Prof. Schroeder-Heister **Sommersemester 2014**
René Gazzari **Universität Tübingen**

Mathematische Logik I

Blatt 9

Aufgabe 32: Sei $\mathfrak{L}$ formale Sprache mit 1-stelligem Funktionszeichen $\dot{f}$ und 2-stelligem Funktionszeichen $\dot{g}$. Es werden zwei $\mathfrak{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ über der Menge $\mathbb{N}$ betrachtet. Das Funktionszeichen $\dot{g}$ wird in beiden Strukturen durch die Addition, $\dot{f}$ in $\mathfrak{A}$ durch $n \mapsto 2$ und in $\mathfrak{B}$ durch $n \mapsto n \mod 4$ interpretiert. Prüfen Sie die folgenden Aussagen in beiden Strukturen auf Gültigkeit:

(a) $\forall x \exists y : \dot{f}(\dot{g}(x,y)) = \dot{f}(x)$
(b) $\exists y \forall x : \dot{f}(\dot{g}(x,y)) = \dot{f}(x)$

Aufgabe 33: Sei $\mathfrak{L}$ beliebige formale Sprache, $\mathfrak{A}$ beliebige $\mathfrak{L}$-Struktur und $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ beliebige Formeln. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Wenn $\mathfrak{A} \models \phi$ oder $\mathfrak{A} \models \psi$, dann auch $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$.
2. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

   (Beweisen Sie diese Aussage durch die Angabe und der Überprüfung eines möglichst einfachen Gegenbeispiels.)
3. Falls ϕ und ψ Aussagen sind, dann gilt die Umkehrung.

Aufgabe 34: Sei $\mathfrak{L}$ beliebige formale Sprache. Prüfen Sie, ob die angegebenen Formeln und Formelschemata allgemeingültig sind.

(a) $\exists x\, (\phi \to \forall x\, \phi)$
(b) $\forall x\, (\phi \to \phi) \to (\phi \to \forall x\, \phi)$
(c) $x = y \to \forall x \forall y\, x = y$

(Beweisen Sie gegebenenfalls die Allgemeingültigkeit; andernfalls geben Sie ein möglichst einfaches Gegenbeispiel an.)

Aufgabe 35 (Zusatzaufgabe): Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Der Existenzquantor kann durch die logischen Zeichen $\perp$, $\to$ und $\forall$ ausgedrückt werden.
2. Der Quantor $\exists_1$ (*es gibt genau ein Objekt*) kann mithilfe der üblichen logischen Zeichen (wie definiert) ausgedrückt werden.
3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann die Aussage *„Es gibt mehr als n Elemente.“* durch eine Formel ϕ_n ausgedrückt werden. (Es gilt genau dann $\mathfrak{A} \models \phi_n$, wenn das Universum von $\mathfrak{A}$ mindestens $n+1$ Elemente enthält.)
4. Die Aussage *„Es gibt unendlich viele Elemente.“* kann durch eine Formelmenge Γ charakterisiert werden. (Es gilt genau dann $\mathfrak{A} \models \Gamma$, wenn $\mathfrak{A}$ ein unendliches Universum besitzt.)

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 25. Juni.