}$ ein quantorenlogisches modales Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$, w eine Welt in W und v eine Variablenbelegung. Wir definieren die Relation $\mathfrak{M}, w \vDash_v A$ ("*A gilt im Modell $\mathfrak{M}$ in der Welt $w \in W$ unter der Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$*") wie folgt: *A gilt in $\mathfrak{M}$ in Welt w unter v*

Für n-stellige Relationszeichen R:

$$\mathfrak{M}, w \vDash_v R(x_1, \ldots, x_n) \;:\Longleftrightarrow\; \langle v(x_1), \ldots, v(x_n)\rangle \in \mathcal{I}(R, w)$$

Für die aussagenlogischen Konnektive:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \vDash_v \neg A &\;:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M} \nvDash_v A \\
\mathfrak{M}, w \vDash_v A \wedge B &\;:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M}, w \vDash_v A \text{ und } \mathfrak{M}, w \vDash_v B \\
\mathfrak{M}, w \vDash_v A \vee B &\;:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M}, w \vDash_v A \text{ oder } \mathfrak{M}, w \vDash_v B \\
\mathfrak{M}, w \vDash_v A \to B &\;:\Longleftrightarrow\; \mathfrak{M}, w \nvDash_v A \text{ oder } \mathfrak{M}, w \vDash_v B \\
&\;\Longleftrightarrow\; \text{Wenn } \mathfrak{M}, w \vDash_v A, \text{ dann } \mathfrak{M}, w \vDash_v B
\end{aligned}$$

Für die Quantoren:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \vDash_v \forall x A(x) &\;:\Longleftrightarrow\; \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M}, w \vDash_{v'} A(x) \\
\mathfrak{M}, w \vDash_v \exists x A(x) &\;:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M}, w \vDash_{v'} A(x)
\end{aligned}$$

Für die Modaloperatoren:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \vDash_v \Box A &\;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } w' \in W\text{: wenn } wR_Ew', \text{ dann } \mathfrak{M}, w' \vDash_v A \\
\mathfrak{M}, w \vDash_v \Diamond A &\;:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt } w' \in W\text{: } wR_Ew' \text{ und } \mathfrak{M}, w' \vDash_v A
\end{aligned}$$

Theorem 5.5 *Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ mit $w \in W$. Seien v und v' zwei Variablenbelegungen in $\mathfrak{M}$ und A eine Formel. Es gilt*

$$\mathfrak{M}, w \vDash_v A \iff \mathfrak{M}, w \vDash_{v'} A$$

falls $v = v'$ für alle freien Variablen in A.

Beweis. Per Induktion über dem Formelaufbau. (Übungsaufgabe) QED

Korollar 5.6 *Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ mit $w \in W$. Für geschlossene Formeln A gilt: Wenn $\mathfrak{M}, w \vDash_v A$ für eine Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$, dann $\mathfrak{M}, w \vDash_v A$ für jede Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$. (Die umgekehrte Richtung gilt trivialerweise.)*

Definition 5.7 Sei $\mathfrak{M}$ ein quantorenlogisches modales Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ und w eine Welt in W. Wir definieren die Relation $\mathfrak{M}, w \vDash A$ ("*A gilt im Modell $\mathfrak{M}$ in der Welt $w \in W$*") wie folgt: $\mathfrak{M}, w \vDash A \;:\iff\; \mathfrak{M}, w \vDash_v A$ für jede Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$.

A gilt in $\mathfrak{M}$ in Welt w

Definition 5.8 Wir definieren

Gültigkeit im Modell:

Gültigkeit im Modell

$$\mathfrak{M} \vDash A \;:\iff\; \text{Für alle } w \in W \text{ von } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M}, w \vDash A$$

Gültigkeit im Rahmen:

Gültigkeit im Rahmen

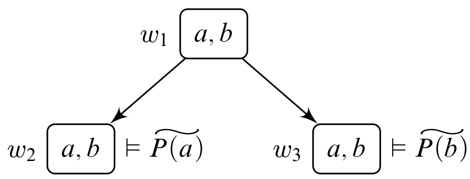
$$\langle W, R_E, M\rangle \vDash A \;:\iff\; \text{Für alle Interpretationen } \mathcal{I}\text{: } \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle \vDash A$$

Allgemeingültigkeit:

Allgemeingültigkeit

$$\vDash A \;:\iff\; \text{Für alle Rahmen } \langle W, R_E, M\rangle\text{: } \langle W, R_E, M\rangle \vDash A$$
$$\iff \text{Für alle Modelle } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M} \vDash A$$

Beispiel. Wir betrachten eine Sprache $\mathscr{L}$, die als einziges Relationszeichen das 1-stellige P enthalte. Sei $\mathfrak{M}$ das quantorenlogische modale Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ mit der Menge möglicher Welten $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, der Erreichbarkeitsrelation $R_E = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle\}$, dem konstanten Gegenstandsbereich $M = \{a, b\}$ und der Interpretation $\mathcal{I}(P, w_1) = \emptyset$, $\mathcal{I}(P, w_2) = \{a\}$ und $\mathcal{I}(P, w_3) = \{b\}$. Als Diagramm:



- Die Elemente von M stehen in den Kästchen der jeweiligen Welten; es steht in allen Kästchen dasselbe, da $\mathfrak{M}$ ein Modell mit konstantem Gegenstandsbereich ist.
- $\widetilde{P(a)}$ zeigt an, dass die Formel $P(x)$ in $\mathfrak{M}$ in w_2 unter der Interpretation $\mathcal{I}(P, w_2) = \{a\}$ gilt. Entsprechend für $\widetilde{P(b)}$ in w_3.

Nun zeigen wir, dass die Formel $\forall x \Diamond P(x) \to \Diamond \forall x P(x)$ in $\mathfrak{M}$ *nicht* gilt, indem wir zeigen, dass

$$\mathfrak{M}, w_1 \nvDash \forall x \Diamond P(x) \to \Diamond \forall x P(x)$$

Da die Formel geschlossen ist, müssen wir für eine beliebige Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}, w_1 \nvDash_v \forall x \Diamond P(x) \to \Diamond \forall x P(x)$$

zeigen. Dazu betrachten wir die x-Variante $v' = v[x \mapsto a]$. Da $\mathcal{I}(P, w_2) = \{a\}$ und $v'(x) = a$, ist $v'(x) \in \mathcal{I}(P, w_2)$. Nach Definition 5.4 (Klausel für Relationszeichen) ist dann $\mathfrak{M}, w_2 \vDash_{v'} P(x)$, und folglich $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_{v'} \Diamond P(x)$, da $w_1 R_E w_2$. Entsprechend zeigt man für die x-Variante $v'' = v[x \mapsto b]$, dass $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_{v''} \Diamond P(x)$. Da $M = \{a, b\}$ sind durch v' und v'' alle x-Varianten berücksichtigt, so dass nach Definition 5.4 (Klausel für Allquantor) gilt: $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_v \forall x \Diamond P(x)$.
Angenommen, es gilt auch $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_v \Diamond \forall x P(x)$. Dann muss

$$\mathfrak{M}, w_2 \vDash_v \forall x P(x) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M}, w_3 \vDash_v \forall x P(x)$$

gelten, da $w_1 R_E w_2$ und $w_1 R_E w_3$. Im ersten Fall muss dann nach Definition 5.4 (Klausel für Allquantor) für jede x-Variante v^* von v gelten: $\mathfrak{M}, w_2 \vDash_{v^*} P(x)$. Für die x-Variante $v^* = v'' = v[x \mapsto b]$ ist dies jedoch nicht der Fall, da $v''(x) \notin \mathcal{I}(P, w_2)$. Im zweiten Fall zeigt man für die x-Variante $v' = v[x \mapsto a]$ entsprechend, dass $\mathfrak{M}, w_3 \nvDash_v \forall x P(x)$ folgt, da $\mathfrak{M}, w_3 \nvDash_{v'} P(x)$ wegen $v'(x) \notin \mathcal{I}(P, w_3)$. Somit haben wir

$$\mathfrak{M}, w_1 \vDash_v \forall x \Diamond P(x) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}, w_1 \nvDash_v \Diamond \forall x P(x)$$

und folglich

$$\mathfrak{M}, w_1 \nvDash_v \forall x \Diamond P(x) \to \Diamond \forall x P(x)$$

Die Formel $\forall x \Diamond P(x) \to \Diamond \forall x P(x)$ gilt also im Modell $\mathfrak{M}$ nicht (und ist damit auch nicht allgemeingültig).

Beispiel. Wir zeigen, dass $\Diamond \forall x P(x) \to \forall x \Diamond P(x)$ allgemeingültig ist für Modelle $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ mit konstantem Gegenstandsbereich. Es sei $w \in W$ und v eine Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$.
Um $\mathfrak{M}, w \vDash_v \Diamond \forall x P(x) \to \forall x \Diamond P(x)$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass

$$\text{wenn } \mathfrak{M}, w \vDash_v \Diamond \forall x P(x), \text{ dann } \mathfrak{M}, w \vDash_v \forall x \Diamond P(x)$$

Angenommen $\mathfrak{M}, w \vDash_v \Diamond \forall x P(x)$. Dann muss es eine Welt w' mit $w R_E w'$ geben, so dass $\mathfrak{M}, w' \vDash_v \forall x P(x)$. Nach Definition 5.4 (Klausel für Allquantor) muss dann $\mathfrak{M}, w' \vDash_{v'} P(x)$ für beliebige x-Varianten v' von v in $\mathfrak{M}$ gelten. Da $w R_E w'$, gilt dann $\mathfrak{M}, w \vDash_{v'} \Diamond P(x)$, und da v' eine beliebige x-Variante von v ist, gilt $\mathfrak{M}, w \vDash_v \forall x \Diamond P(x)$. Da Modell $\mathfrak{M}$, Welt $w \in W$ und Variablenbelegung v beliebig, gilt $\vDash \Diamond \forall x P(x) \to \forall x \Diamond P(x)$.

5.3 Semantik für variierende Gegenstandsbereiche

Für konstante Gegenstandsbereiche M gilt z. B. $\vDash \forall x A(x) \to A(y)$. Denn für jede Variablenbelegung $v(y) \in M$, für die $A(y)$ in einer Welt w gilt, gilt auch $\forall x A(x)$ in dieser Welt, da bei konstanten Gegenstandsbereichen jeder Gegenstand in M in jeder Welt vorkommt, also insbesondere auch in w. Das bedeutet, dass für jede x-Variante v' einer Variablenbelegung v in der Welt w auch $A(x)$ gilt, d. h. $\forall x A(x)$ in w unter v gilt. Es kann bei konstanten Gegenstandsbereichen also *nicht* der Fall eintreten, dass $v(y)$ ein Gegenstand ist, der in der für den Allquantor in $\forall x A(x)$ relevanten Welt gar nicht

vorkommt. Dies entspricht der klassischen (nicht-modalen) Quantorenlogik, in der sich die Quantoren immer auf *einen* Gegenstandsbereich M beziehen.
Hingegen gilt $\vDash \forall x A(x) \to A(y)$ *nicht* für Modelle, in denen der Gegenstandsbereich M von Welt zu Welt variieren kann. Um solche Modelle zu erhalten, ersetzen wir die Menge M einfach durch eine Funktion, die jeder Welt $w \in W$ einen eigenen Gegenstandsbereich $M(w)$ zuordnet. Die Gegenstandsbereiche verschiedener Welten können gleich sein (wodurch der Fall konstanter Gegenstandsbereiche mit eingeschlossen ist), sich überschneiden, oder aber paarweise verschieden sein. Es gilt dann i. A. *nicht* mehr, dass in jedem Fall $v(y) \in M(w)$. Dann kann aber $\forall x A(x)$ in w gelten (falls für jede x-Variante $v'(x) \in M(w)$ die Formel $A(x)$ gilt), ohne dass auch $A(y)$ in w gelten müsste; denn für $v(y) \in M(w')$ und $v(y) \notin M(w)$ ist $v(y) \neq v'(x) \in M(w)$.
Es können somit zwei Situationen unterschieden werden, in denen eine Formel $A(x)$ in einer Welt w gilt:

(i) $A(x)$ gilt in w, und $v(x) \in M(w)$,

(ii) $A(x)$ gilt in w, aber möglicherweise $v(x) \notin M(w)$.

Die erste Situation kann man durch konstante Gegenstandsbereiche M erzwingen. Der Gegenstandsbereich $M(w)$ enthält dann alle möglichen Gegenstände, da $M(w) = M$ für alle Welten w. Man spricht in diesem Fall auch von *possibilistischer Quantifikation*. Es gelten (sofern Konstanten in jeder Welt denselben Gegenstand bezeichnen oder aber gar nicht vorkommen) die klassischen Gesetze, wie z. B. $\forall x A(x) \to A(y)$.
Die zweite Situation liegt bei variierenden Gegenstandsbereichen vor. Hier kann zwar $v(x)$ ein Gegenstand in irgendeiner möglichen Welt sein (d. h. $v(x) \in M(w')$ für beliebige Welten w'), die Quantoren beziehen sich aber immer nur auf Gegenstände in der aktuellen Welt. Dies bezeichnet man auch als *aktualistische Quantifikation*. Für diese Quantoren gelten die klassischen Gesetze nicht mehr uneingeschränkt; es ist dann z. B. $\nvDash \forall x A(x) \to A(y)$. Die resultierende Modallogik ist also keine konservative Erweiterung der klassischen (nicht-modalen) Quantorenlogik.
Variierende Gegenstandsbereiche erfordern im Vergleich zu konstanten Gegenstandsbereichen eine etwas kompliziertere Semantik. Sie entsprechen aber eher unserer Intuition, dass bestimmte Gegenstände nicht in jeder möglichen Welt existieren müssen (man denke etwa an Fabelwesen wie Pegasus, oder an mögliche Zeitpunkte, zu denen etwas nicht mehr oder noch nicht existiert).

Wir betrachten wieder ausschließlich Sprachen $\mathscr{L}$ ohne Individuenkonstanten k.

Definition 5.9 Ein *für variierende Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen* ist ein Tripel $\langle W, R_E, M \rangle$, wobei $\langle W, R_E \rangle$ ein Rahmen ist, und M eine Funktion ist, die jeder Welt $w \in W$ eine nichtleere Menge $M(w)$, den Gegenstandsbereich von w, zuordnet. *erweiterter Rahmen*

Bemerkung. Ist M eine konstante Funktion, die jeder Welt dieselbe Menge von Gegenständen zuordnet, so ist der für variierende Gegenstandsbereiche erweiterte Rahmen $\langle W, R_E, M \rangle$ auch ein erweiterter Rahmen für konstante Gegenstandsbereiche. Variierende Gegenstandsbereiche schließen also für entsprechende Funktionen M konstante Gegenstandsbereiche mit ein.

Definition 5.10 Sei $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M \rangle$ ein für variierende Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen. Dann ist $M(\mathfrak{F}) := \bigcup\{M(w) \mid w \in W\}$ der *Gegenstandsbereich des Rahmens* $\mathfrak{F}$. $M(\mathfrak{F})$

Bemerkung. Für einen Rahmen $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M\rangle$ mit $w \in W$ ist $M(w)$ die Menge der Gegenstände, die in w existieren. Die Menge $M(\mathfrak{F})$ enthält alle Gegenstände, über die wir in jeder Welt $w \in W$ etwas aussagen können, unabhängig davon, ob der jeweilige Gegenstand in w existiert oder nicht.

Definition 5.11 Sei $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M\rangle$ ein Rahmen für variierende Gegenstandsbereiche und $\mathscr{L}$ eine Sprache. Eine *modallogische Interpretation* $\mathcal{I}$ (für variierende Gegenstandsbereiche) ist eine Funktion, die jeder Welt $w \in W$ eine Interpretation für $\mathscr{L}$ zuordnet wie folgt:

modallogische Interpretation

(i) $\mathcal{I}(R, w) \subseteq M(\mathfrak{F})^n$, falls $w \in W$ und $R \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Relationszeichen ist für $n \geq 1$,

(ii) $\mathcal{I}(R, w) \in \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$, falls $w \in W$ und $R \in \mathscr{L}$ ein 0-stelliges Relationszeichen, d. h. ein Aussagesymbol ist, und $\mathrm{w} := \emptyset$, $\mathrm{f} := M(\mathfrak{F})$.

Bemerkung. Man beachte, dass $\mathcal{I}$ einem n-stelligen Relationszeichen R für eine Welt w nicht nur Elemente (d. h. n-Tupel) in $M(w)^n$ zuordnen kann, sondern beliebige Elemente in $M(\mathfrak{F})^n$, die natürlich nicht in jedem Fall auch Element der Menge $M(w)^n$ sein müssen. Sei z. B. $W = \{w_1, w_2\}$, $M(w_1) = \{a\}$ und $M(w_2) = \{b\}$. Dann ist $M(\mathfrak{F}) = \{a, b\}$, und für das 1-stellige Relationszeichen P ist $\mathcal{I}(P, w_1) = \{b\} \subseteq M(\mathfrak{F})$ eine zulässige Interpretation von P in w_1. Dass $b \in M(\mathfrak{F})$, aber $b \notin M(w_1)$, ist dabei irrelevant.

Definition 5.12 Sei $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M\rangle$ ein Rahmen für variierende Gegenstandsbereiche und $\mathcal{I}$ eine Interpretation für variierende Gegenstandsbereiche. Dann ist $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ ein (*quantorenlogisches modales*) *Modell* für variierende Gegenstandsbereiche.

Modell

Es ist $M(\mathfrak{M}) := M(\mathfrak{F})$ der *Gegenstandsbereich des Modells* $\mathfrak{M}$.

$M(\mathfrak{M})$

Definition 5.13 Variablenbelegungen und x-Varianten in einem Modell $\mathfrak{M}$ sind definiert wie bisher, d. h. als Funktionen, die (unabhängig von Welten $w \in W$) Variablen Gegenstände in $M(\mathfrak{M})$ zuordnen.

Zusätzlich sagen wir für eine Welt $w \in W$, dass eine Variablenbelegung v' eine *x-Variante von v in w* ist, falls $v'(x) \in M(w)$.

x-Variante von v in w

Definition 5.14 Sei $\mathfrak{M}$ ein quantorenlogisches modales Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ (für variierende Gegenstandsbereiche), w eine Welt in W und v eine Variablenbelegung. Zur Definition der Relation $\mathfrak{M}, w \vDash_v A$ ("*A gilt im Modell $\mathfrak{M}$ in der Welt $w \in W$ unter der Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$*") für variierende Gegenstandsbereiche übernehmen wir die Definition 5.4 (für konstante Gegenstandsbereiche) bis auf die Klauseln für die Quantoren. Für diese soll nun gelten:

A gilt in $\mathfrak{M}$ in Welt w unter v

$$\mathfrak{M}, w \vDash_v \forall x A(x) \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für jede } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } w \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M}, w \vDash_{v'} A(x)$$
$$\mathfrak{M}, w \vDash_v \exists x A(x) \;:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt eine } x\text{-Variante } v' \text{ von } v \text{ in } w \text{ in } \mathfrak{M}\text{: } \mathfrak{M}, w \vDash_{v'} A(x)$$

Im Gegensatz zu konstanten Gegenstandsbereichen wird hier jeweils $v'(x) \in M(w)$ verlangt (während im Fall konstanter Gegenstandsbereiche $v'(x) \in M = M(\mathfrak{M})$).

Definition 5.15 Theorem 5.5 und Korollar 5.6 gelten unverändert auch für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich, so dass wir Definition 5.7 ("$\mathfrak{M}, w \vDash A$") und Definition 5.8 (*Gültigkeit im Modell*, *Gültigkeit im Rahmen* und *Allgemeingültigkeit*) direkt für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich übernehmen können.

Gültigkeit, Allgemeingültigkeit

Beispiel. Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ mit $W = \{w_1, w_2\}$, $R_E = \{\langle w_1, w_2\rangle\}$, $M(w_1) = \{a\}$, $M(w_2) = \{b\}$ und $\mathcal{I}(P, w_1) = \{a\}$, $\mathcal{I}(P, w_2) = \emptyset$ für das 1-stellige Relationszeichen P. Diagrammatisch:

$$\begin{tikzcd} w_1 \ \boxed{a} \models \widetilde{P(a)} \arrow[d] \\ w_2 \ \boxed{b} \end{tikzcd}$$

Sei $v(x) = a$. Es ist $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Box(P(x) \vee \neg P(x))$ genau dann, wenn für alle $w' \in W$ gilt: wenn $w_1 R_E w'$, dann $\mathfrak{M}, w' \models_v P(x) \vee \neg P(x)$. Da w_1 nur w_2 sieht, ist Letzteres genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{M}, w_2 \models_v P(x) \vee \neg P(x)$.
$\mathfrak{M}, w_2 \models_v P(x) \vee \neg P(x)$ besagt, dass die offene Formel $P(x) \vee \neg P(x)$ in $\mathfrak{M}$ in der Welt w_2 unter der Variablenbelegung $v(x) = a$ gilt. Jedoch ist $a \notin M(w_2)$, d. h. die Gültigkeit von $P(x) \vee \neg P(x)$ in $\mathfrak{M}$ in der Welt w_2 hängt von einer Variablenbelegung v ab, die der freien Variable x einen Gegenstand zuordnet, den es in der Welt w_2 gar nicht gibt. Wir setzen also voraus, dass wir auch für Gegenstände, die es in einer Welt nicht gibt, behaupten können, dass sie in dieser Welt bestimmte Eigenschaften haben.
Für die Variablenbelegung $v(x) = a$ ist $\mathfrak{M}, w_2 \not\models_v P(x)$, da $a \notin \mathcal{I}(P, w_2)$, also $\mathfrak{M}, w_2 \models_v \neg P(x)$, folglich $\mathfrak{M}, w_2 \models_v P(x) \vee \neg P(x)$, und somit $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Box(P(x) \vee \neg P(x))$.

Bemerkung. Alternativ zu den hier betrachteten Modellen könnte man auch *partielle* Modelle $\mathfrak{M}_{\text{part}}$ verwenden, bei denen im Fall $v(x) = a \notin M(w)$ weder $\mathfrak{M}_{\text{part}}, w \models_v A(x)$ noch $\mathfrak{M}_{\text{part}}, w \not\models_v A(x)$, für beliebige Formeln $A(x)$.
Wir betrachten jedoch weiterhin ausschließlich nicht-partielle Modelle. Diese beruhen auf der Idee, dass auch für in bestimmten Welten nicht-existente Gegenstände immer eine Aussage über die Gültigkeit von Formeln gemacht werden kann, sofern der Gegenstand überhaupt in irgendeiner Welt existiert. In diesem Sinne sagt man z. B. von dem Fabelwesen Pegasus, dass es die Eigenschaft hat, geflügelt zu sein, wobei vorausgesetzt wird, dass Pegasus in einer möglichen Welt existiert.

Beispiel. Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ mit $W = \{w_1, w_2\}$, $R_E = \{\langle w_1, w_2\rangle\}$, $M(w_1) = \{a\}$, $M(w_2) = \{a, b\}$ und $\mathcal{I}(P, w_1) = \emptyset$, $\mathcal{I}(P, w_2) = \{b\}$ für das 1-stellige Relationszeichen P. Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} w_1 \ \boxed{a} \arrow[d] \\ w_2 \ \boxed{a, b} \models \widetilde{P(b)} \end{tikzcd}$$

Wir zeigen, dass $\mathfrak{M} \not\models \Diamond\exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$. Sei v eine beliebige Variablenbelegung und $v' = v[x \mapsto b]$. Wegen $\mathcal{I}(P, w_2) = \{b\}$ gilt dann $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$. Da v' eine x-Variante in w_2 ist (es ist $v'(x) = b \in M(w_2)$), folgt (Klausel für Existenzquantor) $\mathfrak{M}, w_2 \models_v \exists x P(x)$, und damit wegen $w_1 R_E w_2$ auch (Klausel für $\Diamond$) $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond\exists x P(x)$. Das Antezedens von $\Diamond\exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$ gilt also in $\mathfrak{M}$ in w_1 unter v.
Für das Sukzedens nehmen wir an, dass $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \exists x \Diamond P(x)$. Unter dieser Annahme muss es eine x-Variante v' von v in w_1 geben, so dass (Klausel für Existenzquantor)

$\mathfrak{M}, w_1 \vDash_{v'} \Diamond P(x)$. Da nur $a \in M(w_1)$, muss $v'(x) = a$ sein. Es folgt (Klausel für $\Diamond$) $\mathfrak{M}, w_2 \vDash_{v'} P(x)$, da w_1 nur w_2 sieht. Nun ist aber $v'(x) = a \notin \mathcal{I}(P, w_2)$, also $\mathfrak{M}, w_2 \nvDash_{v'} P(x)$; Widerspruch. Folglich gilt $\mathfrak{M}, w_1 \nvDash_v \exists x \Diamond P(x)$. Damit gilt $\mathfrak{M}, w_1 \nvDash_v \Diamond \exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$, woraus folgt: $\mathfrak{M} \nvDash \Diamond \exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$. Somit ist die Formel auch nicht allgemeingültig.

Definition 5.16 Zur Definition der *(modalen quantoren-)logischen Folgerung* $(\Gamma \vDash A)$ wählen wir den lokalen Folgerungsbegriff (vgl. Abschnitt 3.3). Sei $\Gamma \subseteq \mathscr{L}$ eine Formelmenge, $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ ein quantorenlogisches modales Modell für $\mathscr{L}$, $w \in W$ und v eine Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$. Dann ist

logische Folgerung

$$\Gamma \vDash A \;:\Longleftrightarrow\; \text{Für alle } \mathfrak{M}, w \text{ und } v \text{ gilt: Wenn } \mathfrak{M}, w \vDash_v \Gamma \text{ dann } \mathfrak{M}, w \vDash_v A$$

Hierbei haben alle Modelle $\mathfrak{M}$ entweder konstante oder variierende Gegenstandsbereiche.

5.4 Modale quantorenlogische Tableaux

Wir behandeln lediglich Tableaux für geschlossene Formeln.

5.4.1 Tableaux für konstante Gegenstandsbereiche

Definition 5.17 Ein *modales quantorenlogisches Tableau* (für konstante Gegenstandsbereiche) für K ist ein modallogisches Tableau für K, in dem zusätzlich die (schon in Definition 4.11 angegebenen) quantorenlogischen Regeln verwendet werden dürfen:

modales quantorenlogisches Tableau

(i) Für eine beliebige Konstante a (einschließlich Parameter):

$$\gamma\text{-}Regeln \left\{ (\forall)\ \frac{\sigma\ \forall x A(x)}{\sigma\ A(a)} \qquad (\neg\exists)\ \frac{\sigma\ \neg\exists x A(x)}{\sigma\ \neg A(a)} \right.$$

(ii) Für einen Parameter a, der im Zweig noch nicht vorkommt:

$$\delta\text{-}Regeln \left\{ (\exists)\ \frac{\sigma\ \exists x A(x)}{\sigma\ A(a)} \qquad (\neg\forall)\ \frac{\sigma\ \neg\forall x A(x)}{\sigma\ \neg A(a)} \right.$$

Beispiel. Tableaubeweis für $\Diamond \exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$:

1.	$1\ \neg(\Diamond \exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x))$	
2.	$1\ \Diamond \exists x P(x)$	$(\neg\to, 1)$
3.	$1\ \neg\exists x \Diamond P(x)$	$(\neg\to, 1)$
4.	$1.1\ \exists x P(x)$	$(\Diamond, 2)$
5.	$1.1\ P(a)$	$(\exists, 4)$
6.	$1\ \neg\Diamond P(a)$	$(\neg\exists, 3)$
7.	$1.1\ \neg P(a)$	$(\neg\Diamond, 6)$
	5×7	

Theorem 5.18 (Korrektheit und Vollständigkeit) *Sei A eine geschlossene Formel. Dann gilt für Allgemeingültigkeit und Tableaux für konstante Gegenstandsbereiche: A ist allgemeingültig genau dann, wenn es einen Tableaubeweis für A gibt.*

Beweis. Übungsaufgabe. (Vgl. den Beweis für variierende Gegenstandsbereiche in Fitting & Mendelsohn, 1998, Ch. 7.) QED

Bemerkung. Aufgrund des in obigem Beispiel angegebenen Tableaubeweises für die Formel $\Diamond \exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$ können wir unter Verwendung von Korrektheit schließen, dass $\Diamond \exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$ allgemeingültig ist für Modelle mit *konstantem* Gegenstandsbereich. (Dass diese Formel für *variierende* Gegenstandsbereiche *nicht* allgemeingültig ist, haben wir am Ende von Abschnitt 5.3 gezeigt.)

5.4.2 Tableaux für variierende Gegenstandsbereiche

Um Tableaux für variierende Gegenstandsbereiche definieren zu können, müssen wir für jede Signatur jeweils eigene Parameter zur Verfügung haben, die bei keiner anderen Signatur verwendet werden dürfen. Dazu ordnen wir jeder Signatur σ jeweils Parameter $a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma, \ldots$ zu. Sofern man Signaturen als Namen für Welten und Parameter als Namen für Gegenstände in diesen Welten auffassen möchte, spiegelt dies wider, dass bei Modellen mit variierendem Gegenstandsbereich die jeweiligen Gegenstandsbereiche der Welten prinzipiell paarweise verschieden sein können.

modales quantorenlogisches Tableau

Definition 5.19 Ein *modales quantorenlogisches Tableau* (für variierende Gegenstandsbereiche) für K ist ein modallogisches Tableau für K, in dem zusätzlich die folgenden Regeln für die Quantoren verwendet werden dürfen:

(i) Für eine beliebige der Signatur σ zugeordnete Konstante a_σ (einschließlich Parameter):

$$\gamma\text{-}Regeln \left\{ (\forall)\ \frac{\sigma\ \forall x A(x)}{\sigma\ A(a_\sigma)} \qquad\qquad (\neg\exists)\ \frac{\sigma\ \neg\exists x A(x)}{\sigma\ \neg A(a_\sigma)} \right.$$

(ii) Für einen der Signatur σ zugeordneten Parameter a_σ, der im Zweig noch nicht vorkommt:

$$\delta\text{-}Regeln \left\{ (\exists)\ \frac{\sigma\ \exists x A(x)}{\sigma\ A(a_\sigma)} \qquad\qquad (\neg\forall)\ \frac{\sigma\ \neg\forall x A(x)}{\sigma\ \neg A(a_\sigma)} \right.$$

Theorem 5.20 (Korrektheit und Vollständigkeit) *Sei A eine geschlossene Formel. Dann gilt für Allgemeingültigkeit und Tableaux für variierende Gegenstandsbereiche: A ist allgemeingültig genau dann, wenn es einen Tableaubeweis für A gibt.*

Beweis. Siehe Fitting & Mendelsohn, 1998, Ch. 7. QED

Beispiel. Tableau für $\forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$:

1.	$1\ \neg(\forall x \Box P(x) \to \Box\forall x P(x))$	
2.	$1\ \forall x \Box P(x)$	$(\neg\to, 1)$
3.	$1\ \neg\Box\forall x P(x)$	$(\neg\to, 1)$
4.	$1.1\ \neg\forall x P(x)$	$(\neg\Box, 3)$
5.	$1.1\ \neg P(a_{1.1})$	$(\neg\forall, 4)$
6.	$1\ \Box P(a_1)$	$(\forall, 2)$
7.	$1.1\ P(a_1)$	$(\Box, 6)$
	$\vdots$	

Das Tableau ist offen und kann nicht geschlossen werden. Um Letzteres zu zeigen, betrachten wir das Gegenmodell

$$\begin{tikzcd} 1\ \boxed{a_1} \arrow[d] \\ 1.1\ \boxed{a_{1.1}} \models \widetilde{P(a_1)} \end{tikzcd}$$

Es gilt $\forall x \Box P(x)$ in 1, da $P(x)$ für jede x-Variante v' in 1 (es gibt nur eine, nämlich $v'(x) = a_1$) in jeder erreichbaren Welt (d. h. in 1.1) gilt. Jedoch gilt in 1 nicht $\Box \forall x P(x)$, da in der von 1 aus erreichbaren Welt 1.1 die Formel $P(x)$ nicht für jede x-Variante v' in 1.1 gilt. Es ist v' mit $v'(x) = a_{1.1}$ die einzige x-Variante in 1.1, für die aber $P(x)$ in 1.1 nicht gilt. Aufgrund Korrektheit kann es dann keinen Tableaubeweis für $\forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$ geben.

Bemerkung. Man beachte, dass in dem im Beispiel angegebenen Tableau weitere Regelanwendungen möglich sind, die zu unendlichen Zweigen führen. Von einem endlichen offenen Tableau für eine Formel A kann i. A. nicht darauf geschlossen werden, dass es keinen Tableaubeweis für A geben kann. Dazu ist ein unabhängiger Nachweis erforderlich, den wir im Beispiel durch die Angabe eines Gegenmodells bei Verwendung von Korrektheit erbracht haben. Das (nicht vollständig entwickelte) Tableau wurde dabei lediglich als heuristisches Hilfsmittel für das Auffinden des Gegenmodells verwendet.

5.5 Modale quantorenlogische Standardmodallogiken

Die in der modalen Aussagenlogik behandelten Standardmodallogiken können ohne Weiteres quantorenlogisch erweitert werden. In der Semantik werden dazu einfach die entsprechenden Rahmeneigenschaften gefordert. Bei den Tableaukalkülen lässt man die entsprechenden zusätzlichen Regelpaare zu. Dies funktioniert in beiden Fällen unabhängig davon, ob konstante oder variierende Gegenstandsbereiche betrachtet werden.

5.6 Barcansche Formeln

Nun wollen wir das Verhältnis zwischen konstanten und variierenden Gegenstandsbereichen genauer betrachten. Dabei werden die nach Ruth Barcan Marcus (1921-2012) benannten *Barcanschen Formeln* eine wichtige Rolle spielen. Man kann zeigen, dass die Semantik für konstante Gegenstandsbereiche in die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche eingebettet werden kann, sofern für letztere zusätzlich die Gültigkeit der Barcanschen Formeln angenommen wird. Umgekehrt kann man zeigen, dass die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche in die Semantik für konstante Gegenstandsbereiche eingebettet werden kann, sofern für letztere ein Existenzprädikat zur Verfügung steht.

Wir zeigen zunächst Letzteres. Bei variierenden Gegenstandsbereichen liegt aktualistische Quantifikation vor, d. h. die Quantoren quantifizieren ausschließlich über die in der aktuellen Welt existierenden Gegenstände, während bei konstanten Gegenstandsbereichen immer über alle möglichen Gegenstände quantifiziert wird, d. h. possibilistische

Quantoren verwendet werden. Nun nehmen wir an, dass ein *Existenzprädikat* $\mathsf{E}(x)$ zur Verfügung steht, mit dem wir ausdrücken können, dass ein möglicher Gegenstand tatsächlich existiert. Mit einem solchen Existenzprädikat können wir die possibilistischen Quantoren in der Semantik konstanter Gegenstandsbereiche auf tatsächlich existierende Gegenstände einschränken ("Existenzrelativierung"), wodurch die bei variierenden Gegenstandsbereichen verwendeten aktualistischen Quantoren simuliert werden.

Definition 5.21 Sei E ein 1-stelliges ausgezeichnetes Relationszeichen für das Existenzprädikat $\mathsf{E}(x)$. Wir definieren die *Existenzrelativierung* $[A]^{\mathsf{E}}$ einer Formel A induktiv wie folgt: *Existenzrelativierung*

(i) $[A]^{\mathsf{E}} := A$, falls A atomar und $A \neq \mathsf{E}(x)$,

(ii) $[\neg A]^{\mathsf{E}} := \neg[A]^{\mathsf{E}}$,

(iii) $[A \circ B]^{\mathsf{E}} := ([A]^{\mathsf{E}} \circ [B]^{\mathsf{E}})$, für zweistellige Konnektive $\circ$,

(iv) $[\Box A]^{\mathsf{E}} := \Box[A]^{\mathsf{E}}$,

(v) $[\Diamond A]^{\mathsf{E}} := \Diamond[A]^{\mathsf{E}}$,

(vi) $[\forall x A(x)]^{\mathsf{E}} := \forall x(\mathsf{E}(x) \to [A(x)]^{\mathsf{E}})$,

(vii) $[\exists x A(x)]^{\mathsf{E}} := \exists x(\mathsf{E}(x) \land [A(x)]^{\mathsf{E}})$.

Beispiel. Die Existenzrelativierung der Formel $\forall x(\Box P(x) \to \Box\exists y P(y))$ ist

$$
\begin{aligned}
[\forall x(\Box P(x) \to \Box\exists y P(y))]^{\mathsf{E}} &= \forall x(\mathsf{E}(x) \to [\Box P(x) \to \Box\exists y P(y)]^{\mathsf{E}}) && \text{(vi)}\\
&= \forall x(\mathsf{E}(x) \to ([\Box P(x)]^{\mathsf{E}} \to [\Box\exists y P(y)]^{\mathsf{E}})) && \text{(iii)}\\
&= \forall x(\mathsf{E}(x) \to (\Box[P(x)]^{\mathsf{E}} \to \Box[\exists y P(y)]^{\mathsf{E}})) && \text{(iv)}\\
&= \forall x(\mathsf{E}(x) \to (\Box[P(x)]^{\mathsf{E}} \to \Box\exists y(\mathsf{E}(y) \land [P(y)]^{\mathsf{E}}))) && \text{(vii)}\\
&= \forall x(\mathsf{E}(x) \to (\Box P(x) \to \Box\exists y(\mathsf{E}(y) \land P(y)))) && \text{(i)}
\end{aligned}
$$

Für Modelle mit konstantem Gegenstandsbereich schreiben wir im Folgenden auch $\mathfrak{M}_{\text{konst}} = \langle W_{\text{k}}, R_{\text{k}}, M_{\text{k}}, \mathcal{I}_{\text{k}}\rangle$, für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich $\mathfrak{M}_{\text{var}} = \langle W_{\text{v}}, R_{\text{v}}, M_{\text{v}}, \mathcal{I}_{\text{v}}\rangle$.

Bemerkung. In Modellen $\mathfrak{M}_{\text{var}} = \langle W_{\text{v}}, R_{\text{v}}, M_{\text{v}}, \mathcal{I}_{\text{v}}\rangle$ für variierende Gegenstandsbereiche, und mit einem Relationszeichen "$\doteq$" für Gleichheit aufgrund der Interpretation $\mathcal{I}_{\text{v}}(\doteq, w) = \{\langle m, m'\rangle \mid m = m'\} \subseteq M(\mathfrak{M}_{\text{var}})^2$ für alle $w \in W_{\text{v}}$, müssten wir das Existenzprädikat $\mathsf{E}(x)$ nicht einfach als gegeben voraussetzen, sondern könnten es wie folgt definieren: $\mathsf{E}(x) := \exists y(y \doteq x)$, wobei die Variable y von x verschieden ist. Für solche Modelle gilt:

$$\mathfrak{M}_{\text{var}}, w \vDash_v x \doteq y \iff v(x) = v(y)$$

und

$$\mathfrak{M}_{\text{var}}, w \vDash_v \exists y(y \doteq x) \iff v(x) \in M_{\text{v}}(w)$$

Ohne Gleichheit, sowie im Fall konstanter Gegenstandsbereiche, d. h. für Modelle $\mathfrak{M}_{\text{konst}} = \langle W_{\text{k}}, R_{\text{k}}, M_{\text{k}}, \mathcal{I}_{\text{k}}\rangle$, steht diese Möglichkeit jedoch nicht zur Verfügung. Wir müssen hier deshalb für die einzelnen Welten $w \in W_{\text{k}}$ bestimmte Gegenstände im konstanten Gegenstandsbereich M_{k} durch $\mathsf{E}(x)$ als tatsächlich existierend auszeichnen, indem wir diese für jede Welt explizit als Interpretation von E angeben: $\mathcal{I}_{\text{k}}(\mathsf{E}, w) \subseteq M_{\text{k}}$.

Theorem 5.22 *Sei A eine geschlossene Formel, in der das Existenzprädikat $\mathsf{E}(x)$ nicht vorkommt. Dann gilt $\mathfrak{M}_{\text{var}} \vDash A$ für alle Modelle $\mathfrak{M}_{\text{var}}$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}_{\text{konst}} \vDash [A]^{\mathsf{E}}$ für jedes Modell $\mathfrak{M}_{\text{konst}} = \langle W_{\text{k}}, R_{\text{k}}, M_{\text{k}}, \mathcal{I}_{\text{k}} \rangle$, in dem $\mathcal{I}_{\text{k}}(\mathsf{E}, w) \neq \emptyset$ für alle $w \in W_{\text{k}}$.*

Beweis. Um die Richtung von rechts nach links (per Kontraposition) zu zeigen, nehmen wir an, dass $\mathfrak{M}_{\text{var}} \nvDash A$ für ein Modell $\mathfrak{M}_{\text{var}} = \langle W_{\text{v}}, R_{\text{v}}, M_{\text{v}}, \mathcal{I}_{\text{v}} \rangle$. Zu diesem Modell konstruieren wir ein Modell $\mathfrak{M}_{\text{konst}} = \langle W_{\text{k}}, R_{\text{k}}, M_{\text{k}}, \mathcal{I}_{\text{k}} \rangle$, für das $\mathfrak{M}_{\text{konst}} \nvDash [A]^{\mathsf{E}}$, wie folgt:

(i) Es sei $W_{\text{k}} := W_{\text{v}}$, $R_{\text{k}} := R_{\text{v}}$ und $M_{\text{k}} := M(\mathfrak{M}_{\text{var}})$.

(Man beachte, dass obgleich $W_{\text{k}} = W_{\text{v}}$ i. A. $M_{\text{k}} \neq M_{\text{v}}(w)$ für $w \in W_{\text{k}} = W_{\text{v}}$; d. h. dieselbe Welt $w \in W_{\text{k}} = W_{\text{v}}$ unterscheidet sich i. A. bezüglich ihres Gegenstandsbereichs M_{k} bzw. $M_{\text{v}}(w)$ in den Modellen $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$ bzw. $\mathfrak{M}_{\text{var}}$.)

(ii) Es sei $\mathcal{I}_{\text{k}} = \mathcal{I}_{\text{v}}$ bis auf die hinzukommende Interpretation von E, für die wir $\mathcal{I}_{\text{k}}(\mathsf{E}, w) := M_{\text{v}}(w)$ setzen (wobei $w \in W_{\text{k}} = W_{\text{v}}$).

Das Modell $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$ erfüllt die Bedingung $\mathcal{I}_{\text{k}}(\mathsf{E}, w) \neq \emptyset$ für alle $w \in W_{\text{k}}$, da $M_{\text{v}}(w) \neq \emptyset$ für alle $w \in W_{\text{v}}$ und $W_{\text{k}} = W_{\text{v}}$. Wegen $M_{\text{k}} = M(\mathfrak{M}_{\text{var}})$ ist jede Variablenbelegung in $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$ auch eine Variablenbelegung in $\mathfrak{M}_{\text{var}}$ und umgekehrt.
Nun zeigt man per Induktion für Formeln $A(x)$, in denen $\mathsf{E}(x)$ nicht vorkommt, dass

$$\mathfrak{M}_{\text{var}}, w \vDash_v A(x) \iff \mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_v [A(x)]^{\mathsf{E}} \qquad (*)$$

für beliebige Welten w und beliebige Variablenbelegungen v.

Induktionsanfang: Falls $A(x)$ atomar ist, folgt die Behauptung wegen $[A(x)]^{\mathsf{E}} = A(x)$ unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{I}_{\text{k}}$ in der Konstruktion von $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$.

Induktionsannahme: Die Behauptung $(*)$ gelte für die unmittelbaren Teilformeln der Formel $A(x)$.

Induktionsschritt: Als Beispiel betrachten wir den Fall $A = \exists x C(x)$.

"$\Longrightarrow$": Angenommen, es gilt $\mathfrak{M}_{\text{var}}, w \vDash_v \exists x C(x)$. Dann muss es eine x-Variante v' von v in w geben, so dass $\mathfrak{M}_{\text{var}}, w \vDash_{v'} C(x)$. Aufgrund der Induktionsannahme gilt $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_{v'} [C(x)]^{\mathsf{E}}$. Da v' eine x-Variante in w ist, gilt $v'(x) \in M_{\text{v}}(w)$. Nach Definition von $\mathcal{I}_{\text{k}}$ ist dann $v'(x) \in \mathcal{I}_{\text{k}}(\mathsf{E}, w)$, also $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_{v'} \mathsf{E}(x)$. Damit gilt $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_{v'} \mathsf{E}(x) \wedge [C(x)]^{\mathsf{E}}$, woraus $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_v \exists x(\mathsf{E}(x) \wedge [C(x)]^{\mathsf{E}})$ $(= [A]^{\mathsf{E}})$ folgt.

"$\Longleftarrow$": Angenommen, es gilt $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_v \exists x(\mathsf{E}(x) \wedge [C(x)]^{\mathsf{E}})$ $(= [A]^{\mathsf{E}})$. Dann muss es eine x-Variante v' von v geben, so dass $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_{v'} \mathsf{E}(x) \wedge [C(x)]^{\mathsf{E}}$, also $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_{v'} \mathsf{E}(x)$ und $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_{v'} [C(x)]^{\mathsf{E}}$. Aufgrund der Induktionsannahme gilt dann $\mathfrak{M}_{\text{var}}, w \vDash_{v'} C(x)$. Wegen $\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w \vDash_{v'} \mathsf{E}(x)$ und $\mathcal{I}_{\text{k}}(\mathsf{E}, w) = M_{\text{v}}(w)$ ist $v'(x) \in M_{\text{v}}(w)$, d. h. v' ist eine x-Variante von v in w. Damit gilt $\mathfrak{M}_{\text{var}}, w \vDash_v \exists x C(x)$ $(= A)$.

(Restliche Fälle als Übungsaufgabe.)

Um die verbleibende Richtung von links nach rechts (ebenfalls per Kontraposition) zu zeigen, nimmt man an, dass $\mathfrak{M}_{\text{konst}} \nvDash [A]^{\mathsf{E}}$ für ein Modell $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$, und konstruiert ein Modell $\mathfrak{M}_{\text{var}}$, für das $\mathfrak{M}_{\text{var}} \nvDash A$ gilt. (Übungsaufgabe) QED

Bemerkung. Unter Verwendung der Existenzrelativierung können also anstelle von Modellen mit variierendem Gegenstandsbereich Modelle mit konstantem Gegenstandsbereich verwendet werden.

Beispiel. Wir stellen einem Modell $\mathfrak{M}_{\text{var}}$ das gemäß der im Beweis angegebenen Modellkonstruktion entsprechende Modell $\mathfrak{M}_{\text{konst}}$ gegenüber:

$\mathfrak{M}_{\text{var}} = \langle W_{\text{v}}, R_{\text{v}}, M_{\text{v}}, \mathcal{I}_{\text{v}} \rangle$	$\mathfrak{M}_{\text{konst}} = \langle W_{\text{k}}, R_{\text{k}}, M_{\text{k}}, \mathcal{I}_{\text{k}} \rangle$
$W_{\text{v}} = \{w_1, w_2\}$, $R_{\text{v}} = \{\langle w_1, w_2 \rangle\}$, $M_{\text{v}}(w_1) = \{a\}$, $M_{\text{v}}(w_2) = \{a, b\}$, $\mathcal{I}_{\text{v}}(P, w_1) = \emptyset$, $\mathcal{I}_{\text{v}}(P, w_2) = \{b\}$	$W_{\text{k}} = W_{\text{v}}$, $R_{\text{k}} = R_{\text{v}}$, $M_{\text{k}} = M(\mathfrak{M}_{\text{var}}) = \{a, b\}$, $\mathcal{I}_{\text{k}} = \mathcal{I}_{\text{v}}$ plus $\mathcal{I}_{\text{k}}(\mathsf{E}, w_1) = \{a\}$, $\mathcal{I}_{\text{k}}(\mathsf{E}, w_2) = \{a, b\}$
$\begin{array}{l} w_1\ \boxed{a} \\ \qquad \downarrow \\ w_2\ \boxed{a, b} \models \widetilde{P(b)} \end{array}$	$\begin{array}{l} w_1\ \boxed{a, b} \models \widetilde{\mathsf{E}(a)} \\ \qquad \downarrow \\ w_2\ \boxed{a, b} \models \widetilde{P(b)}, \widetilde{\mathsf{E}(a)}, \widetilde{\mathsf{E}(b)} \end{array}$
$\mathfrak{M}_{\text{var}}, w_1 \models \exists x \Diamond P(x) \to \Diamond \exists x P(x)$	$\mathfrak{M}_{\text{konst}}, w_1 \models [\exists x \Diamond P(x) \to \Diamond \exists x P(x)]^{\mathsf{E}}$ $[\exists x \Diamond P(x) \to \Diamond \exists x P(x)]^{\mathsf{E}} =$ $\exists x(\mathsf{E}(x) \wedge \Diamond P(x)) \to \Diamond \exists x(\mathsf{E}(x) \wedge P(x))$

Nun wollen wir untersuchen, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen man anstelle von Modellen mit konstantem Gegenstandsbereich Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich verwenden kann. Dazu benötigen wir die Barcanschen und konversen Barcanschen Formeln.

Definition 5.23 Als *Barcansche Formeln* bezeichnet man alle Formeln der Formen *Barcansche Formeln*

(i) $\forall x \Box A(x) \to \Box \forall x A(x)$,

(ii) $\Diamond \exists x A(x) \to \exists x \Diamond A(x)$,

wobei $A(x)$ eine beliebige Formel ist, in der x frei vorkommen kann.

Bemerkung. Barcansche Formeln $\Diamond \exists x B(x) \to \exists x \Diamond B(x)$ der Form (ii) sind äquivalent zu $\forall x \Box \neg B(x) \to \Box \forall x \neg B(x)$, d. h. zu Barcanschen Formeln der Form (i) mit $A(x) = \neg B(x)$. Ebenso können für Barcansche Formeln der Form (i) äquivalente Barcansche Formeln der Form (ii) angegeben werden. Man könnte sich also auch auf Formeln nur einer Form beschränken.

Definition 5.24 Als *konverse Barcansche Formeln* bezeichnet man alle Formeln der Formen *konverse Barcansche Formeln*

(i) $\Box \forall x A(x) \to \forall x \Box A(x)$,

(ii) $\exists x \Diamond A(x) \to \Diamond \exists x A(x)$,

wobei $A(x)$ wieder eine beliebige Formel ist, in der x frei vorkommen kann.
Auch hier könnte man sich auf eine der beiden Formen beschränken.

Bemerkung. Man bezeichnet die (konversen) Barcanschen Formeln der angegebenen Formen auch einfach als *die* (konverse) Barcansche Formel. Sagt man, dass die Formel gilt, so meint man, dass alle Formeln der Form gelten. Gilt eine der Formeln der Form nicht, so sagt man, dass die (konverse) Barcansche Formel nicht gilt.

Weder die Barcansche noch die konverse Barcansche Formel ist für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich allgemeingültig:

(i) In Abschnitt 5.3 haben wir gezeigt, dass $\Diamond\exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$ nicht allgemeingültig ist. Da dies eine Instanz der Barcanschen Formel ist, kann die Barcansche Formel nicht allgemeingültig sein.

(ii) Auch die konverse Barcansche Formel ist nicht allgemeingültig für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich. Denn

$$\begin{tikzcd} w_1 \; \boxed{a, b} \arrow[d] \\ w_2 \; \boxed{a} \vDash \widetilde{P(b)} \end{tikzcd}$$

ist ein Gegenmodell für die Instanz $\exists x \Diamond P(x) \to \Diamond\exists x P(x)$.

Wir zeigen, dass die konverse Barcansche Formel die Rahmeneigenschaft der Monotonie charakterisiert.

Definition 5.25 Ein erweiterter Rahmen $\langle W, R_E, M\rangle$ für variierende Gegenstandsbereiche heißt *monoton*, falls für alle $w, w' \in W$ gilt: wenn wR_Ew', dann $M(w) \subseteq M(w')$. *monoton*
Ein Modell heißt *monoton*, falls der zugrunde liegende Rahmen monoton ist.

Beispiel. Das (schon in Abschnitt 5.3 betrachtete) Modell

$$\begin{tikzcd} w_1 \; \boxed{a} \arrow[d] \\ w_2 \; \boxed{a, b} \vDash \widetilde{P(b)} \end{tikzcd}$$

ist monoton, da $M(w_1) = \{a\} \subseteq \{a, b\} = M(w_2)$. Wie schon gezeigt wurde, ist dies ein Gegenmodell für $\Diamond\exists x P(x) \to \exists x \Diamond P(x)$, und damit für die Barcansche Formel $\Diamond\exists x A(x) \to \exists x \Diamond A(x)$.
Die konverse Barcansche Formel $\exists x \Diamond A(x) \to \Diamond\exists x A(x)$ gilt hingegen in allen monotonen Modellen (siehe Beweis des folgenden Theorems).

Theorem 5.26 *Ein für variierende Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen ist genau dann monoton, wenn in jedem auf ihm beruhenden Modell die konverse Barcansche Formel gilt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Richtung von links nach rechts.
Sei $\langle W, R_E, M\rangle$ ein für variierende Gegenstandsbereiche erweiterter monotoner Rahmen, und sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ ein darauf beruhendes monotones Modell.
Wir zeigen, dass die konverse Barcansche Formel $\exists x \Diamond A(x) \to \Diamond\exists x A(x)$ in $\mathfrak{M}$ gilt, d. h. wir zeigen

$$\text{wenn } \mathfrak{M}, w \vDash_v \exists x \Diamond A(x), \text{ dann } \mathfrak{M}, w \vDash_v \Diamond\exists x A(x)$$

wobei $w \in W$ und $v \in M(\mathfrak{M})$, für beliebige Formeln $A(x)$.
Angenommen, es gilt $\mathfrak{M}, w \vDash_v \exists x \Diamond A(x)$. Dann gibt es eine x-Variante v' von v in w, so dass $\mathfrak{M}, w \vDash_{v'} \Diamond A(x)$. Folglich gibt es eine Welt $w' \in W$ mit wR_Ew', so dass $\mathfrak{M}, w' \vDash_{v'} A(x)$. Da $\mathfrak{M}$ monoton und wR_Ew', gilt $M(w) \subseteq M(w')$. Da v' eine

x-Variante von v in w ist, gilt $v'(x) \in M(w)$, und wegen $M(w) \subseteq M(w')$ auch $v'(x) \in M(w')$. Dann ist v' aber auch eine x-Variante von v in w'. Folglich gilt $\mathfrak{M}, w' \vDash_v \exists x A(x)$, und da $wR_E w'$ auch $\mathfrak{M}, w \vDash_v \Diamond \exists x A(x)$.

Zum Beweis der Richtung von rechts nach links per Kontraposition nehmen wir an, dass der Rahmen $\langle W, R_E, M\rangle$ *nicht* monoton ist, und zeigen für ein auf diesem Rahmen beruhendes Modell $\mathfrak{M}$, dass die konverse Barcansche Formel $\exists x \Diamond A(x) \to \Diamond \exists x A(x)$ für $A(x) = P(x)$ in $\mathfrak{M}$ in der Welt $w \in W$ *nicht* gilt, woraus $\nvDash \exists x \Diamond A(x) \to \Diamond \exists x A(x)$ folgt.
Da $\langle W, R_E, M\rangle$ nicht monoton ist, muss es $w, w' \in W$ geben mit $wR_E w'$, aber $M(w) \nsubseteq M(w')$. Letzteres gelte aufgrund des Gegenstands a, für den zwar $a \in M(w)$ aber $a \notin M(w')$ gilt. Für das 1-stellige Relationszeichen P sei $\mathcal{I}(P, w') = \{a\}$ und $\mathcal{I}(P, w^*) = \emptyset$ für alle $w^* \in W$ mit $w^* \neq w'$. Für das so definierte Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ gilt

$$\mathfrak{M}, w \nvDash \exists x \Diamond P(x) \to \Diamond \exists x P(x)$$

Sei nämlich v eine Variablenbelegung in $\mathfrak{M}$ und v' die x-Variante $v[x \mapsto a]$. Da $a \in \mathcal{I}(P, w')$, gilt $\mathfrak{M}, w' \vDash_{v'} P(x)$. Da $wR_E w'$, gilt $\mathfrak{M}, w \vDash_{v'} \Diamond P(x)$. Wegen $a \in M(w)$ ist v' eine x-Variante von v in w. Folglich gilt

$$\mathfrak{M}, w \vDash_v \exists x \Diamond P(x)$$

Hingegen ist $\mathfrak{M}, w^* \nvDash_v \exists x P(x)$ für jede Welt $w^* \in W$ (einschließlich w'). Andernfalls müsste es eine x-Variante v^* von v in w^* geben, so dass $\mathfrak{M}, w^* \vDash_{v^*} P(x)$, d. h. $v^*(x) \in \mathcal{I}(P, w^*)$. Dies ist nicht der Fall:

(i) Im Fall $w^* \neq w'$ ist $v^*(x) \notin \mathcal{I}(P, w^*)$, da $\mathcal{I}(P, w^*) = \emptyset$.

(ii) Im Fall $w^* = w'$ ist ebenfalls $v^*(x) \notin \mathcal{I}(P, w^*)$. Denn wegen $\mathcal{I}(P, w') = \{a\}$ müsste $v^*(x) = a$ sein. Es ist aber $a \notin M(w')$, d. h. v^* kann keine x-Variante von v in w' sein.

Also gilt $\mathfrak{M}, w^* \nvDash_v \exists x P(x)$ für jede Welt $w^* \in W$ (einschließlich w'). Somit gilt $\exists x P(x)$ insbesondere auch in keiner von w aus erreichbaren Welt. Also gilt für w

$$\mathfrak{M}, w \nvDash_v \Diamond \exists x P(x)$$

Es ist also $\mathfrak{M}, w \vDash_v \exists x \Diamond P(x)$, aber $\mathfrak{M}, w \nvDash_v \Diamond \exists x P(x)$, d. h. $\mathfrak{M}, w \nvDash \exists x \Diamond P(x) \to \Diamond \exists x P(x)$. QED

Man kann zeigen, dass die Barcansche Formel die Rahmeneigenschaft der Anti-Monotonie charakterisiert.

Definition 5.27 Ein erweiterter Rahmen $\langle W, R_E, M\rangle$ für variierende Gegenstandsbereiche heißt *anti-monoton*, falls für alle $w, w' \in W$ gilt: wenn $wR_E w'$, dann $M(w') \subseteq M(w)$. *anti-monoton*
Ein Modell heißt *anti-monoton*, falls der zugrunde liegende Rahmen anti-monoton ist.

Theorem 5.28 *Ein für variierende Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen ist genau dann anti-monoton, wenn in jedem auf ihm beruhenden Modell die Barcansche Formel gilt.*

Beweis. Übungsaufgabe. QED

Nun zeigen wir, dass die Barcansche Formel zusammen mit der konversen Barcanschen Formel die Rahmeneigenschaft lokal konstant zu sein charakterisiert.

Definition 5.29 Ein erweiterter Rahmen $\langle W, R_E, M\rangle$ für variierende Gegenstandsbereiche heißt *lokal konstant*, falls für alle $w, w' \in W$ gilt: wenn wR_Ew', dann $M(w) = M(w')$. Ein Modell heißt *lokal konstant*, falls der zugrunde liegende Rahmen lokal konstant ist. *lokal konstant*

Korollar 5.30 *Aufgrund der Theoreme 5.26 und 5.28 gilt: Ein für variierende Gegenstandsbereiche erweiterter Rahmen ist genau dann lokal konstant, wenn in jedem auf ihm beruhenden Modell sowohl die Barcansche als auch die konverse Barcansche Formel gilt.*

Theorem 5.31 *Sei A eine geschlossene Formel, $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}$ ein lokal konstantes Modell, und $\mathfrak{M}_{\mathrm{konst}}$ ein Modell für konstante Gegenstandsbereiche. Dann gilt: Für alle Modelle $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}$ gilt $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}} \models A$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}_{\mathrm{konst}} \models A$ für alle Modelle $\mathfrak{M}_{\mathrm{konst}}$ gilt.*

Beweis. Die Richtung von links nach rechts ist trivial, da alle Modelle $\mathfrak{M}_{\mathrm{konst}}$ in der Menge der Modelle $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}$ enthalten sind.

Für die Richtung von rechts nach links nehmen wir an, dass $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}, w \not\models A$ für ein Modell $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ mit $w \in W$. Wir konstruieren ein Modell $\mathfrak{M}_{\mathrm{konst}}$, so dass $\mathfrak{M}_{\mathrm{konst}}, w \not\models A$.

- Eine Folge von Welten $w_1, \ldots, w_n \in W$ mit $w_i R_E w_{i+1}$ $(1 \leq i < n)$ bezeichnen wir als *Pfad* in $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}$.
- Eine Welt w' heißt *relevant* für w_1, falls $w' = w_1$ ist, oder es einen Pfad von w_1 zu w' gibt.

  Die in diesem Sinne für w_1 relevanten Welten sind genau jene, die für die Gültigkeit einer Formel in w_1 von Bedeutung sein können.

Für die Welt w haben wir angenommen, dass $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}, w \not\models A$. Sei nun W' die Menge aller für $w \in W$ relevanten Welten in W. R' sei die auf W' beschränkte Erreichbarkeitsrelation R_E, M' und $\mathcal{I}'$ die auf W' beschränkten Funktionen M und $\mathcal{I}$. Dieses neue Modell $\mathfrak{M}' = \langle W', R', M', \mathcal{I}'\rangle$ ist ein Teilmodell von $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}$. Da in $\mathfrak{M}'$ alle für w relevanten Welten berücksichtigt werden, gilt

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}, w \models A \iff \mathfrak{M}', w \models A$$

Folglich gilt $\mathfrak{M}', w \not\models A$, da wir $\mathfrak{M}_{\mathrm{lk}}, w \not\models A$ angenommen hatten.
Es ist $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_{\mathrm{konst}}$, da es für $w_n \in W'$ und $w \neq w_n$ einen Pfad von w zu w_n geben muss, in dem alle in ihm vorkommenden Welten w' wegen der Eigenschaft lokal konstant zu sein denselben Gegenstandsbereich $M(w')$ haben müssen, und somit alle Welten in $\mathfrak{M}'$ denselben Gegenstandsbereich $M(w)$ haben. QED

Bemerkungen. (i) Die konverse Barcansche Formel sagt, dass beim Übergang zu einer möglichen Welt kein Gegenstand aufhört zu existieren.

(ii) Die Barcansche Formel sagt, dass beim Übergang zu einer möglichen Welt keine neuen Gegenstände hinzukommen.

(iii) Beide Formeln zusammen besagen, dass in jeder Welt dieselben Gegenstände existieren.

Korollar 5.32 *Sei A eine geschlossene Formel. Für alle Modelle $\mathfrak{M}_{\mathrm{konst}}$ gilt $\mathfrak{M}_{\mathrm{konst}} \models A$ genau dann, wenn für alle Modelle $\mathfrak{M}_{\mathrm{var}}$ unter der Annahme von Barcanscher und konverser Barcanscher Formel $\mathfrak{M}_{\mathrm{var}} \models A$ gilt.*

Setzt man also für Modelle mit variierendem Gegenstandsbereich die Allgemeingültigkeit von sowohl der Barcanschen als auch der konversen Barcanschen Formel voraus, so kann die Semantik für konstante Gegenstandsbereiche (possibilistische Quantifikation) in die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche (aktualistische Quantifikation) eingebettet werden. Umgekehrt kann die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche unter Hinzunahme der Existenzrelativierung in die Semantik für konstante Gegenstandsbereiche eingebettet werden. Insgesamt gilt, dass die eine Semantik der anderen nicht vorgezogen werden muss, da für beide Semantiken Mittel zur Simulation der jeweils anderen zur Verfügung stehen.

5.7 Designatoren

Bisher haben wir uns im Rahmen der modalen Quantorenlogik auf Sprachen $\mathscr{L}$ *ohne* Individuenkonstanten k beschränkt. Jetzt lassen wir auch Konstanten zu, für die für Rahmen $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M\rangle$ für variierende Gegenstandsbereiche und Sprachen $\mathscr{L}$ eine *nicht-starre Interpretation* $\mathcal{I}$ angegeben werden kann wie folgt:

nicht-starre Interpretation

$$\mathcal{I}(k, w) \in M(\mathfrak{F}) \text{ für } w \in W \text{ und Konstanten } k \in \mathscr{L}.$$

Konstanten k können also in w auch Gegenstände bezeichnen, die in $M(w)$ nicht vorkommen. Die bezeichneten Gegenstände müssen nur in $M(\mathfrak{F})$, d. h. in mindestens einer Welt, vorkommen. Die nicht-starre Interpretation $\mathcal{I}$ ordnet dabei aber jeder Konstante $k \in \mathscr{L}$ für jede Welt $w \in W$ einen Gegenstand in $M(\mathfrak{F})$ zu.

Es ist $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ ein *nicht-starres Modell*, falls $\mathfrak{F} = \langle W, R_E, M\rangle$ ein Rahmen für variierende Gegenstandsbereiche und $\mathcal{I}$ eine nicht-starre Interpretation auf $\mathfrak{F}$ ist.

nicht-starres Modell

Für solche Modelle $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$, Variablenbelegungen v in $\mathfrak{M}$ und Terme t (d. h. für Variablen x oder Konstanten k) sind *Termbelegungen* nun wie folgt definiert:

Termbelegung

$$[\![t, w]\!]_v^{\mathfrak{M}} := \begin{cases} v(x) & \text{falls } t = x, \\ \mathcal{I}(k, w) & \text{falls } t = k. \end{cases}$$

Man beachte, dass $[\![t, w]\!]_v^{\mathfrak{M}}$ im Fall $t = x$ unabhängig von der Welt w ist, da $v(x)$ nicht von w abhängt. *Gültigkeit atomarer Formeln* $R(t_1, \ldots, t_n)$ *in* $\mathfrak{M}$ *in* w *unter* v ist dann durch

Gültigkeit in $\mathfrak{M}$ in w unter v

$$\mathfrak{M}, w \vDash_v R(t_1, \ldots, t_n) \;:\Longleftrightarrow\; \langle [\![t_1, w]\!]_v^{\mathfrak{M}}, \ldots, [\![t_n, w]\!]_v^{\mathfrak{M}}\rangle \in \mathcal{I}(R, w)$$

definiert. Zusätzlich verwenden wir atomare Formeln der Form $(t_1 \doteq t_2)$, wobei *Gleichheit* "$\doteq$" als logische Konstante in der Bedeutung

Gleichheit

$$\mathfrak{M}, w \vDash_v (t_1 \doteq t_2) \;:\Longleftrightarrow\; [\![t_1, w]\!]_v^{\mathfrak{M}} = [\![t_2, w]\!]_v^{\mathfrak{M}}$$

verwendet wird. Für die übrigen logischen Konstanten gilt die Semantik für variierende Gegenstandsbereiche.

Bemerkung. Man kann auch zulassen, dass gewisse Konstanten in bestimmten Welten uninterpretiert bleiben, also nicht jeder Konstante für jede Welt ein Gegenstand in $M(\mathfrak{F})$ zugeordnet werden muss. In diesem Fall ist $\mathcal{I}(k, w)$ eine partielle Funktion, da es Argumente k, w gibt, für die $\mathcal{I}(k, w)$ undefiniert ist. Es stellt sich dann die Frage, was für Formeln mit solchen Konstanten in jenen Welten gilt, in denen diese Konstanten überhaupt keinen Gegenstand bezeichnen.

Ist z. B. $\mathcal{I}(k, w) =$ *undefiniert*, dann ist für die Formel $P(k)$ unbestimmt, ob $[\![k, w]\!]_v^{\mathfrak{M}} \in$

$\mathcal{I}(P, w)$. Folglich ist auch $\mathfrak{M}, w \vDash_v P(k)$ unbestimmt. Dies verletzt das Bivalenzprinzip der klassischen Logik, da es nun neben gültigen (d. h. wahren) und ungültigen (d. h. falschen) Aussagen auch Aussagen gibt, die weder wahr noch falsch sind. Gibt man das Bivalenzprinzip auf, so führt dies hier zu einer dreiwertigen Logik mit einem dritten Wahrheitswert "unbestimmt". Möchte man hingegen am Bivalenzprinzip festhalten, so legt man z. B. fest, dass Aussagen wie $P(k)$ im Fall $\mathcal{I}(k, w) =$ *undefiniert* in der Welt w nicht gelten, also in jenen Welten, in denen k überhaupt keinen Gegenstand bezeichnet, falsch sind.

Ein solcher Ansatz kann für definite Kennzeichnungen (engl. definite descriptions) wie "der erste Mensch auf dem Mars" oder "der gegenwärtige König von Frankreich" verwendet werden, welche dann als Konstanten behandelt werden können, die in gewissen möglichen Welten keinen Gegenstand bezeichnen.

Im Folgenden betrachten wir jedoch ausschließlich totale nicht-starre Interpretationen $\mathcal{I}$, die jeder Konstante $k \in \mathscr{L}$ für jede Welt $w \in W$ einen Gegenstand in $M(\mathfrak{F})$ zuordnen. Interpretationen dieser Art lassen die zwei folgenden uns hier interessierenden Fälle zu:

(i) Eine Konstante kann in verschiedenen möglichen Welten verschiedene Gegenstände bezeichnen.

(Zum Beispiel kann der Designator "die hellste Supernova" zu verschiedenen Zeiten verschiedene Sterne bezeichnen.)

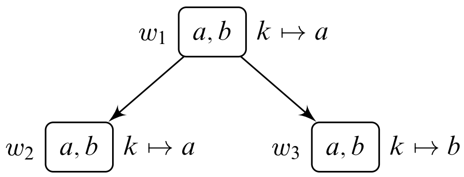
(ii) Eine Konstante kann in einer möglichen Welt einen Gegenstand bezeichnen, den es in dieser Welt nicht gibt.

(Das ist z. B. für den Designator "Pegasus" in unserer Welt der Fall.)

Da Konstanten in verschiedenen Welten verschiedene Gegenstände bezeichnen können, sind Konstanten sogenannte *nicht-starre Designatoren*.

nicht-starrer Designator

Beispiel. Wir betrachten das Modell $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I} \rangle$ mit $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, $R_E = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle\}$ und $M(w_1) = M(w_2) = M(w_3) = \{a, b\}$. Die Konstante k sei ein nicht-starrer Designator, der in w_1 und w_2 den Gegenstand a und in w_3 den Gegenstand b bezeichne; d. h. $\mathcal{I}(k, w_1) = \mathcal{I}(k, w_2) = \{a\}$ und $\mathcal{I}(k, w_3) = \{b\}$. Als Diagramm:



Es ist $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_v \forall x \exists y \, \Box(x \doteq y)$ für beliebige Variablenbelegungen v, denn es gibt für jede x-Variante v' von v in w_1 eine y-Variante v'' von v' in w_1, so dass $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_{v''} \Box(x \doteq y)$, nämlich $v'' := v'[y \mapsto v'(x)]$. Dann ist wegen $v''(x) = v''(y)$ sowohl $\mathfrak{M}, w_2 \vDash_{v''} (x \doteq y)$ als auch $\mathfrak{M}, w_3 \vDash_{v''} (x \doteq y)$ der Fall.

Es ist aber $\mathfrak{M}, w_1 \nvDash_v \exists y \, \Box(k \doteq y)$, denn für die y-Variante $v' = v[y \mapsto a]$ in w_1 gilt zwar $\mathfrak{M}, w_2 \vDash_{v'} (k \doteq y)$, aber nicht $\mathfrak{M}, w_3 \vDash_{v'} (k \doteq y)$; und für die y-Variante $v' = v[y \mapsto b]$ in w_1 gilt $\mathfrak{M}, w_3 \vDash_{v'} (k \doteq y)$, aber nicht $\mathfrak{M}, w_2 \vDash_{v'} (k \doteq y)$. Es gibt also keine y-Variante v' von v in w_1, für die in allen von w_1 aus erreichbaren Welten $(k \doteq y)$ gilt, d. h. für keine Variablenbelegung v' in w_1 gilt $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_{v'} \Box(k \doteq y)$. Also $\mathfrak{M}, w_1 \nvDash_v \exists y \, \Box(k \doteq y)$.

Bemerkung. Für $A(x) := \exists y\,\Box(x \doteq y)$ ist $\forall x \exists y\,\Box(x \doteq y) = \forall x A(x)$ und $\exists y\,\Box(k \doteq y) = A(k)$. In der klassischen (nicht-modalen) Quantorenlogik gilt $\models \forall x B(x) \to B(k)$ für beliebige Formeln B. Im Beispiel ist jedoch $\not\models \forall x A(x) \to A(k)$.

starrer Designator

Bezeichnet eine Konstante k in allen möglichen Welten denselben Gegenstand, so ist k ein sogenannter *starrer Designator*. Für starre Designatoren k gilt zumindest in der Modallogik für konstante Gegenstandsbereiche ebenfalls $\models \forall x B(x) \to B(k)$, für beliebige Formeln B. Für variierende Gegenstandsbereiche ist dies nicht der Fall: Im Modell $\mathfrak{M}$

$$w_1\ \boxed{a} \models \widetilde{P(a)} \quad k \mapsto b$$

$$w_2\ \boxed{b}\ k \mapsto b$$

ist zwar k ein starrer Designator, es ist jedoch $\mathfrak{M}, w_1 \not\models \forall x P(x) \to P(k)$, da $\mathfrak{M}, w_1 \models \forall x P(x)$ und $\mathfrak{M}, w_1 \not\models P(k)$.

Im vorherigen Beispiel haben wir uns beim Nachweis von $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \exists y\,\Box(k \doteq y)$ auf die Interpretationen von k in den beiden von w_1 aus erreichbaren Welten w_2 und w_3 bezogen. Wir haben also zunächst den Modaloperator $\Box$ und nachfolgend die Bedeutungen von k berücksichtigt. Umgekehrt hätten wir auch zunächst die Interpretation von k in w_1 zugrunde legen können, um dann nachfolgend für diese Interpretation von k die für den Modaloperator relevanten Welten w_1 und w_2 zu betrachten; in diesem Fall würde $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \exists y\,\Box(k \doteq y)$ gelten. Das folgende Beispiel verdeutlicht diese Zweideutigkeit, die bei Verwendung von nicht-starren Designatoren in Gegenwart von Modaloperatoren vorliegt.

Beispiel. Sei $\mathfrak{M} = \langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$ ein nicht-starres Modell mit $W = \{w_1, w_2\}$, $R_E = \{\langle w_1, w_2\rangle\}$, $M(w_1) = M(w_2) = \{a, b\}$ und $\mathcal{I}(P, w_1) = \mathcal{I}(P, w_2) = \{a\}$; für die Konstante k gelte $\mathcal{I}(k, w_1) = \{a\}$ und $\mathcal{I}(k, w_2) = \{b\}$, d. h. k bezeichnet in w_1 den Gegenstand a und in w_2 den Gegenstand b, ist also ein nicht-starrer Designator. Diagrammatisch:

$$\begin{tikzcd}
w_1\ \boxed{a, b} \models \widetilde{P(a)} \quad k \mapsto a \arrow[d] \\
w_2\ \boxed{a, b} \models \widetilde{P(a)} \quad k \mapsto b
\end{tikzcd}$$

Sei v eine beliebige Variablenbelegung. Gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond P(k)$?
Es bestehen zwei Möglichkeiten:

(i) Da wir nach der Gültigkeit von $\Diamond P(k)$ in der Welt w_1 fragen, und k in w_1 den Gegenstand a bezeichnet, könnten wir $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond P(k)$ als $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \Diamond P(x)$ lesen, wobei $v' = v[x \mapsto a]$. Es ist

$$\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \Diamond P(x) \iff \mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$$

da $w_1 R_E w_2$. Die rechte Seite gilt wegen $v'(x) = a \in \mathcal{I}(P, w_2)$. Also gilt auch $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond P(k)$.

(ii) Oder wir lesen $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_v \Diamond P(k)$ als $\mathfrak{M}, w_2 \vDash_v P(k)$, berücksichtigen also zunächst den Modaloperator $\Diamond$. In dieser Lesart fragen wir nach der Gültigkeit von $P(k)$ in der Welt w_2. Dann sollte

$$\mathfrak{M}, w_2 \vDash_v P(k) \iff \mathfrak{M}, w_2 \vDash_{v'} P(x)$$

für $v' = v[x \mapsto b]$ gelten, da k in der Welt w_2 den Gegenstand b bezeichnet. Die rechte Seite gilt jedoch wegen $v'(x) = b \notin \mathcal{I}(P, w_2)$ *nicht*, und somit $\mathfrak{M}, w_1 \nvDash_v \Diamond P(k)$.

Um die beiden Lesarten (i) und (ii) auch formal unterscheiden zu können, verwenden wir das Mittel der Prädikatabstraktion.

Definition 5.33 Wir erweitern die Definition modaler quantorenlogischer Formeln:

Prädikatabstraktion

(i) Ist $A(x)$ eine Formel und x eine Variable, dann ist $\langle \lambda x.A(x)\rangle$ eine *Prädikatabstraktion*. Hierbei ist λx ein variablenbindender Operator: die freien Vorkommen von x in $A(x)$ sind in $\langle \lambda x.A(x)\rangle$ gebunden; freie Vorkommen anderer Variablen in $A(x)$ bleiben frei. Die Variable x in λx ist weder frei noch gebunden.

Formel

(ii) Ist $\langle \lambda x.A(x)\rangle$ eine Prädikatabstraktion und t ein Term, dann ist $\langle \lambda x.A(x)\rangle(t)$ eine *Formel*. Die freien Variablenvorkommen von $\langle \lambda x.A(x)\rangle(t)$ sind die von $\langle \lambda x.A(x)\rangle$ und t.

Die Formel $\langle \lambda x.A(x)\rangle(t)$ kann man lesen als: "der von t bezeichnete Gegenstand hat die Eigenschaft $\langle \lambda x.A(x)$".

A gilt in $\mathfrak{M}$ in Welt w unter v

Definition 5.34 Sei $\mathfrak{M}$ ein nicht-starres Modell $\langle W, R_E, M, \mathcal{I}\rangle$, w eine Welt in W und v eine Variablenbelegung. Wir erweitern die Definition der Relation $\mathfrak{M}, w \vDash_v A$ ("*A gilt im Modell $\mathfrak{M}$ in der Welt $w \in W$ unter der Variablenbelegung v in $\mathfrak{M}$*") durch folgende Klausel:

$$\mathfrak{M}, w \vDash_v \langle \lambda x.A(x)\rangle(t) \;:\iff\; \mathfrak{M}, w \vDash_{v'} A(x), \text{ wobei } v' = v[x \mapsto [\![t, w]\!]_v^{\mathfrak{M}}]$$

Bemerkung. $\mathfrak{M}, w \vDash_v \langle \lambda x.A(x)\rangle(t)$ gilt also genau dann, wenn $\mathfrak{M}, w \vDash_{v'} A(x)$ für die x-Variante v' von v mit der Eigenschaft

$$v'(x) = \begin{cases} v(y) & \text{falls } t = y, \\ \mathcal{I}(k, w) & \text{falls } t = k \end{cases}$$

gilt, d. h. falls A in w auf den in w von t bezeichneten Gegenstand zutrifft.

Beispiel. Nun können wir die Frage, ob $\mathfrak{M}, w_1 \vDash_v \Diamond P(k)$ für eine beliebige Variablenbelegung v gilt, präzisieren, indem wir die beiden möglichen Lesarten von $\Diamond P(k)$ formal unterscheiden:

(i) $\langle \lambda x.\Diamond P(x)\rangle(k)$ ("Die Eigenschaft, möglicherweise P zu sein, trifft auf k zu"),

(ii) $\Diamond\langle \lambda x.P(x)\rangle(k)$ ("Es ist möglich, dass die Eigenschaft P zu sein, auf k zutrifft").

Wir betrachten wieder das Modell $\mathfrak{M}$ aus dem letzten Beispiel:

$$
\begin{tikzcd}
w_1 \; \boxed{a, b} \models \widetilde{P(a)} \quad k \mapsto a \arrow[d] \\
w_2 \; \boxed{a, b} \models \widetilde{P(a)} \quad k \mapsto b
\end{tikzcd}
$$

(i) Gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \langle \lambda x. \Diamond P(x) \rangle(k)$?

Es gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \langle \lambda x. \Diamond P(x) \rangle(k)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, w_1 \models_{v'} \Diamond P(x)$ für $v'(x) = \mathcal{I}(k, w_1) = a$. Da w_1 nur w_2 sieht, ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$. Wegen $v'(x) = a \in \mathcal{I}(P, w_2)$ gilt $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$. Also gilt auch $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \langle \lambda x. \Diamond P(x) \rangle(k)$.

(ii) Gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$?

Es gilt $\mathfrak{M}, w_1 \models_v \Diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, w_2 \models_v \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$. Letzteres gilt genau dann, wenn $\mathfrak{M}, w_2 \models_{v'} P(x)$ für $v'(x) = \mathcal{I}(k, w_2) = b$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $v'(x) \in \mathcal{I}(P, w_2)$. Da $v'(x) = b \notin \mathcal{I}(P, w_2)$, ist $\mathfrak{M}, w_2 \not\models_{v'} P(x)$, also $\mathfrak{M}, w_2 \not\models_{v'} \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$ und somit $\mathfrak{M}, w_1 \not\models_v \Diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$.

Das Beispiel zeigt, dass $\not\models \langle \lambda x. \Diamond P(x) \rangle(k) \to \Diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k)$. Auch die umgekehrte Richtung ist nicht allgemeingültig, d. h. $\not\models \Diamond \langle \lambda x. P(x) \rangle(k) \to \langle \lambda x. \Diamond P(x) \rangle(k)$.

Literatur

P. Blackburn, M. de Rijke & Y. Venema (2001), *Modal Logic*. Cambridge University Press.

M. D'Agostino, D. M. Gabbay, R. Hähnle und J. Posegga (Hrsg.) (1999), *Handbook of Tableau Methods*. Dordrecht: Kluwer.

M. Fitting (1983), *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*. Dordrecht: Reidel.

M. Fitting (1999), On quantified modal logic, *Fundamenta Informaticae* 39, 105–121.

M. Fitting & R. L. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.

U. Friedrichsdorf (1992), *Einführung in die klassische und intensionale Logik*. Wiesbaden: Vieweg.

D. Jacquette (Hrsg.) (2002), *A Companion to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.

R. Girle (2009), *Modal Logics and Philosophy*, 2nd edition. Durham: Acumen.

L. Goble (Hrsg.) (2001), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.

R. Goldblatt (1992), *Logics of Time and Computation*, 2nd edition. Stanford: CSLI Publications.

G. E. Hughes & M. J. Cresswell (1996), *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge.

G. Priest (2008), *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press.

P. Schroeder-Heister (2008), *Einführung in die Logik*, Skriptum. http://www.uni-tuebingen.de/en/30440.

R. M. Smullyan (1995), *First-Order Logic*. New York: Dover Publications.

R. M. Smullyan (2009), *Logical Labyrinths*. Wellesley, MA: A K Peters.

Sachverzeichnis