1 Dualität und Normalformen

1.1 Notation

Eine *Bewertung* oder *Belegung* v ist eine atomare Wahrheitswertzuordnung, d.h. eine Funktion, die jeder Aussagenvariablen A_i einen der Werte 0 und 1 zuordnet. $[\![.]\!]_v$ sei die durch v eindeutig bestimmte Wahrheitswertzuordnung für beliebige Formeln, d.h. $[\![\Phi]\!]_v$ = der Wahrheitswert von Φ unter v. Wir schreiben auch $\overline{[\![\Phi]\!]_v}$ für $1 - [\![\Phi]\!]_v$.

1.1.1 Nullstellige Junktoren

$\top$ und $\bot$ seien nullstellige Junktoren.
Es gelte: $[\![\top]\!]_v := 1$ und $[\![\bot]\!]_v := 0$ für alle Belegungen v.

1.1.2 Definition von $\neg$ durch $\bot$

Es gilt jetzt: $\neg\Phi \mathrel{=\!|\!\models} \Phi \to \bot$
Damit ist auch $\{\to, \bot\}$ funktional vollständig (adäquat).

1.1.3 Dualität

Sei $\overline{v}(A) := 1 - v(A)$ für jede Aussagenvariable A. D.h. $\overline{v}$ vertauscht die Wahrheitswerte.
Der zum n-stelligen Junktor J *duale Junktor* J^d ist wie folgt definiert:

$$[\![J^d(\Phi_1, ..., \Phi_n)]\!]_v := 1 - [\![J(\Phi_1, ..., \Phi_n)]\!]_{\overline{v}}$$

Die zu Φ *duale Formel* Φ^d erhält man aus Φ dadurch, dass man jeden Junktor in Φ durch seinen dualen Junktor ersetzt.

Rezept Man erhält den zu J dualen Junktor, indem man in der Wahrheitstafel für J <u>überall</u> 0 und 1 vertauscht.

Beispiel:

		J
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$\leftrightsquigarrow$

		J^d
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

		$\wedge$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\leftrightsquigarrow$

		$\vee$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

	$\neg$
0	1
1	0

$\leftrightsquigarrow$

	$\neg$
1	0
0	1

		$\to$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\leftrightsquigarrow$

		$-\!\!<$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Grenzfall: $\top \leftrightsquigarrow \bot$

Satz 1.1 *Es gilt* $[\![\Phi^d]\!]_v = \overline{[\![\Phi]\!]_{\overline{v}}}$ *und* $[\![\Phi^d]\!]_{\overline{v}} = \overline{[\![\Phi]\!]_v}$

Satz 1.2 Φ^{dn} *entstehe aus* Φ *wie folgt: Wir bilden zunächst* Φ^d *und ersetzen dann jede Aussagenvariable* A *durch* $\neg A$*, wenn vor* A *kein Negationszeichen*

steht, bzw. lassen vor A ein Negationszeichen weg, falls vor A ein Negationszeichen steht.
Dann gilt: $\Phi^{dn} \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\Phi$

Beweis: $[\![\Phi^{dn}]\!]_v = [\![\Phi^d]\!]_{\overline{v}} = \overline{[\![\Phi]\!]_v} = [\![\neg\Phi]\!]_v$ □

Beispiel:

$$\text{de Morgan:}\quad \neg(A_1 \wedge A_2) \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg A_1 \vee \neg A_2$$
$$\neg(\Phi \to \Psi) \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\Phi \prec \neg\Psi$$

1.1.4 Distributivgesetze

$$\text{Sei} \bigwedge_{1\leq i\leq n} \Phi_i := \Phi_1 \wedge ... \wedge \Phi_n \quad \text{und} \quad \bigvee_{1\leq i\leq n} \Phi_i := \Phi_1 \vee ... \vee \Phi_n$$

Dann gilt:

$$\bigwedge_{1\leq i\leq n} \Phi_i \vee \bigwedge_{1\leq j\leq m} \Psi_j \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigwedge_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} (\Phi_i \vee \Psi_j)$$

$$\bigvee_{1\leq i\leq n} \Phi_i \wedge \bigvee_{1\leq j\leq m} \Psi_j \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigvee_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} \Phi_i \wedge \Psi_j$$

Wir schreiben auch:
$(.)^{\mathrm{distr}}$ = Ergebnis der Anwendung der Distributivgesetze

1.1.5 Normalformen

Ein *Literal* ist von der Form A oder $\neg A$ für eine Aussagenvariable A. Eine Formel ist in *konjuktiver Normalform*, wenn sie die Form $\bigwedge_{1\leq i\leq n} \bigvee_{1\leq j\leq m} L_{ij}$ hat, für Literale L_{ij}. Eine Formel ist in *disjunktiver Normalform*, wenn sie die Form $\bigvee_{1\leq i\leq n} \bigwedge_{1\leq j\leq m} L_{ij}$ hat, für Literale L_{ij}.

Bemerkung: $A_1 \wedge \neg A_2$ ist in KNF als auch in DNF.

Satz 1.3 *Zu jeder Formel aus $(\wedge, \vee, \neg)$ gibt es eine äquivalente Formel in KNF und eine äquivalente Formel in DNF.*

Beweis: simultane Definition von $KNF(\Phi)$ und $DNF(\Phi)$
$KNF(L) = DNF(L) = L$ für L Literal
$KNF(\neg\Phi) = (DNF(\Phi))^{dn}$ falls Φ kein Literal
$DNF(\neg\Phi) = (KNF(\Phi))^{dn}$ falls Φ kein Literal
$KNF(\Phi \wedge \Psi) = KNF(\Phi) \wedge KNF(\Psi)$
$DNF(\Phi \wedge \Psi) = (DNF(\Phi) \wedge DNF(\Psi))^{\mathrm{distr}}$
$KNF(\Phi \vee \Psi) = (KNF(\Phi) \vee KNF(\Psi))^{\mathrm{distr}}$
$DNF(\Phi \vee \Psi) = DNF(\Phi) \vee DNF(\Psi)$ □

praktisches Verfahren

1. Ersetze Junktoren, die von $\wedge, \vee, \neg$ verschieden sind
2. Ziehe Negationen nach innen
3. Eliminiere $\neg\neg$
4. „Multipliziere aus“

Anderes Verfahren: aus Wahrheitstafel
DNF sofort
$KNF(\Phi) = DNF(\neg\Phi)^{dn}$