

Mathematische Logik I

Blatt 2

Aufgabe 4: Sei $\mathcal{L}(\wedge, \vee)$ eine aussagenlogische Sprache, in der die Konjunktion und die Disjunktion die einzigen Junktoren sind. Definieren Sie geeignete Belegungen v und w und zeigen Sie (durch Induktion) die folgenden Aussagen:

1. Für alle Formeln $\phi \in \mathcal{L}(\wedge, \vee)$ ist $\llbracket \phi \rrbracket_v = 0$.
2. Für alle Formeln $\phi \in \mathcal{L}(\wedge, \vee)$ ist $\llbracket \phi \rrbracket_w = 1$.

Gibt es in $\mathcal{L}(\wedge, \vee)$ Tautologien? Welche Formeln sind erfüllbar, welche kontingent und welche kontradiktorisch? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

Hinweis (Wahrheitstafeln): Halten Sie sich beim Aufbau von Wahrheitstafeln an das Beispiel S. 15 im Skript; achten Sie auf sinnvolle Reihenfolge der Zeilen.

Aufgabe 5: Geben Sie für die folgenden Formeln jeweils eine vollständige Wahrheitstafel an.

- (a) $p \vee \neg p \rightarrow q \wedge \neg q$ (b) $\neg(p \wedge p \rightarrow \perp)$
(c) $(p_1 \rightarrow p_2) \vee p_3$ (d) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Analysieren Sie jeweils die Wahrheitstafel und geben Sie an, ob die untersuchten Formeln Tautologien, Kontradiktionen, kontingente oder erfüllbare Formeln sind.

Aufgabe 6: Seien ϕ und ψ beliebige aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie die (metasprachliche) Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. ϕ und ψ sind logisch äquivalent; es gilt also $\phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$.
2. Für jede Belegung v gilt: $\llbracket \phi \rrbracket_v = \llbracket \psi \rrbracket_v$.
3. $\phi \leftrightarrow \psi$ ist logisch allgemeingültig; es gilt also $\models \phi \leftrightarrow \psi$.

Aufgabe 7 (Zusatzaufgabe): Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel (W), dass das Formelschema $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ eine Tautologie ist. (Diese wird nach Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) auch *Peirce'sche Tautologie* genannt.) Geben Sie anschließend jeweils (möglichst einfache) konkrete Formeln ϕ und ψ an, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Wahrheitstafel von $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ benötigt genau vier Zeilen, die alle durch eine einzige Zeile von W repräsentiert werden.
2. Die Wahrheitstafel von $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ benötigt genau zwei Zeilen, die durch zwei verschiedene Zeilen von W repräsentiert werden.
3. Die Wahrheitstafel von $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ benötigt genau zwei Zeilen, die alle durch eine einzige Zeilen von W repräsentiert werden.

Begründen Sie jeweils kurz, warum Ihre Wahl von ϕ und ψ die jeweilige Bedingung erfüllt.

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 30. April.