Tag der Mathematik 2024

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen:

Zentrum für Mathematik · Tachauer Strasse 4 · 36119 Neuhof · Tel: 06655-9176355 · Internet: https://zfm.education · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe G1:
Gegeben seien 24 Punkte in der Ebene in allgemeiner Lage, das heißt, dass keine 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

a) Je 3 der 24 Punkte bestimmen dann als Eckpunkte ein Dreieck. Wieviele solcher Dreiecke kann man bilden?

b) Aus je 4 Punkten können 4 Dreiecke gebildet werden. Zeigen Sie, dass höchstens 3 von solchen 4 Dreiecken spitzwinklig sind, das heißt, dass alle Innenwinkel kleiner $90°$ sind.

Lösung G1:

a) Für die Wahl des ersten Eckpunktes hat man 24 Wahlmöglichkeiten,
für die Wahl des zweiten Eckpunktes hat man dann noch 23 Wahlmöglichkeiten
und für die Wahl des dritten Eckpunktes noch 22 Wahlmöglichkeiten.
Zusammen $24 \cdot 23 \cdot 22$ Möglichkeiten 3 Eckpunkte nacheinander auszuwählen, wenn man die Reihenfolge mit beachtet.

Ein Dreieck mit beispielsweise den Eckpunkten A, B und C wird dabei mehrfach gewählt.

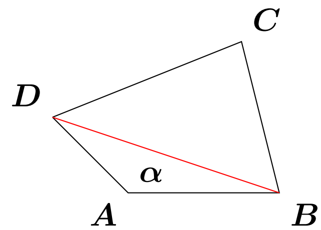
Es gibt 3 Möglichkeiten, ob Eckpunkt A als erster, zweiter oder dritter Eckpunkt gewählt wird und in jedem der 3 Fälle noch die Wahl, ob Eckpunkt B vor oder nach Eckpunkt C gewählt wurde.

Jedes Dreieck wird nach obiger Methode also 6 mal gezählt.

Es gibt also $\binom{24}{3} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024$ verschiedene Dreiecke.

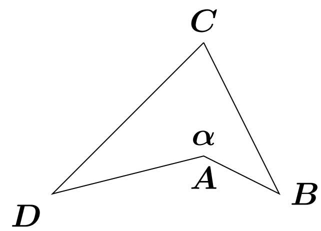
b) Im Fall von 4 Punkten (in allgemeiner Lage) bilden sie entweder ein konvexes Viereck, oder ein Viereck mit einer einspringenden Ecke.
(Der Winkel $180°$ kann nicht vorkommen, da sonst 3 Punkte auf einer Geraden lägen.)

Fall 1: konvexes Viereck:



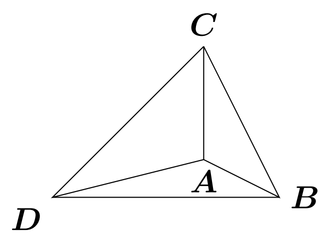
Von den 4 Winkeln eines Vierecks $ABCD$ hat der größte mindestens $90°$. Sei dies ohne Einschränkung der Winkel α bei A. Dann ist das Dreieck DAB nicht spitzwinklig. Dies ist eines von $\binom{4}{3} = 4$ Dreiecken, die man aus den 4 Punkten bilden kann.

Fall 2: Das Viereck ist nicht konvex und hat daher einen überstumpfen Winkel größer $180°$. Ohne Einschränkung sei dies der Winkel α bei A.



Der Punkt A liegt dann im Inneren des Dreiecks BCD.

Wir betrachten nun die 3 möglichen Dreiecke mit A als Eckpunkt.



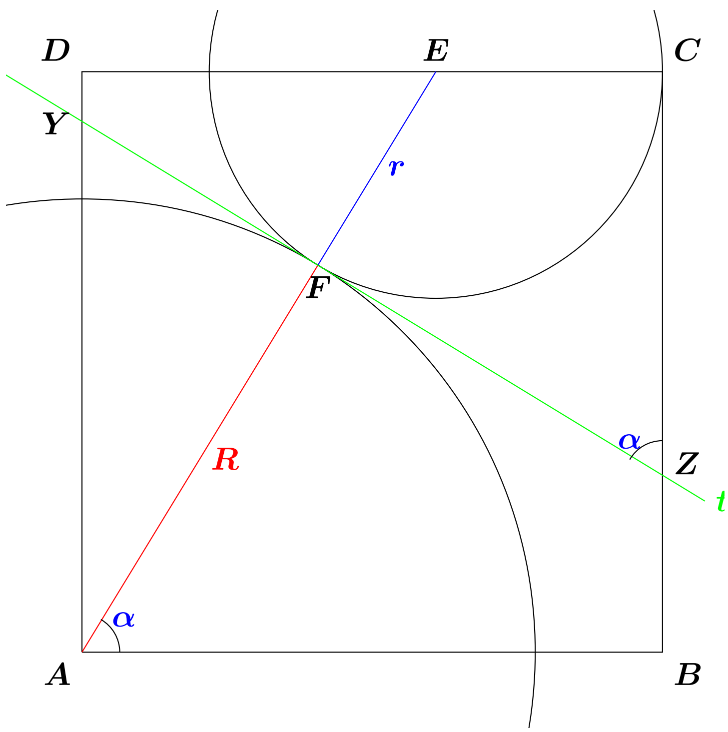
Die Dreieckswinkel dieser drei Dreiecke im Punkt A ergänzen sich zu $360°$. Mindestens einer von ihnen ist daher größer als zu $90°$.

Daher ist mindestens eines der Dreiecke ABC, ACD und ADB stumpfwinklig.

Aufgabe G2:
$ABCD$ sei ein Quadrat mit Seitenlänge größer als 6.
Der Kreis mit Radius $R = 6$ um den Punkt A berührt einen Kreis mit Radius $r = 3$, dessen Mittelpunkt E auf der Strecke DC liegt und der durch den Punkt C geht.
Die gemeinsame Tangente im Berührpunkt der beiden Kreise schneidet die Seite AD im Punkt Y und die Seite BC im Punkt Z.

Skizzieren Sie die Situation und bestimmen Sie den Abstand zwischen Y und Z.

Lösung G2:



(für die Skizze auch ohne α, R und r)

Die Tangente t an die beiden Kreise im Berührpunkt F steht senkrecht auf der Verbindungslinie AE der beiden Mittelpunkte.

Die Gerade durch A und E schneidet die beiden parallelen Strecken AB und CD im gleichen Winkel wie die Tangente die beiden parallelen Strecken BC und AD.
Daher ist $|YZ| = |AE| = R + r = 6 + 3 = 9$.

Aufgabe G3:

a) Man zeige: Eine 4-stellige Dezimalzahl $\boldsymbol{ABCD}$ ist durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme

$$Q_a(A, B, C, D) := D - C + B - A$$

durch 11 teilbar ist.

b) Gegeben sei eine 4-stellige Zahl, die aus den 4 Ziffern 1,3,5,7 in beliebiger Reihenfolge besteht.

Welche Reste können entstehen, wenn sie durch 11 geteilt wird?

Lösung G3:

a)

$$\begin{aligned} ABCD &= 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D = \\ &= 1100 \cdot A + 100 \cdot (B - A) + 10 \cdot C + D \\ &= 1100 \cdot A + 110 \cdot (B - A) + 10 \cdot (C - B + A) + D \\ &= 1100 \cdot A + 110 \cdot (B - A) + 11 \cdot (C - B + A) + D - C + B - A \\ &= 11 \cdot [100 \cdot A + 10 \cdot (B - A) + (C - B + A)] + Q_a(ABCD) \end{aligned}$$

ist genau dann durch 11 teilbar, wenn $Q_a(ABCD)$ durch 11 teilbar.

b) Der Beweis in a) zeigt: Bei Division durch 11 hat $ABCD$ den gleichen Rest wie $D - C + B - A$, falls $D - C + B - A \geq 0$,
beziehungsweise den Rest $D - C + B - A + 11$ falls $-11 \leq D - C + B - A < 0$ und den Rest $D - C + B - A + 22$ falls $-22 \leq D - C + B - A < -11$.

Wir untersuchen daher,
welche Werte $Q_a(ABCD) = D - C + B - A$ annehmen kann,
wenn $ABCD$ aus den Ziffern 1,3,5,7 besteht.

Entscheidend ist dafür nur, welche beiden Ziffern für B und D verwendet werden. Diese gehen positiv in $Q_a(ABCD)$ ein. Die anderen beiden Ziffern bilden dann A und C und gehen negativ ein.

Wir erhalten

$$B + D \in \{1 + 3 = 4, 1 + 5 = 6, 1 + 7 = 3 + 5 = 8, 3 + 7 = 10, 5 + 7 = 12\}.$$

Für $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{C}$ bleiben dann die anderen Ziffern mit $\boldsymbol{A + C = 16 - (B + D)}$
und wir erhalten die alternierende Quersumme
$\boldsymbol{Q_a(ABCD) = B + D - (A + C) = 2(B + D) - 16}$
Als alternierende Quersummen können also auftreten:

$$\boldsymbol{Q_a(ABCD) \in \{2{\cdot}4-16 = -8, 2{\cdot}6-16 = -4, 2{\cdot}8-16 = 0, 2{\cdot}10-16 = 4, 2{\cdot}12-16 = 8\}}$$

Bei Division von $\boldsymbol{ABCD}$ durch 11 kann also der Rest $\boldsymbol{11 - 4 = 7}$, $\boldsymbol{11 - 8 = 3}$, $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{4}$
und $\boldsymbol{8}$ entstehen.

Beispiele für die Reste sind etwa

$\boldsymbol{1537 \mod 11 = 8}$

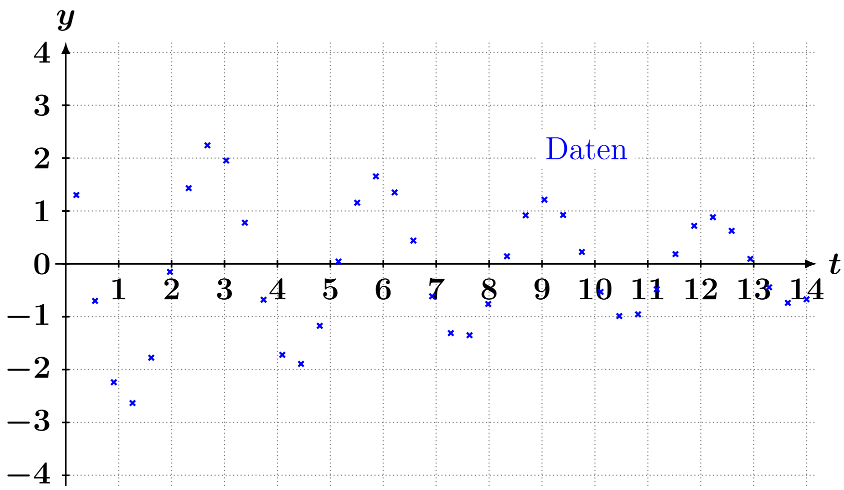
$\boldsymbol{1357 \mod 11 = 4}$

$\boldsymbol{1375 \mod 11 = 0}$

$\boldsymbol{3175 \mod 11 = 7}$

$\boldsymbol{5173 \mod 11 = 3}$.

Aufgabe G4:
Die Messdaten (kleine blaue Kreuze) sehen wie die Daten einer gedämpften Schwingung aus. Sie sollen durch eine Funktion $y = f(t) = a\sin(b(t+c))e^{dt}$ möglichst gut approximiert werden.



Schätzen Sie die Parameter a, b, c, d möglichst gut aus den gegebenen Daten. (Eine Stelle Genauigkeit reicht.)
Die Parameterschätzungen dürfen Wurzeln, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen etc. enthalten.

Lösung G4:
Die Funktion

$$f(t) = a\sin(b(t+c))e^{dt} = ae^{dt} \cdot \sin(b(t+c))$$

ist das Produkt einer Sinusschwingung $g(t) = \sin(b(t+c))$
mit einer Exponentialfunktion $h(t) = ae^{dt}$.

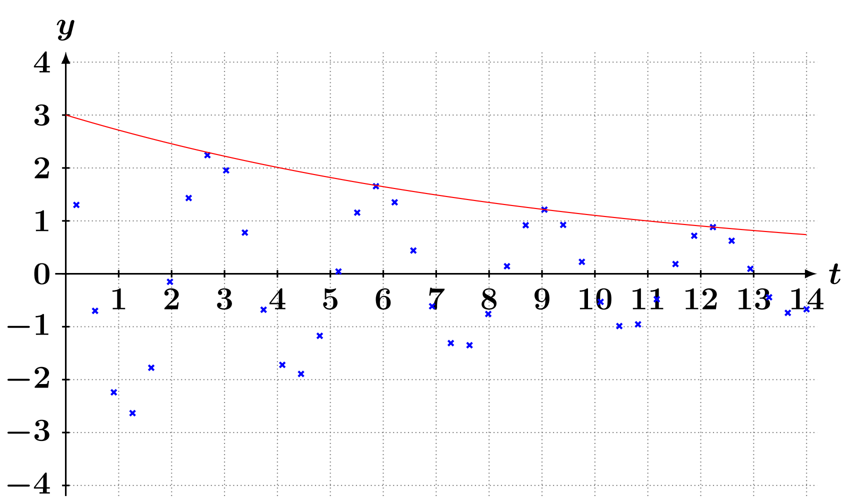
Bei der Sinusschwingung liest man die Periodenlänge $L = \frac{2\pi}{b}$ aus dem doppelten Abstand der Nullstellen ab.

(Zur Erhöhung der Genauigkeit wählen wir Nullstellen, die besonders genau ablesbar sind und möglichst weit auseinander liegen. Hier bietet sich die zweite Nullstelle $t_2 \approx 2$ und die neunte Nullstelle $t_9 \approx 13$ an, die 3.5 Periodenlängen auseinander liegen.) Wir erhalten dann zum Beispiel

$$3.5L \approx 13 - 2 = 11 \Rightarrow L \approx \frac{11}{3.5} \Rightarrow b \approx \frac{7\pi}{11} \approx 2\ .$$

Die Nullphasenverschiebung ist einfach $c = -t_2 \approx -2 + 2k\pi$.
(Man wählt den ersten Nulldurchgang von $-$ nach $+$.)

Der Vorfaktor ae^{dt} beschreibt im Fall $d < 0$ eine exponentiell abfallende Amplitude. Der Vorfaktor kann abgelesen werden, indem man eine passende Exponentialfunktion durch die Extremstellen der Schwingung zeichnet (rote Kurve).



Aus ihr liest man sofort ab: $h(0) = ae^0 = a \approx 3$.

Die Geschwindigkeit des exponentiellen Abfalls (d) erhält man durch die Abklingrate der Extremwerte. Wieder wählt man möglichst weit auseinandergelegene, gut ablesbare Extremstellen. Also zum Beispiel (2.7;2.3) und (12.2;0.9) und erhält

$$\begin{aligned}
ae^{2.7d} &\approx 2.3 \\
ae^{12.2d} &\approx 0.9 \\
\Rightarrow \frac{ae^{2.7d}}{ae^{12.2d}} &= e^{-9.5d} \approx \frac{2.3}{0.9} = 2.5555 \\
\Rightarrow d &\approx \frac{\ln 2.5}{-9.5} \quad \approx -0.1 \ .
\end{aligned}$$

Zusammenn also

$$f(t) \approx 3e^{-0.1t}\sin(2(t-2)) \ .$$

Aufgabe E1:
Der Graph einer Funktion $y = f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$, falls gilt

$$f(-x) = -f(x)\ .$$

a) Gib eine entsprechende Gleichung für eine Funktion $y = f(x)$ an, deren Graph punktsymmetrisch zu einem (beliebigen) Punkt $(x_0|y_0)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Graph jeder kubischen Funktion

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt ist.

Lösung E1:

a) Der Graph einer Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $(x_0|y_0)$ falls

$$f(x_0 + x) - y_0 = y_0 - f(x_0 - x) \Leftrightarrow f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0 \quad (*)\ .$$

(Es genügt eine der Gleichungen.)

Dabei gilt insbesondere

$$f(x_0 + 0) - y_0 = y_0 - f(x_0 - 0) \Leftrightarrow f(x_0) = y_0\ .$$

b)

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \\ p'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\ p''(x) &= 6x + 2a \\ p''(x_w) &\overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_w = -\frac{a}{3} \end{aligned}$$

Nachweis von (*):

$$\begin{aligned} & p(x_w + x) + p(x_w - x) = \\ & = (x_w + x)^3 + a(x_w + x)^2 + b(x_w + x) + c \\ & \ + (x_w - x)^3 + a(x_w - x)^2 + b(x_w - x) + c \\ & = x_w^3 + 3x_w^2 x + 3x_w x^2 + x^3 + ax_w^2 + 2ax_w x + ax^2 + bx_w + bx + c \\ & \ + x_w^3 - 3x_w^2 x + 3x_w x^2 - x^3 + ax_w^2 - 2ax_w x + ax^2 + bx_w - bx + c \\ & = 2[x_w^3 + 3x_w x^2 + a(x_w^2 + x^2) + bx_w + c] \\ & = 2[x_w^3 + ax_w^2 + bx_w + c] + 6x_w x^2 + 2ax^2 = 2p(x_w) + 6x_w x^2 + 2ax^2 \\ & = 2p(x_w) + x^2(2a + 6x_w) = 2p(x_w) \end{aligned}$$

Alternativlösung:

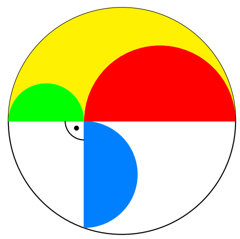
Bestimmung des Wendepunktes wie oben

Koordinatentransformation $\boldsymbol{u := x - x_w \Rightarrow x = u + x_w}$
$\boldsymbol{v := p(x) - y_w}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v(u)} &= \boldsymbol{p(x) - y_w = p(u + x_w) - y_w} \\
&= \boldsymbol{(u + x_w)^3 + a(u + x_w)^2 + b(u + x_w) + c - y_w} \\
&= \boldsymbol{u^3 - 3u^2\frac{a}{3} + 3u\frac{a^2}{3^2} - \frac{a^3}{3^3} + au^2 - 2au\frac{a}{3} + a\frac{a^2}{3^2} + bu - b\frac{a}{3} + c - y_w} \\
&= \boldsymbol{u^3 + u\left[\frac{a^2}{3} - 2\frac{a^2}{3} + b\right] + \left[-\frac{a^3}{3^3} + a\frac{a^2}{3^2} - b\frac{a}{3} + c\right] - y_w} \\
&= \boldsymbol{u^3 + u\left[\frac{a^2}{3} - 2\frac{a^2}{3} + b\right]}
\end{aligned}$$

enthält nur ungerade Potenzen in $\boldsymbol{u}$ und ist daher punktsymmetrisch zum Ursprung.

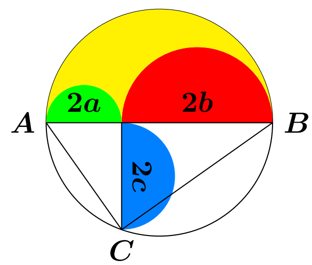
Aufgabe E2:



Der grüne Halbkreis (Radius $\boldsymbol{a}$) und der rote Halbkreis (Radius $\boldsymbol{b}$) liegen auf einem Durchmesser des Außenkreises (Radius $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$).

In welchem Verhältnis steht die Fläche des blauen Halbkreises zur gelben Fläche?

Lösung E2:



Sind $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ die Radien des grünen beziehungsweise roten beziehungsweise blauen Halbkreises, so sind $\boldsymbol{2a}$ und $\boldsymbol{2b}$ die Hypotenusenabschnitte des rechtwinkligen Dreiecks $\boldsymbol{ABC}$ mit der Hypothenusenhöhe $\boldsymbol{2c}$.

Nach dem Höhensatz des Euklid gilt

$$\boldsymbol{2a \cdot 2b = (2c)^2 \Rightarrow c^2 = ab}$$

Die Fläche des blauen Halbkreises beträgt $\boldsymbol{F_1 = \frac{1}{2}c^2\pi}$.
Die Fläche des gelben Gebietes beträgt

$$\boldsymbol{F_2 = \frac{1}{2}(a+b)^2\pi - \frac{1}{2}a^2\pi - \frac{1}{2}b^2\pi = ab\pi}$$

Damit gilt

$$\boldsymbol{\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{2}c^2\pi}{ab\pi} = \frac{\frac{1}{2}c^2}{ab} = \frac{1}{2}}\ ,$$

(unabhängig von der Wahl von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$).

Aufgabe E3:
Für die natürliche Zahl n sei

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

und

$$S(n) = \frac{H(1) + H(2) + \cdots + H(n-1)}{H(n) - 1}\ .$$

a) Berechnen Sie $S(2)$ und $S(3)$.
b) Leiten Sie eine Formel für $S(n)$ für beliebiges n her.

Lösung E3:
a)

$$\begin{aligned} S(2) &= \frac{H(1)}{H(2)-1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \\ S(3) &= \frac{H(1)+H(2)}{H(3)-1} = \frac{1+1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{2} = 3\ . \end{aligned}$$

b) Wir untersuchen den Zähler von $S(n) = Z(n)/(H(n)-1)$:

$$\begin{aligned} Z(n) &= H(1) + H(2) + \cdots + H(n-1) \\ &= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

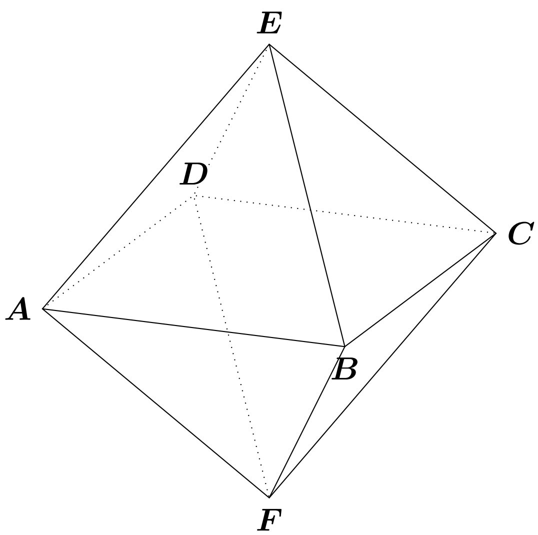
Umsortieren und Zusammenfassen der Brüche mit gleichem Nenner liefert:

$$\begin{aligned} Z(n) &= (n-1)\frac{1}{1} + (n-2)\frac{1}{2} + (n-3)\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \\ &= n - 1 + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 + \cdots + \frac{n}{n-1} - 1 \\ &= n - 1 + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{3} - 1 + \cdots + \frac{n}{n-1} - 1 + \frac{n}{n} - 1 \\ &= nH(n) - n = n(H(n)-1) \\ &\Rightarrow S(n) = n \quad . \end{aligned}$$

Alternativer Beweis durch Induktion:
Vermutung: $\boldsymbol{S(n)=n}$
Beweis: Vermutung richtig für $\boldsymbol{n=2,3}$ siehe a)

$$
\begin{aligned}
\text{Annahme } \boldsymbol{S(n)} &\boldsymbol{= n}\\
\Rightarrow \boldsymbol{S(n+1)} &= \frac{\boldsymbol{H(1)+H(2)+\cdots+H(n)}}{\boldsymbol{H(n+1)-1}}\\
&= \frac{\boldsymbol{H(1)+H(2)+\cdots+H(n-1)+H(n)}}{\boldsymbol{H(n+1)-1}}\\
&= \frac{\boldsymbol{S(n)(H(n)-1)+H(n)}}{\boldsymbol{H(n+1)-1}}\\
&= \frac{\boldsymbol{n(H(n)-1)+H(n)}}{\boldsymbol{H(n)+\frac{1}{n+1}-1}} = \frac{\boldsymbol{n(H(n)-1)+H(n)}}{\boldsymbol{H(n)-\frac{n}{n+1}}}\\
&= \boldsymbol{(n+1)}\frac{\boldsymbol{n(H(n)-1)+H(n)}}{\boldsymbol{(n+1)H(n)-n}} = \boldsymbol{n+1}\ .
\end{aligned}
$$

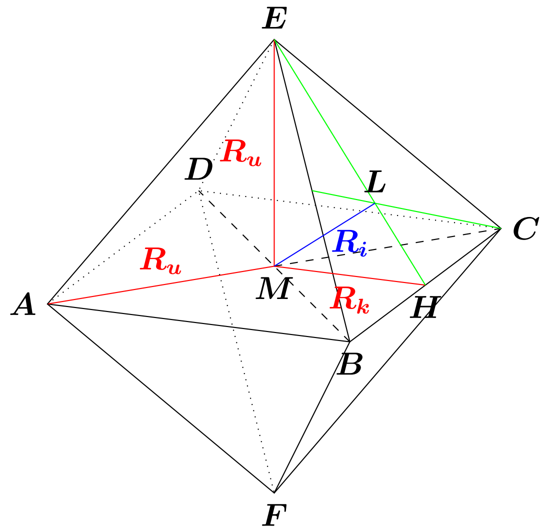
Aufgabe E4:
Oktaeder werden von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Sie haben 6 Ecken und 12 Kanten.



Aufgrund der Symmetrie liegen die Ecken eines Oktaeders stets auf einer Kugel (Umkugel) mit Radius $\boldsymbol{R_u}$. Ebenso gibt es eine Kugel (Inkugel) mit Radius $\boldsymbol{R_i}$, welche alle Flächen des Oktaeders von innen berührt und schließlich liegen auch die Mittelpunkte aller Kanten auf einer Kugel mit Radius $\boldsymbol{R_k}$.

Berechnen Sie $\boldsymbol{R_u}$, $\boldsymbol{R_k}$ und $\boldsymbol{R_i}$ für ein Einheitsoktaeder mit Kantenlänge 1.

Lösung E4:



Aufgrund der Symmetrie bilden je 4 Eckpunkte des Oktaeders, die in einer Ebene liegen, ein Quadrat. Also das Viereck $\boldsymbol{ABCD}$, das Viereck $\boldsymbol{AFCE}$ und das Viereck $\boldsymbol{BEDF}$. Sie schneiden sich im Mittelpunkt $\boldsymbol{M}$ des Oktaeders.

Alle Eckpunkte des Oktaeders haben vom Mittelpunkt $\boldsymbol{M}$ den Abstand $\boldsymbol{R_u}$.
Aufgrund der Symmetrie ist der Mittelpunkt des Oktaeders auch der Mittelpunkt der 3 Quadrate.
$\boldsymbol{R_u}$ ist daher die halbe Diagonale eines solchen Quadrates mit Seitenlänge 1.

$$\boldsymbol{R_u = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}}\ .$$

$\boldsymbol{R_k}$ ist das Lot von $\boldsymbol{M}$ auf eine der der Quadratseiten und damit die halbe Kantenlänge des Oktaeders. also

$$\boldsymbol{R_k = \frac{1}{2}}\ .$$

Der Inkreisradius ist die Länge des Lotes $\boldsymbol{l}$ vom Oktaedermittelpunkt $\boldsymbol{M}$ auf eine der 6 Dreiecksflächen, zum Beispiel Dreieck $\boldsymbol{BCE}$.
Aufgrund der Symmetrie ist der Lotfußpunkt $\boldsymbol{L}$ der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und der Höhen dieses Dreiecks, die bei gleichseitigen Dreiecken zusammenfallen.

Für die Länge $\boldsymbol{h}$ der Höhe $\boldsymbol{EH}$ im Dreieck $\boldsymbol{BCE}$ gilt

$$\boldsymbol{h^2 + \frac{1}{2^2} = 1^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}}\ .$$

(**Alternativ:** $\boldsymbol{h^2 = R_u^2 + R_k^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.)

Da die Höhen auch gleichzeitig die Seitenhalbierenden sind, schneiden sie sich im Verhältnis 1:2.
Damit ergibt sich die Länge $\boldsymbol{LH}$ zu $\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
Das Dreieck $\boldsymbol{MLH}$ ist rechtwinklig mit

$$\boldsymbol{R_k^2 = R_i^2 + \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} \Rightarrow R_i = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}}} \; .$$

Aufgabe H1:
Finden Sie eine 4-stellige Zahl ABCD, bei der die Multiplikation mit 4 die Reihenfolge der vier Ziffern umkehrt und daraus DCBA macht.

Lösung H1:
Die Lösung lautet

$$\boxed{\text{ABCD=2178}}\,.$$

Es soll gelten

$$\boldsymbol{4 \cdot ABCD = DCBA}$$

Wenn beide Zahlen vierstellig sind, darf $\boldsymbol{A}$ nur 1 oder 2 sein, sonst wäre $\boldsymbol{4 \cdot ABCD > 9999}$. $\boldsymbol{DCBA}$ muss durch 4 teilbar sein. Daher ist $\boldsymbol{A}$ gerade, also $\boldsymbol{A = 2}$.
Damit ist $\boldsymbol{DCBA} = 4 \cdot \boldsymbol{ABCD > 8000}$ also $\boldsymbol{D = 8}$ oder $\boldsymbol{D = 9}$.
$\boldsymbol{4 \cdot 8 = 32}$ und $\boldsymbol{4 \cdot 9 = 36}$. Nur im Fall $\boldsymbol{D = 8}$ erhält man bei Multiplikation mit 4 aus $\boldsymbol{ABCD}$ an der Einerstelle eine 2.
Es gilt also

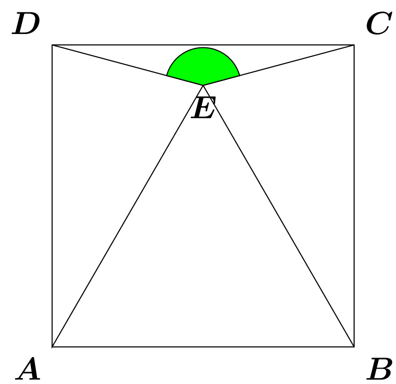
$$\boldsymbol{4 \cdot 2BC8 = 8CB2}$$

oder

$$\boldsymbol{\begin{aligned}
4 \cdot [2000 + 100 \cdot B + 10 \cdot C + 8] &= 8000 + 100 \cdot C + 10 \cdot B + 2 \\
8000 + 400 \cdot B + 40 \cdot C + 32 &= 8000 + 100 \cdot C + 10 \cdot B + 2 \\
390 \cdot B - 60 \cdot C + 30 &= 0 \\
13 \cdot B - 2 \cdot C + 1 &= 0 \\
2 \cdot C &= 13 \cdot B + 1 \\
C &= \frac{13 \cdot B + 1}{2} \overset{!}{<} 10 \\
&\Rightarrow B < 2 \\
C \text{ ganzzahlig } &\Rightarrow 13 \cdot B + 1 \text{ gerade} \\
&\Rightarrow B = 1 \\
&\Rightarrow C = 7
\end{aligned}}$$

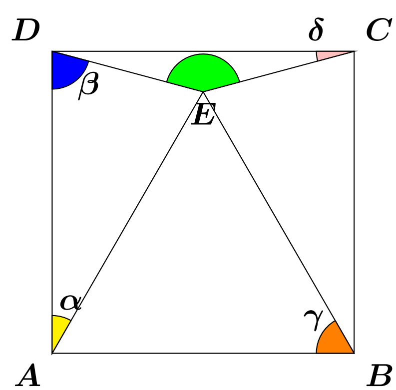
Tag der Mathematik 2024

Aufgabe H2:
Im Quadrat $\boldsymbol{ABCD}$ liegt das gleichseitige Dreieck $\boldsymbol{ABE}$ wie in der Abbildung.



Wie groß ist der Winkel $\angle \boldsymbol{CED}$?

Lösung H2:



Dreieck $\boldsymbol{ABE}$ ist gleichseitig, daher sind alle Dreieckswinkel gleich $\boldsymbol{\gamma = 60^\circ}$.
Die Dreiecke $\boldsymbol{AED}$ und $\boldsymbol{CBE}$ sind gleichschenklig und kongruent.
In der Spitze liegt der Winkel $\boldsymbol{\alpha = 90^\circ - \gamma = 30^\circ}$.
Damit bleiben für die gleichen Winkel der Basis nur

$$\boldsymbol{\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 75^\circ}$$

Der kleine Winkel $\boldsymbol{\delta = \angle DCE}$ ergibt sich dann zu $\boldsymbol{\delta = 90^\circ - \beta = 15^\circ}$
und der grüne Winkel beträgt

$$\boxed{\boldsymbol{\angle CED = 180^\circ - 2 \cdot \delta = 150^\circ}}\ .$$

Aufgabe H3:
In einem konvexen $\boldsymbol{n}$-Eck sei die Summe von $\boldsymbol{n-1}$ Innenwinkeln $\mathbf{2024°}$.
Geben Sie $\boldsymbol{n}$ und die Größe des verbleibenden Winkels an.

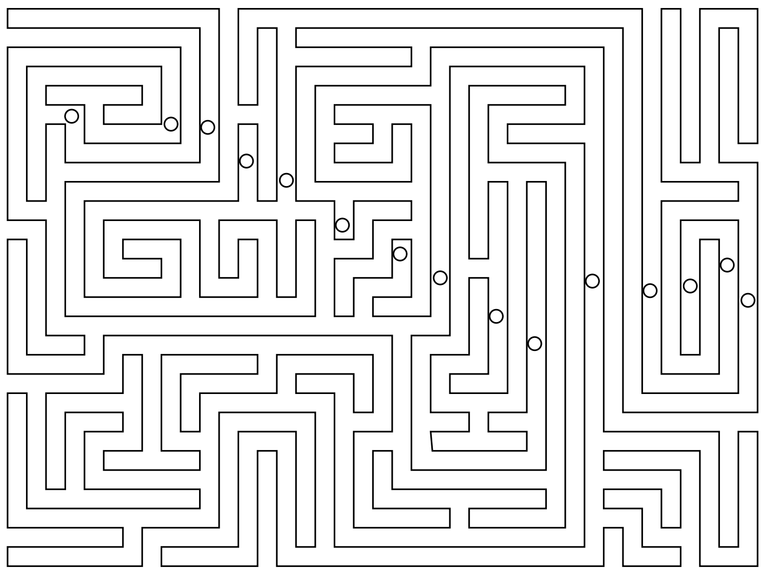
Lösung H3:
Die Winkelsumme im Dreieck beträgt $\mathbf{180°}$. Mit jedem zusätzlichen Eckpunkt wächst die Winkelsumme um $\mathbf{180°}$. Die Winkelsumme im $\boldsymbol{n}$-Eck beträgt also $\boldsymbol{(n-2)\cdot 180°}$.
In einem konvexen $\boldsymbol{n}$-Eck liegen alle Innenwinkel zwischen $\mathbf{0°}$ und $\mathbf{180°}$.

$$\Rightarrow (n-2)\cdot 180° - 180° < 2024° < (n-2)\cdot 180°$$

$$2024/180 = 11 \text{ Rest } 44$$

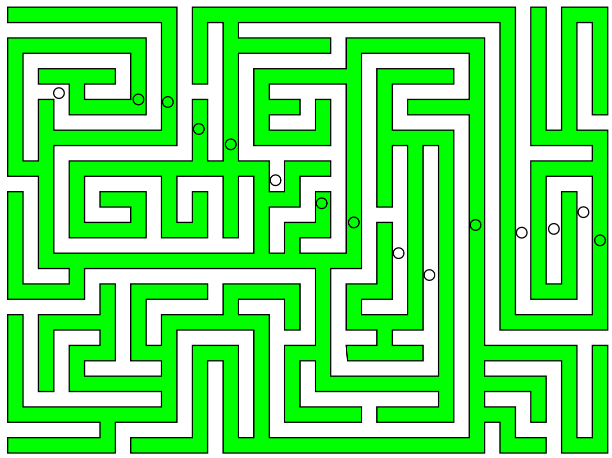
Also ist $\boldsymbol{n-2=12}$ oder somit $\boxed{n=14}$.
Der verbleibende Winkel ist $\boxed{180°-44°=136°}$.

Aufgabe H4:
Ludwig hat auf der Weide einen langen Drahtzaun sehr verwinkelt aufgestellt und das Ende mit dem Anfang verbunden. Nun sind einige Lämmer (kleine Kreise) gar nicht eingesperrt und könnten weglaufen.

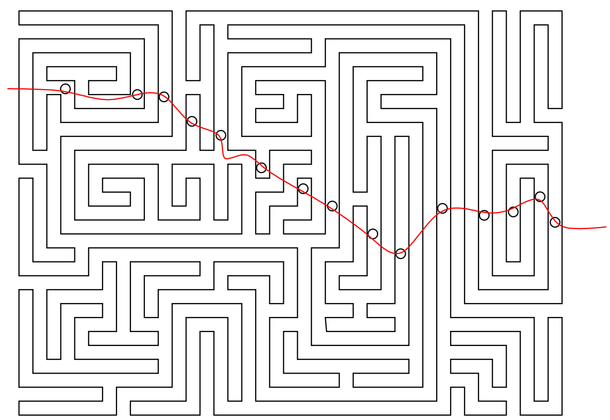


Wie viele Lämmer hat Ludwig mit dem Zaun eingesperrt?

(Weidezaun)
Im Zaun (auf der grünen Fläche) eingesperrt sind genau $\boxed{\text{8 Lämmer}}$.
(7 Lämmer sind frei und befinden sich lediglich in einem Irrgarten.)



Die Lösung durch Einzeichnen der umzäunten Fläche (grün) ist aber sehr aufwändig. Schneller geht es, wenn man sich klar macht, dass der Zaun die gesamte Fläche in einen abgeschlossenen inneren Bereich(grün) und einen von außen zugänglichen Bereich (weiß) aufteilt und dass man jedesmal, wenn man über den Zaun steigt, den Bereich wechselt.
Schafe, die man von außen durch eine Kurve erreicht, die den Zaun ungeradzahlig oft kreuzt, sind eingesperrt, die anderen frei.



Auf diese Weise kann man für jedes Schaf entscheiden, ob es eingesperrt ist oder frei.
Noch effizienter zieht man eine Linie von außen durch mehrere Schafe und wechselt bei jeder Zaunkreuzung zwischen *frei* und *eingesperrt* hin und her. So findet man für die rote Linie von links beginnend

2 frei **1** eingesperrt **2** eingesperrt **2** eingesperrt **2** eingesperrt **1** frei **3** eingesperrt
2 eingesperrt **3** frei **2** frei **3** eingesperrt **3** frei **2** frei **2** frei **1** eingesperrt **1**

Insgesamt sind also 7 Schafe frei und 8 eingesperrt
(**Bemerkung:** Um einen geschlossenen Polygonzug mit grüner Farbe zu füllen, verwendet der Computer eine ähnliche Strategie. Für jede Pixelzeile entscheidet er, wo Schnittpunkte mit den Polygonkanten liegen und wechselt dort die Färbung.)

Aufgabe H5:
Der schachbegeisterte Vater verspricht seiner Tochter mehr Taschengeld, wenn sie von drei Schachpartien, die sie abwechselnd gegen ihren Vater und gegen ihre Mutter spielt, zwei Partien in Folge gewinnt. Die Mutter spielt dabei deutlich besser als der Vater.

Die Tochter darf wählen, gegen wen sie zuerst spielen will. Sollte sie zuerst gegen ihren Vater oder zuerst gegen ihre Mutter spielen, oder ist das egal?

Lösung H5:
Wir spielen in Gedanken alle Partien zu Ende, auch wenn die Taschengeldfrage vorher entschieden ist, und notieren Sieg (S) und Verlust (V).
Das Taschengeld wird erhöht bei den Serien SSV, SSS und VSS.
Ist $\boldsymbol{p}$ die Siegchance der Tochter gegen die Mutter und $\boldsymbol{q > p}$ die Siegchance der Tochter gegen den Vater, so ist die Chance der Tochter auf mehr Taschengeld, wenn sie zuerst gegen die Mutter spielt, die Summe der Wahrscheinlichkeiten der 3 Serien SSV, SSS und VSS, also

$$\boldsymbol{pq(1-p) + pqp + (1-p)qp = 2pq - p^2q\ .}$$

Spielt sie dagegen zuerst gegen den Vater, ist die Chance

$$\boldsymbol{qp(1-q) + qpq + (1-q)pq = 2pq - pq^2 < 2pq - p^2q\ .}$$

$\boxed{\text{Die Tochter sollte also zuerst gegen ihre Mutter spielen.}}$

Intuitiv ist das klar, da sie auf jeden Fall einmal gegen ihre Mutter und einmal gegen ihren Vater gewinnen muss und im ersten Fall 2 mal die Chance hat gegen die stärkere Mutter doch zu gewinnen.

Aufgabe H6:
Um Störungen im Unterricht zu verringern, will eine Lehrerin ihre 12 Schülerinnen und Schüler des Leistungskurses umsetzen. Wie viele Möglichkeiten hat man 12 Personen paarweise zusammenzusetzen?

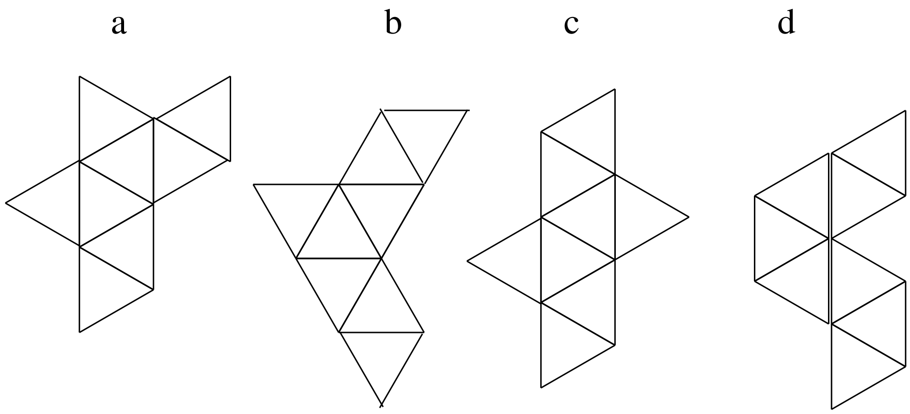
(Entscheidend ist dabei nur, welche Paare gebildet werden.)

Lösung H6:
Nummeriere alle Personen von 1 bis 12.
Am Anfang ist noch keine Person verteilt.
Wähle die noch nicht verteilte Person mit der kleinsten Nummer (Person 1).
Wähle zufällig eine zweite Person als PartnerIn (11 Möglichkeiten).
Wähle von den übrigen Personen die mit der kleinsten Nummer.
Wähle zufällig aus den noch nicht gewählten Personen eine weitere als PartnerIn
(9 Möglichkeiten).
usw. Insgesamt gibt es also

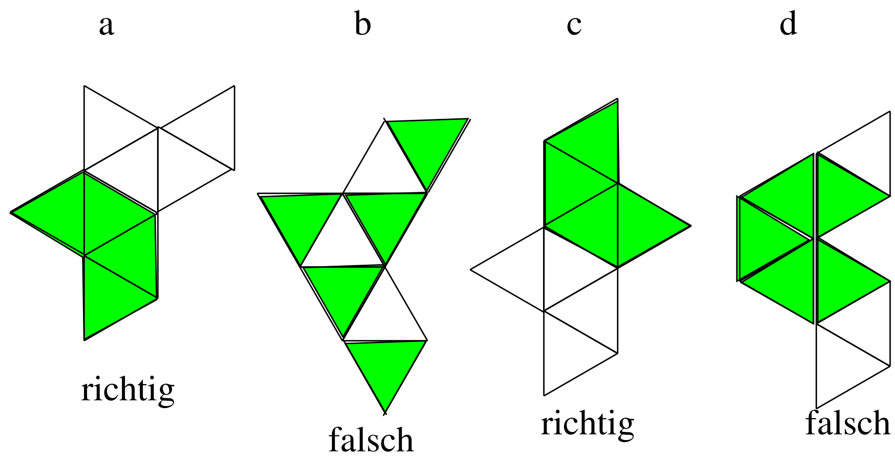
$$\boxed{\mathbf{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10395}}$$

Möglichkeiten.

Aufgabe H7:
Die Oberfläche eines Oktaeders besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken.
Welche der abgebildeten Dreiecksnetze a,b,c,d lassen sich entlang der Dreiecksseiten zu einem Oktaeder falten?



Lösung H7:
Zu einem Oktaedernetz lassen sich nur die Netze a und c falten.



Ein Punkt pro richtiger Entscheidung.

Begründung:
Im Oktaeder gehen von jedem Eckpunkt 4 Kanten aus. Jeder Eckpunkt ist also gleichzeitig Eckpunkt von 4 Dreiecken. In einem Oktaedernetz darf es daher keinen Punkt geben, der Eckpunkt von mehr als 4 Dreiecken ist. Im vierten Netz haben alle fünf grünen Dreiecke einen gemeinsamen Eckpunkt. Dies ist also kein Oktaedernetz.
4 benachbarte Dreiecke, die an einem Punkt $\boldsymbol{P}$ zusammenhängen und eine Sichel bilden, lassen sich zu einer Pyramide ohne Boden falten. Sie müssen auch zu einer Pyramide gefaltet werden, weil sonst an dem Punkt $\boldsymbol{P}$ 5 Kanten zusammenlaufen. Hängen 2 solcher Sicheln mit einer Außenkante aneinander, kann man die beiden Pyramiden anschließend zu einem Oktaeder zusammenklappen. Das erste und dritte Netz ist also ein Oktaedernetz.
Man kann ein Oktaeder mit 2 Farben so färben, dass benachbarte Dreiecke des Oktaeders immer verschieden gefärbt sind. Dies ändert sich auch nicht, wenn man sie aufschneidet und flachlegt. Im aufgeschnittenen Oktaedernetz haben dann Dreiecke, die noch zusammenhängen, eine unterschiedliche Farbe. Ein funktionierendes Oktaedernetz muss dann jeweils 2 Sätze von 4 gleich gefärbten Dreiecken enthalten, wenn man benachbarte Dreiecke verschieden färbt. Das zweite Gitternetz ist also kein Oktaedernetz.

Tag der Mathematik 2024

Aufgabe H8:
Von einem dreistelligen Zahlenschloss mit der Zahlenkombination $\boldsymbol{ABC}$ sei bekannt:
$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BC}$ und $\boldsymbol{ABC}$ sind jeweils Primzahlen.

Wie lautet die Zahl $\boldsymbol{ABC}$?

Lösung H8:
$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sind Primzahlen. $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A, B, C \in \{2, 3, 5, 7\}}$.

$\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BC}$ sind Primzahlen. $\Rightarrow$ $\boldsymbol{B, C \notin \{2, 5\}}$, sonst teilbar durch 2 beziehungsweise 5.

$\boldsymbol{BC}$ Primzahl $\Rightarrow$ $\boldsymbol{B \neq C}$, sonst teilbar durch 11.

Zusammen: $\boldsymbol{BC = 37}$ oder $\boldsymbol{BC = 73}$ jeweils mit Quersumme 10.

$\boldsymbol{ABC}$ ist Primzahl. $\Rightarrow$ Die Quersumme ist kein Vielfaches von 3.
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A \neq 2}$ und $\boldsymbol{A \neq 5}$. Also ist auch $\boldsymbol{A = 3}$ oder $\boldsymbol{A = 7}$.

$\boldsymbol{AB}$ Primzahl, $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A \neq B}$, sonst teilbar durch 11. Also ist $\boldsymbol{ABC = 373}$ oder $\boldsymbol{ABC = 737}$.
$\boldsymbol{737 = 11 \cdot 67}$ scheidet aus. Also bleibt nur

$$\boxed{\boldsymbol{ABC = 373}}\ .$$

Alternativlösung:
$\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BC}$ sind Primzahlen.
Rechts von 2 kann nur eine 3 stehen, da 22, 25 und 27 keine Primzahlen sind.
Rechts von 3 kann nur eine 7 stehen, da 32, 35 und 33 keine Primzahlen sind.
Rechts von 5 kann nur eine 3 stehen, da 52, 55 und 57 keine Primzahlen sind.
Rechts von 7 kann nur eine 3 stehen, da 72, 75 und 77 keine Primzahlen sind.

Daher kommen nur 237, 373, 537 und 737 in Frage.
Da 237 und 537 durch 3 und 737 durch 11 teilbar sind, ist die Lösung 373.