UNTERSUCHUNGEN ZUR REGELLOGISCHEN DEUTUNG VON AUSSAGENVERKNÜPFUNGEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-
Universität zu Bonn

vorgelegt von

Peter Joseph Schroeder-Heister

aus Düren

Bonn 1981

Angefertigt mit Genehmigung der Philosophischen Fakultät der Universität Bonn.

1. Gutachter: Prof. Dr. Gisbert Hasenjaeger

2. Gutachter: Prof. Dr. Dag Prawitz

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Mai 1981

Vorbemerkung

Ich danke allen, die meine Arbeit als Gutachter betreut, sie durch anregende Diskussionen bzw. Stellungnahmen oder in anderer Weise gefördert haben, besonders Privatdozent G. Gabriel, Professor G. Hasenjaeger, B. Peppinghaus, Professor D. Prawitz, Professor A. Prestel und Professor Chr. Thiel.

Widmen möchte ich sie meinen Eltern.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine der Thesen der modernen Sprachphilosophie, die dort vor allem durch die Arbeiten des späten WITTGENSTEIN Verbreitung gefunden hat, lautet: Die Bedeutung sprachlicher Zeichen ist durch deren Gebrauch bestimmt. Danach muß man, will man gewissen Zeichen eine Bedeutung verschaffen, Regeln zu deren Gebrauch angeben.

Die Zeichen, um deren Bedeutung es in dieser Arbeit geht, sind die aussagenlogischen Verknüpfungszeichen, wie z.B. "und" ("$\wedge$"), "oder" ("$\vee$"), "wenn...dann" ("$\rightarrow$") oder "nicht" ("$\neg$"). Statt von "Verknüpfungen" sprechen wir auch von "Operatoren", in manchen Spezialfällen, wozu $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ gehören, auch von "Junktoren".[1] Wir wollen untersuchen, wie sich bestimmte Regeln als Bedeutungsregeln für Aussagenverknüpfungen auszeichnen lassen. In diesem Sinne sprechen wir von der "regellogischen Deutung" von Aussagenverknüpfungen.

Um uns von vornherein nicht mit den Unklarheiten zu belasten, die dem Begriff der "Regel" anhängen, schränken wir uns auf Deduktionszusammenhänge formaler Systeme ein, verstehen unter Regeln also immer Ableitungsregeln eines Kalküls. Das ist sicherlich - vor allem in Hinsicht auf die natürliche Sprache - ein sehr stark idealisierendes Vorgehen. Doch man kann hoffen, daß sich aus der Lösung von Problemen für idealisierte Argumentationen, wie sie Deduktionen in formalen Sprachen darstellen, Hinweise zur Lösung analoger Probleme in natürlichen Sprachen finden lassen.

Wenn wir die Bedeutung logischer Zeichen durch Regeln festlegen wollen, gehen wir von einem Primat der Regellogik

================

1) Die Unterscheidung zwischen Operatoren und Junktoren wird exakt in § 5 (S. 76) definiert.

gegenüber der Satzlogik aus.[1] Regeln sind Handlungsanweisungen, deren Sinn man verstehen kann, ohne schon logische Zeichen zu verstehen. Gerade deshalb sind sie geeignet, in zirkelfreier Weise logischen Zeichen eine Bedeutung zu geben. Man kann natürlich auch umgekehrt Regeln aus der Bedeutung logischer Zeichen gewinnen. Doch dann stellt sich das Problem, auf welch andere Weise diese Bedeutung bestimmt ist. Nach Aufbau der Logik kann man mit Recht sagen: "Die Terme 'Satzlogik' und 'Regellogik' zeigen also eigentlich nur zwei verschiedene Aspekte der Logik an. Sätze sind gewissermaßen 'eingefrorene' Regeln und Regeln sind 'aufgetaute' Sätze."[2] Für die philosophische Grundlegung der Logik scheinen uns beide Aspekte jedoch nicht gleichwertig zu sein.

Eine ausgezeichnete Rolle spielt in unseren Untersuchungen der GENTZENsche Kalkül des natürlichen Schließens, womit hier sein junktorenlogischer Teil gemeint sein soll. Die These, daß man die Einführungs- und Beseitigungsregeln dieses Kalküls nicht nur als Beschreibungen des "wirklichen" Schließens[3] auffassen kann, sondern daß sie auch Beiträge zur semantischen Normierung logischer Partikeln liefern, ist nicht neu. Pointiert vertreten wird sie z.B. von D. PRAWITZ in zahlreichen Publikationen; ebenso hat sich F. VON KUTSCHERA in mehreren leider unbeachtet gebliebenen Arbeiten für eine "Gentzensemantik" stark gemacht (siehe Literaturverzeichnis). Auch wir versuchen zu zeigen, daß Einführungs- und Beseitigungsregeln einer bestimmten Form gemeinsam die Bedeutung einer Aussagenverknüpfung festlegen. Unser Versuch unterscheidet sich in der Gewichtung der Einführungs- und Beseitigungsregeln nicht unerheblich von dem bisher am differenziertesten ausgearbeiteten Ansatz, demjenigen von D. PRAWITZ,

============

1) Zur Unterscheidung von Satz- und Regellogik vgl. HERMES/SCHOLZ 1952, S. 1,6-1,13; SCHOLZ/HASENJAEGER 1961, S. 12-25; HASENJAEGER 1962, S. 74-78.

2) HASENJAEGER 1962, S. 78.

3) Vgl. GENTZEN 1935, S. 176, 183, 186f.

weshalb auf ihn kurz eingegangen werden soll.

PRAWITZ geht von der semantischen These aus, eine Aussage zu verstehen heiße, die Bedingungen zu kennen, unter denen man sie berechtigterweise behaupten kann - eine These, die im angelsächsischen Bereich vor allem von M. DUMMETT vertreten wird. Auf die Mathematik bezogen meint dies: Eine Aussage zu verstehen heißt zu wissen, wann ein Beweis für diese Aussage vorliegt.[1] Zur Bedeutungsfestlegung logischer Verknüpfungen kommt es also darauf an, Beweisregeln zu formulieren für Aussagen, in denen diese Verknüpfungen vorkommen. Das können nur solche Regeln sein, deren Konklusion die betreffende Verknüpfung als Hauptzeichen enthält, also Einführungsregeln im GENTZENschen Sinne.

Das könnte nun eine induktive Definition von "Beweis" motivieren, wonach z.B. ein Beweis von $A \wedge B$ eine Zeichengestalt

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{A \wedge B} \quad ,$$

mit Π_1 und Π_2 als Beweisen von A bzw. B, ist, und ein Beweis von $A \vee B$ eine Zeichengestalt

$$\frac{\Pi}{A \vee B} \quad ,$$

mit Π als Beweis von A oder als Beweis von B. Doch bei der Definition eines Beweises von $A \rightarrow B$ geriete man in Schwierigkeiten, wollte man ihn entsprechend der $\rightarrow$-Einführungsregel des Kalküls des natürlichen Schließens definieren als

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \Pi \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B} \quad ,$$

===============

1) Vgl. PRAWITZ 1977, S. 20.

wobei $\begin{array}{c}A\\ \Pi\\ B\end{array}$ ein Beweis von B ist, der A als Annahme benutzt, und wobei der Beweis von $A \to B$ nicht mehr von der Annahme A abhängig ist, also die Annahme A bei dieser Anwendung der $\to$-Einführungsregel gelöscht[1] wird. Wie man sieht, müßte man nämlich dazu auf den Begriff des Beweises aus Annahmen zurückgreifen. In Beweisen aus Annahmen muß man aber vernünftigerweise nicht nur Einführungsregeln, sondern auch Beseitigungsregeln zulassen. Sonst könnte man z.B.

$$\dfrac{\dfrac{[A \land B]}{A}}{(A \land B) \to A}$$

nicht als Beweis für $(A \land B) \to A$ zulassen.

Als Ausweg aus diesem Dilemma bietet sich der Begriff des "Verfahrens" an: Ein Beweis von $A \to B$ liegt dann vor, wenn ein Verfahren angegeben ist, das, angewendet auf einen Beweis von A, einen Beweis von B zum Resultat hat. Das ist der Weg, den z.B. LORENZEN (1955) in seiner operativen Logik geht, wo er Behauptungen von Subjungaten als Zulässigkeitsbehauptungen versteht, die durch Angabe von Eliminationsverfahren bewiesen werden.

Dieses Konzept, das ganz in der Tradition des Intuitionismus steht, würde nun ein Abgehen von der regellogischen Interpretation der aussagenlogischen Verknüpfungen bedeuten, da die Subjunktion nicht durch eine Einführungsregel, sondern durch den Begriff des Umformungsverfahrens erklärt wird, der mit Kalkülregeln nichts mehr zu tun hat. Der Begriff des "Verfahrens" ist nämlich ein indefiniter Begriff, der nicht schematisch ausschöpfbar ist. "Indefinit"

=============

1) Wir sprechen durchgängig nicht vom Einführen und Beseitigen, sondern vom Heranziehen und Löschen von Annahmen, um eine Konfusion mit dem Begriff der Einführung und Beseitigung von Operatoren durch Einführungs- und Beseitigungsregeln zu vermeiden.

bedeutet hier[1] nicht etwa "unbestimmt" oder "vage", sondern kennzeichnet Begriffe, deren Extension nicht von vornherein durch Konstruktion abgegrenzt ist, die vielmehr offen für Erweiterungen ist. Die Extensionen indefiniter Begriffe "überschaut" man also in gewisser Weise nicht, so wie man z.B. die Gesamtheit der reellen Zahlen nicht überschaut, da sich durch Bezugnahme auf jede Konstruktion einer Menge reeller Zahlen neue reelle Zahlen definieren lassen, die nicht zu dieser Menge gehören. Ein definiter Begriff dagegen ist z.B. der der rekursiven Funktion, dessen Extension von vornherein durch gewisse Konstruktionsprinzipien festgelegt ist. Allerdings ist dieser definite Begriff nicht dazu geeignet, den Begriff des Verfahrens zu ersetzen, da die Definition einer allgemein-rekursiven Funktion selbst wieder auf den konstruktiven Sinn logischer Zeichen zurückgreifen muß. (Vgl. PÉTER 1959) Beweise von Subjunktionen sind also nicht mehr im Sinne von Ableitungen eines formalen Systems zu verstehen.[2] Der Begriff des Beweises wird zu einem indefiniten Begriff, weil die Klasse der "Verfahren" nicht definit ist.

PRAWITZ hat nun einen Vorschlag gemacht, der die Aussagenoperatoren im Sinne der GENTZENschen Einführungsregeln interpretiert und dabei auch die Subjunktion einschließt. $A \to B$ wird also "<u>derivativ</u>" gedeutet im Sinne von "aus A ist B ableitbar" und nicht "<u>konstruktiv</u>" im Sinne von "jeder Beweis von A ist in einen Beweis von B umformbar".[3]

============

1) Im Anschluß an den Verwendungsvorschlag für die Termini "definit" und "indefinit" bei LORENZEN (1965), S. 9f.

2) Daran ändert auch nichts die Tatsache, daß LORENZEN (1955) von "Metakalkülen" spricht, in denen Zulässigkeitsbehauptungen erfaßt werden, und damit suggeriert, man könne sie kalkülmäßig erfassen. Letzteres ist nur möglich, wenn man den effektiven Charakter des Kalkülbegriffs überhaupt aufgibt, indem man etwa jede zulässige Regel als Axiom ansetzt und so den Axiombegriff unentscheidbar macht.

3) Die Bezeichnung "derivativ" für die "Erschließungsdeutung" der Subjunktion wird hier im Anschluß an H.A. SCHMIDT (1960) (vgl. dort S. 268ff.) gewählt. Die von PRAWITZ benutzte Bezeichnung "operativ" als Gegenstück zu "konstruktiv" (vgl. PRAWITZ 1971, S. 275f.) ist nicht glücklich, da der Terminus

Der Begriff des "Verfahrens" wird dabei zwar nicht aus der Definition eines Beweises gestrichen, jedoch so auf die Definition aller logischen Konstanten verteilt, daß bei $\rightarrow$ nicht mehr aus dem Schema ausgebrochen wird. Und zwar geht PRAWITZ davon aus, die Bedingung, unter der man eine Aussage A mit Recht behaupten könne, sei, entweder einen Beweis von A zu kennen oder ein Verfahren zu kennen, einen solchen Beweis zu erhalten.[1] Eine Ableitung, aufgrund derer man mit Recht eine Aussage behaupten kann, nennt er "gültig". So definiert PRAWITZ z.B. eine Ableitung

$$\begin{array}{c}\Pi\\ A \wedge B\end{array}$$

von $A \wedge B$ als gültig, wenn sie sich in eine Ableitung

$$\frac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{A \wedge B}$$

mit gültigen Ableitungen Π_1, Π_2 umformen läßt, die im letzten Schritt die $\wedge$-Einführungsregel anwendet; entsprechend eine Ableitung

$$\begin{array}{c}\Pi\\ A \vee B\end{array}$$

als gültig, wenn sie sich in eine Ableitung

$$\frac{\Pi_1}{A \vee B}$$

mit gültiger Ableitung Π_1 umformen läßt, die im letzten Schritt eine $\vee$-Einführungsregel anwendet.

=============

"operativ" durch LORENZENs "Operative Logik" belegt ist, die jedoch gerade die konstruktive Deutung der Subjunktion bevorzugt.

1) Genauer spricht er, wie auch DUMMETT, von "kanonischen Beweisen" im Unterschied zu solchen Beweisen bzw. Ableitungen, die mit Hilfe kanonischer Beweise gerechtfertigt werden. Vgl. PRAWITZ 1977, S. 26f.; DUMMETT 1975, S. 32ff.; DUMMETT 1977, S. 394ff.

Diese Hineinnahme des Begriffs des Verfahrens in den Begriff der Gültigkeit von Ableitungen schon mit Konjungaten oder Adjungaten als Konklusion bewirkt, daß die Gültigkeit der Ableitung eines Subjungats $A \to B$ definiert wird durch die Existenz eines Verfahrens, das eine gültige Ableitung von B aus A erzeugt, $A \to B$ also nicht einfach als Zulässigkeitsbehauptung verstanden wird: Eine Ableitung

$$\begin{array}{c} \Pi \\ A \to B \end{array}$$

heißt gültig, falls sie sich in eine Ableitung

$$\dfrac{\begin{array}{c} [A] \\ \Pi_1 \\ B \end{array}}{A \to B}$$

mit gültiger Ableitung $\begin{array}{c} A \\ \Pi_1 \\ B \end{array}$ umformen läßt, die im letzten die $\to$-Einführungsregel anwendet, wobei eine Ableitung

$\begin{array}{c} A \\ \Pi_1 \\ B \end{array}$ gültig ist, falls für jede gültige Ableitung $\begin{array}{c} \Sigma \\ A \end{array}$ von A die Ableitung $\begin{array}{c} \Sigma \\ A \\ \Pi_1 \\ B \end{array}$ gültig ist.

Diese Definition der Gültigkeit[1)] scheint tatsächlich dem derivativen Sinn von $\to$ zu entsprechen, da eine Ableitung von $A \to B$ genau dann gültig ist, falls sie sich in eine

1) Die PRAWITZsche Theorie wurde hier nur grob skizziert, um den philosophischen Sinn sichtbar zu machen, außerdem auch nur auf die positiven Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\to$ bezogen. Genauer spricht PRAWITZ nicht von "läßt sich umformen", sondern relativiert den Begriff der Gültigkeit von vornherein auf bestimmte Umformungsverfahren, definiert also eine zweistellige Relation. Weiterhin spricht er von "Argumenten" statt "Ableitungen", wenn er von der Einschränkung auf bestimmte formale Systeme frei sein will. Zur exakten Definition vgl. PRAWITZ 1971 (Appendix A), 1973, 1974. Daneben steht noch die Definition einer "strengen" Gültigkeit, die für technische Zwecke (wie Normalisierungssätze) von Bedeutung ist. Vgl. dazu neben den angegebenen Titeln auch TROELSTRA 1973, S. 287f.

gültige Ableitung von B aus A umformen läßt und nicht nur ein Verfahren vorliegt, das einen Beweis von A in einen von B umformt. Allgemeiner gilt sogar, daß eine Ableitung Π einer beliebigen Aussage A genau dann gültig ist, wenn sie sich in eine gültige Ableitung von A umformen läßt. Insbesondere lassen sich auf diese Weise die GENTZENschen Beseitigungsregeln rechtfertigen. Z.B. ist jetzt

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{A}}{(A \wedge B) \to A}$$

eine gültige Ableitung, da $\dfrac{A \wedge B}{A}$ eine gültige Ableitung ist.

Denn für jede gültige Ableitung $\begin{matrix}\Pi \\ A \wedge B\end{matrix}$ von $A \wedge B$ ist

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}$$

gültig. Letzteres ergibt sich daraus, daß sich jede gültige Ableitung $\begin{matrix}\Pi \\ A \wedge B\end{matrix}$ von $A \wedge B$ in eine Ableitung der Gestalt

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

mit gültigen Ableitungen $\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix}$ und $\begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}$ umformen läßt, woraus man mit $\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix}$ eine gültige Ableitung von A erhält, in die sich also die Ableitung $\dfrac{\begin{matrix}\Pi \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}$ umformen läßt.

Nichtsdestoweniger greift diese Definition, auch wenn sie den derivativen Sinn von $\to$ berücksichtigt, weiterhin auf den indefiniten Begriff des "Verfahrens" zurück, dessen sich PRAWITZ auch bewußt ist.[1] Deshalb kann auch nicht gesagt

1) Er sagt sogar (PRAWITZ 1977, S. 27), daß man diesen Begriff als undefinierten Grundbegriff wählen muß. Zum indefiniten Charakter von "Verfahren" vgl. auch ebd. S. 29.

werden, im Rahmen der Semantik, wie sie von PRAWITZ expliziert worden ist, werde die Bedeutung von logischen Partikeln <u>nur</u> durch Regeln festgelegt, jedenfalls so lange nicht, als man den Begriff des "Verfahrens" nicht durch eine feste Klasse von Regeln ersetzen kann.

Das läßt es sinnvoll erscheinen, eine direkte Rechtfertigung von Einführungs- und Beseitigungsregeln zu versuchen, ohne auf den Begriff des "Verfahrens" zurückzugreifen. Damit geben wir den Standpunkt auf, nach dem die Einführungsregeln in irgendeinem Sinne die 'eigentlichen' Bedeutungsregeln sind, aufgrund derer die Beseitigungsregeln mit Hilfe gewisser Verfahren legitimiert werden.[1] Wir wollen zeigen, daß die Beseitigungsregeln genauso direkt für die Bedeutung einer Aussage verantwortlich sind wie die Einführungsregeln.[2]

Um Mißverständnissen vorzubeugen: Wir behaupten nicht, daß die von DUMMETT und PRAWITZ entwickelten semantischen Ansätze unklar sind, und auch nicht, daß der in dieser Art von Semantik benutzte Begriff des "Verfahrens" unklar ist. Es soll vielmehr nur ein alternativer Ansatz vorgeschlagen werden, der ohne den Grundbegriff des "Verfahrens", sondern mit elementareren Mitteln, nämlich dem definiten Begriff der Ableitungsregel auskommt.

============

1) Wir geben jedoch nicht die These auf, wonach die Bedingungen korrekter Behauptung von Aussagen zum Bedeutungsverständnis gehören, sofern man diese These nur als <u>notwendige</u> Bedingung liest. Nur sollen neben Einführungsregeln <u>auch</u> Beseitigungsregeln für das Bedeutungsverständnis wichtig sein.

2) Wir verfolgen also nicht das Programm, das GENTZEN durch folgende Bemerkungen aufgestellt hat: "Die Einführungen stellen sozusagen die 'Definitionen' der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon, was sich etwa so ausdrücken läßt: Bei der Beseitigung eines Zeichens darf die betreffende Formel, um deren äußerstes Zeichen es sich handelt, nur 'als das benutzt werden, was sie auf Grund der Einführung dieses Zeichens bedeutet'. ... Durch Präzisierung dieser Gedanken dürfte es möglich sein, die B-Schlüsse auf Grund gewisser Anforderungen als eindeutige Funktionen der zugehörigen E-Schlüsse nachzuweisen." (GENTZEN 1935, S. 189) Damit konnte GENTZEN natürlich nicht meinen, daß man dereinst Besei-

Ausgangspunkt ist dabei ein Grundkalkül, der Regeln für atomare Aussagen enthält und so Ableitungsbeziehungen für atomare Aussagen festlegt. Aussagenverknüpfungen werden dann behandelt in konservativen Erweiterungen solcher Grundkalküle.

Um zu einem Schema zur Bedeutungsfestlegung von Aussagenoperatoren zu gelangen, fragen wir danach, welchen Zweck man eigentlich mit solchen Operatoren verfolgt. Welchen Sinn hat es, eine Aussage $A \wedge B$ zu bilden gegenüber dem aus zwei Aussagen bestehenden System A, B ? Als Antwort stellen wir einen Vergleich mit Explizitdefinitionen an, in denen man z.B. einen Prädikator durch andere Prädikatoren definiert. Dabei ergibt sich, daß in einer Explizitdefinition einem Zeichen ein "Gehalt" zugesprochen wird, und zwar derselbe Gehalt, den ein System schon definierter Zeichen hat. Bezogen auf Aussagenverknüpfungen, etwa die Konjunktion, heißt das: $A \wedge B$ soll eine Aussage sein, die denselben Gehalt hat wie das System A, B , wobei unter dem Gehalt im Anschluß an einen Vorschlag von CARNAP die Konsequenzenmenge verstanden werden soll: Es soll für beliebige Aussagen C gelten: $A \wedge B \vdash C$ genau dann, wenn $A, B \vdash C$ [1], was offensichtlich genau dann erfüllt ist, wenn die Regeln

Einführungsregel $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$ Beseitigungsregel $\dfrac{\begin{matrix}[A] & [B] \\ & C\end{matrix} \qquad A \wedge B}{C}$

oder gleichwertig

=============

tigungsregeln aus Einführungsregeln ableiten könne, denn dies ist trivialerweise nicht möglich. Die Rede von den Beseitigungsregeln als "Konsequenzen" der Einführungsregeln läßt sich vielmehr nur so verstehen, daß Beseitigungsregeln gewisse Eigenschaften haben, die sie als sinnvolle Ergänzung von Einführungsregeln ausweisen. Als solche Eigenschaft hat PRAWITZ die oben skizzierte Eigenschaft der "Gültigkeit" definiert, weshalb er sich auch mit Recht auf GENTZEN beruft (vgl PRAWITZ 1971, S. 247, 284f.).

1) Dabei unterschlagen wir bei diesen vorläufigen Erläuterungen, daß man eigentlich Folgen Γ von Annahmen hinzunehmen, also $A \wedge B, \Gamma \vdash C$ und $A, B, \Gamma \vdash C$ schreiben müßte.

$$\text{Einführungs-regel}\quad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad \text{Beseitigungs-regeln}\quad \frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

ableitbar sind (wobei die eckigen Klammern wieder die Operation der Annahmenlöschung[1] bei Anwendung der Regel symbolisiert). Deshalb ist es sinnvoll, diese Regeln als Grundregeln zur Bedeutungsfestlegung von $\wedge$ zu wählen. Um auf entsprechende Weise auch die Adjunktion behandeln zu können, führen wir den Begriff des gemeinsamen Gehalts ein: C soll zum gemeinsamen Gehalt von A und B gehören, wenn C aus A und aus B ableitbar ist. $A \vee B$ soll so als eine Aussage charakterisiert werden, die als Gehalt den gemeinsamen Gehalt von A und B besitzt, für die also für alle C gilt: $A \vee B \vdash C$ genau dann, wenn $A \vdash C$ und $B \vdash C$. Das ist offensichtlich genau dann erfüllt, wenn die Regeln

$$\text{Einf.-regeln}\quad \frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B} \qquad \text{Beseit.-regel}\quad \frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad A \vee B}{C}$$

ableitbar sind, weshalb man sie als $\vee$-Grundregeln wählen kann.

Der Begriff des Gehaltes eines Systems von Aussagen oder des gemeinsamen Gehaltes mehrer Aussagen bzw. Systeme von Aussagen reicht jedoch noch nicht aus, neben $\wedge$ und $\vee$ auch die Subjunktion $\rightarrow$ zu interpretieren. Deshalb erweitern wir diesen Begriff zu dem des (gemeinsamen) Gehalts von Regeln und Regelsystemen. So soll $A \rightarrow B$ den Gehalt der Regel $A \Rightarrow B$ ausdrücken.[2] Aus $A \rightarrow B$ soll also genau das ableitbar sein, was auch mit Hilfe der Regel $A \Rightarrow B$ ableitbar ist; $A \rightarrow B$ als Aussage soll deduktiv denselben Beitrag leisten wie $A \Rightarrow B$ als Regel, es soll also für alle C gelten: $A \rightarrow B \vdash C$ genau dann, wenn $A \Rightarrow B \vdash C$, wobei $A \Rightarrow B \vdash C$ bedeutet: C ist unter Verwendung der Regel $A \Rightarrow B$ ableitbar. Das ist genau dann erfüllt, wenn die Regeln

==========

1) Vgl. S. 10 Anm.

2) $\Rightarrow$ ist in dieser Arbeit ein Regelpfeil. $A \Rightarrow B$ ist zu lesen als: "Von A darf übergegangen werden zu B". Ich schließe mich also an die z.B. bei KAMLAH/LORENZEN(1967) verwendete Notation an.

Einf.-regel
$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B}$$

Beseit.-regel
$$\frac{\begin{array}{c}[A \Rightarrow B] \vdots \\ C\end{array} \quad A \rightarrow B}{C}$$

ableitbar sind, wobei $\begin{array}{c}A \Rightarrow B \vdots \\ C\end{array}$ für eine Ableitung steht, in der die Regel $A \Rightarrow B$ benutzt wird. Dazu ist im wesentlichen zu zeigen, daß aus $A \Rightarrow B \vdash A \rightarrow B$ die $\rightarrow$-Einführungsregel folgt. Dies ergibt sich daraus, daß man in jeder Ableitung von $A \rightarrow B$, die die Regel $A \Rightarrow B$ benutzt, jede Anwendung von $A \Rightarrow B$ durch eine (aufgrund der Prämisse der $\rightarrow$-Einführungsregel gegebene) Ableitung von B aus A ersetzen kann. Also können wir diese Regeln als <u>$\rightarrow$-Grundregeln</u> ansetzen.

Die Form, die bei uns die $\rightarrow$-Beseitigungsregel annimmt, zeigt schon, daß es nötig ist, den üblichen Ableitungsbegriff der Kalküle des natürlichen Schließens insofern zu erweitern, als nicht mehr nur Aussagen, sondern auch Regeln als Annahmen zugelassen sind, die man heranziehen und wieder löschen kann. Es läßt sich zwar zeigen, daß unsere $\rightarrow$-Beseitigungsregel gleichwertig ist mit dem Modus Ponens

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad ;$$

eine solche Reduktion auf einfachere Regeln ist jedoch im allgemeinen nicht mehr möglich, wenn wir n-stellige Aussagenverknüpfungen zulassen, die den gemeinsamen Gehalt beliebiger Regelsysteme ausdrücken. So können wir z.B. einen vierstelligen Junktor S angeben, so daß $S(A_1,A_2,A_3,A_4)$ den gemeinsamen Gehalt von $A_1 \Rightarrow A_2$ und $A_3 \Rightarrow A_4$ ausdrückt, also für alle C gilt: $S(A_1,A_2,A_3,A_4) \vdash C$ genau dann, wenn $A_1 \Rightarrow A_2 \vdash C$ und $A_3 \Rightarrow A_4 \vdash C$. Die Grundregeln für einen solchen Operator lauten bei uns:

Einf.-regeln
$$\frac{\begin{array}{c}[A_1]\\ \vdots \\ A_2\end{array}}{S(A_1,A_2,A_3,A_4)} \qquad \frac{\begin{array}{c}[A_3]\\ \vdots \\ A_4\end{array}}{S(A_1,A_2,A_3,A_4)}$$

$$\text{Beseit.-regel}\quad \dfrac{\begin{matrix}[A_1 \Rightarrow A_2] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A_3 \Rightarrow A_4] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad S(A_1,A_2,A_3,A_4)}{C}$$

In diesem Fall läßt sich die S-Beseitigungsregel nicht auf eine einfachere Form bringen.[1]

Das führt uns zu einem Konzept von Regeln beliebiger Stufe. Eine Regel, die keine Löschung von Annahmen erlaubt, ist bei uns von erster Stufe, eine, die die Löschung von Aussagen als Annahmen erlaubt (wie z.B. die $\rightarrow$-Einführungsregel), von zweiter Stufe. Eine Regel, die die Löschung von Regeln erster Stufe als Annahmen erlaubt (wie die oben angegebene S-Beseitigungsregel), ist eine Regel dritter Stufe u.s.w. Da zur Darstellung von Regeln höherer Stufe die zweidimensionale Notation nicht sehr gut geeignet ist, führen wir unter Benutzung des Regelpfeiles $\Rightarrow$ eine lineare Notation ein, in der (so wie bei LORENZEN 1955) Punkte über dem Pfeil die Stufe der Regel markieren. Obige S-Beseitigungsregel nimmt so z.B. die Gestalt

$$A_1 \Rightarrow A_2 \overset{\cdot}{\Rightarrow} C; A_3 \Rightarrow A_4 \overset{\cdot}{\Rightarrow} C; S(A_1,A_2,A_3,A_4) \overset{\cdot\cdot}{\Rightarrow} C$$

an.[2]

===============

1) PRAWITZ (1979) geht einen anderen Weg, indem er statt eines Regelpfeiles $\Rightarrow$ einen Subjunktionspfeil $\rightarrow$ benutzt und die S-Beseitigungsregel in der Form

$$\dfrac{\begin{matrix}[A_1 \rightarrow A_2] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A_3 \rightarrow A_4] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad S(A_1,A_2,A_3,A_4)}{C}$$

notiert. Das setzt aber voraus, daß man den Junktor $\rightarrow$ zur Formulierung von Beseitigungsregeln schon zur Verfügung hat. Zur genaueren Auseinandersetzung mit PRAWITZ' allgemeiner Form von Junktorenregeln siehe unten S. 136-138.

2) Auf die Idee, Regeln höherer Stufe zu betrachten, bin ich gekommen durch Lektüre der Arbeit von VON KUTSCHERA (1968). Auch P. MARTIN-LÖF benutzt in seiner intuitionistischen Mengenlehre Regeln höherer Stufe, so in seiner Π-Beseitigungsregel (allerdings nur in der bisher unpublizierten Version, in der er sie auf der von Prof. H. Schwichtenberg veranstalteten Tagung "Konstruktive Mengenlehre und Typentheorie"(München, 29.9.-3.10.1980) vorgetragen hat). Die

Um unseren Ansatz überhaupt durchführen zu können, müssen wir also zunächst einen allgemeinen Kalkülbegriff entwickeln, der auf dem Konzept solcher beliebigstufiger Regeln aufbaut. Dies ist Aufgabe von Kapitel 1 dieser Arbeit: In § 1 schliessen wir an den abstrakten Kalkülbegriff der operativen Logik LORENZENS an, den wir dann in § 2 im Sinne von Kalkülen des natürlichen Schließens, wie sie von JAŠKOWSKI und GENTZEN entwickelt wurden, erweitern. In Ableitungen solcher Kalküle ist es nicht nur erlaubt, von Aussagen zu Aussagen überzugehen, sondern dabei auch Annahmen heranzuziehen und zu löschen. In § 3 erweitern wir dann diesen JAŠKOWSKI-GENTZENschen Kalkülbegriff derart, daß wir auch Regeln als Annahmen zulassen, die man heranziehen und wieder löschen kann. Der Ableitungsbegriff dieser allgemeinen Kalküle ist nicht weniger effektiv als derjenige von Kalkülen der in § 1 und § 2 behandelten Art. Nach dem oben gesagten ist die Einführung eines solchen Kalkülbegriffs keine technische Spielerei, sondern bietet einen Rahmen, Einführungs- und Beseitigungsregeln als Bedeutungsregeln für beliebige Aussagenoperatoren definieren zu können.[1]
§ 4 stellt neben einigen Konventionen technische Hilfsmittel für spätere Beweise bereit.

$\supset$-Beseitigungsregel, die man aus der allgemeinen Π-Regel gewinnen kann, lautet bei MARTIN-LÖF:

$$\frac{A \supset B \text{ true} \qquad \begin{array}{c}[B \text{ true } (A \text{ true})]\\ \vdots \\ C \text{ true}\end{array}}{C \text{ true}} \quad .$$

Die Annahme "B true (Atrue)" entspricht dabei der Annahmeregel $A \Rightarrow B$ in der oben angegebenen $\rightarrow$-Beseitigungsregel und ist nach MARTIN-LÖF zu lesen als: "B ist wahr unter der Annahme, daß A wahr ist".

1) Eine Erweiterung, die sich möglicherweise für die Zwecke einer Deutung der klassischen Logik als fruchtbar erweisen könnte, nehmen wir allerdings nicht vor. Bei uns kann eine Regel zwar mehrere Prämissen, aber immer nur eine Konklusion besitzen. Es gibt dagegen Ansätze, den Regelbegriff so zu erweitern, daß Ableitungsregeln auch mehrere Konklusionen haben können; diese Auffassung ergibt eine plausible Interpretation des klassischen GENTZENschen Sequenzenkalküls als eines Metakalküls für solche verallgemeinerten Ableitungs-

Kapitel 2 behandelt nur die positive Logik. Dazu gehen wir von einem beliebigen Grundkalkül K der in § 3 definierten Gestalt aus. In § 5 wird zunächst das Vokabular von K um beliebige n-stellige Aussagenoperatoren ($n \geq 1$) - kurz: Operatoren - erweitert. Außerdem werden neben anderen methodischen Anforderungen zwei Kriterien - Nichtkreativität und Eindeutigkeit - motiviert, die wir an Regelsysteme stellen wollen, sollen sie zur Bedeutungsfestlegung von Operatoren dienen. Beides sind für uns notwendige (jedoch nicht hinreichende), aus dem Begriff der Bedeutung folgende Bedingungen. Ein Schema für solche Regelsysteme zur Bedeutungsfestlegung für Operatoren entwickeln wir in § 6 - ausgehend von allgemeinen definitionstheoretischen Erwägungen der Art, wie wir sie oben angedeutet haben. Eine mit einem n-stelligen Operator S beginnende Aussage $S(A_1,\ldots,A_n)$ soll den Zweck haben, den gemeinsamen Gehalt von m Regelsystemen $\Delta_1(A_1,\ldots,A_n),\ldots,\Delta_m(A_1,\ldots,A_n)$ auszudrücken. Dementsprechend erhalten wir als System der S-Grundregeln ein System von S-Einführungsregeln

$$\Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$
$$\vdots$$
$$\Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$

und einer S-Beseitigungsregel

$$\Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p;\ldots;\Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p; S(p_1,\ldots,p_n) \stackrel{\bullet}{\Rightarrow} p \quad ,$$

wobei $p_1,\ldots,p_n,p$ Aussagenvariable sind. Die S-Beseitigungsregel ist verbal etwa so zu verstehen: "Für alle Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$: Hat man für jedes i ($1 \leq i \leq m$) mithilfe des Regelsystems $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ die Aussage A hergeleitet, so darf man von $S(A_1,\ldots,A_n)$ zu A übergehen." Man kann zeigen, daß die bekannten $\wedge$-, $\vee$-, $\rightarrow$-Regeln des natürlichen Schliessens Spezialfälle dieses Schemas bzw. mit Spezialfällen dieses Schemas gleichwertige Regeln sind.

=============

beziehungen. Einen Überblick über die bisherigen Untersuchungen zu einer "multiple-conclusion logic", deren Kalküle G. HASENJAEGER anschaulich "Mobile-Kalküle" genannt hat, geben SHOESMITH/SMILEY (1978). Vgl. auch PRAWITZ (1965), S. 44 (Fußn. 2), sowie VON KUTSCHERA (1968), S. 16, (1969), S. 117 (Fußn.).

§ 7 zeigt dann, daß Operator-Grundregelsysteme die in § 5 geforderten Bedingung von Nichtkreativität und Eindeutigkeit erfüllen. Wesentliches Hilfsmittel dazu ist der Normalisierungssatz. Dieses aus der Theorie der Kalküle des natürlichen Schließens bekannte und dort dem GENTZENschen Hauptsatz entsprechende Theorem übertragen wir auf unseren komplizierten Kalkülbegriff. Wir schließen in diesen Beweisen im wesentlichen an die 1965 von PRAWITZ eingeführten Begriffsbildungen an. § 8 beweist - teilweise zurückgreifend auf die Arbeiten von VON KUTSCHERA (1968) und PRAWITZ (1979) -, daß beliebige Aussagenoperatoren, die durch ein Regelsystem der vorher angegebenen Gestalt gegeben sind, sich explizit mit Hilfe der drei positiven Standardjunktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ definieren lassen. Genauer läßt sich zeigen, daß jeder um Regelsysteme für beliebig viele Operatoren erweiterte Grundkalkül sich in einen Kalkül einbetten läßt, der nur Operatorenregeln für $\wedge, \vee, \rightarrow$ hat. Das ist eine Rechtfertigung dafür, daß man sich in der positiven Logik auf die Behandlung der Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ beschränken kann.

In § 9 schließlich wird noch vom zugrundegelegten materialen Grundkalkül K abstrahiert und ein Kalkül der formalen positiven Junktorenlogik P angegeben, in dem genau die Ableitungsbeziehungen bestehen, die in jedem materialen operatorenlogisch erweiterten Kalkül gelten, wenn man die Ableitungsbeziehungen von P über solchen materialen Kalkülen interpretiert. P ist gleichwertig mit dem positiv-junktorenlogischen Teil des KalkülsNI von GENTZEN 1935. § 10 erweitert den bisherigen Ansatz geringfügig, insofern jetzt auch 0-stellige Operatoren zugelassen werden. Diese Erweiterung nötigt dazu, das System der Standardjunktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$, auf die sich alle anderen Operatoren zurückführen lassen, zu ergänzen um den 0-stelligen Junktor $\curlyvee$. Ein solcher 0-stelliger Operator ist für manche Zwecke, z.B. die Formulierung des CRAIGschen Interpolationssatzes, recht nützlich.

Es ist sicherlich so, daß der vorgetrage semantische Ansatz, der den Begriff des (gemeinsamen) Gehaltes von Regelsystemen in den Mittelpunkt stellt, noch sehr verbesserungsbedürftig ist. Unser allgemeines Schema für Einführungs- und Beseitigungsregeln eines n-stelligen Operators ist jedoch nicht unbedingt davon abhängig. Auch für andere semantische Ansätze dürfte es interessant sein, ein solches Schema zur Verfügung zu haben[1] und zu wissen, daß auch für solche allgemeinen Operatorenregeln der Normalisierungssatz gilt, daß aber andererseits schon die positiven Standardjunktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ausreichen, um das auszudrücken, was man mit beliebigen n-stelligen Operatoren ausdrücken kann.

Kapitel 3 behandelt Probleme, die sich mit der Hinzunahme der Negation $\neg$ ergeben. Bekanntlich macht es schon in der Theorie des natürlichen Schließens Schwierigkeiten, die Negationsregeln in das Schema von Einführungs- und Beseitigungsregeln zu pressen. So kann man eine Regel der Gestalt

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ \neg B\end{matrix}}{\neg A}$$

doch kaum als $\neg$-Einführungsregel bezeichnen, da der Junktor $\neg$ über dem Strich schon vorkommt. Der vielbegangene Ausweg ist der, die Negation mit Hilfe einer 0-stelligen Konstante $\curlywedge$ zu definieren, indem man $\neg A$ als Abkürzung für $A \rightarrow \curlywedge$ auffaßt. Für $\curlywedge$ gibt man dann keine Einführungsregel an und das "ex falso quodlibet"

$$\frac{\curlywedge}{A}$$

===============

1) So kann man unser allgemeines Schema für Beseitigungsregeln auch ganz im Sinne von GENTZENs Programm (s.o. S.15Anm.) als aus dem Schema für Einführungsregeln gewonnen auffassen: Nach der S-Beseitigungsregel soll ja aus $S(A_1,\ldots,A_n)$ alles das ableitbar sein, was aus den Prämissen der entsprechenden Einführung von S, nämlich $\Delta_1(A_1,\ldots,A_n),\ldots,\Delta_m(A_1,\ldots,A_n)$ ableitbar ist. Wenn man will, kann man dies als Anwendung eines allgemeinen "Inversionsprinzips" interpretieren (vgl. LORENZEN 1955, S. 29-31, HERMES 1959, PRAWITZ 1965, S. 32-38).

als Beseitigungsregel. Faßt man das Fehlen einer $\curlywedge$-Einführungsregelauf als " $\curlywedge$ kann unter keinen Bedingungen mit Recht behauptet werden", so kann man zwar die $\curlywedge$-Beseitigungsregel rechtfertigen, da sich mangels einer Ableitung von $\curlywedge$ <u>jede</u> Ableitung von $\curlywedge$ in eine von A umformen läßt, nicht jedoch eine klassische $\curlywedge$-Beseitigungsregel wie

$$\frac{\begin{array}{c}[A \rightarrow \curlywedge]\\ \vdots \\ \curlywedge\end{array}}{A}\quad .$$

Auf diese Weise wird im Rahmen einer Semantik, wie sie DUMMETT oder PRAWITZ entsickelt haben, die intuitionistische Logik gerechtfertigt.[1)]

Dieser Weg ist jedoch für uns nicht gangbar. Wir verlangen immer, daß eine mit einem Verknüpfungszeichen beginnende Aussage den Gehalt eines oder den gemeinsamen Gehalt mehrerer Regelsysteme ausdrückt. Das bedeutet insbesondere, daß es für jeden Operator S mindestens eine S-Einführungsregel gibt. Wir lassen zwar auch den in § 10 behandelten Grenzfall zu, daß ein Junktor $\curlyvee$ den Gehalt des <u>leeren</u> Regelsystems ausdrückt; in diesem Fall hat er

$$\curlyvee$$

als Einführungsregel und die trivialerweise ableitbare Regel

$$\frac{A \quad \curlyvee}{A}$$

als Beseitigungsregel. Ein Operator ganz ohne Einführungsregeln macht für uns keinen Sinn.

=============

1) Vgl. PRAWITZ 1973, S. 243. PRAWITZ faßt allerdings $\curlywedge$ als <u>atomares</u> Zeichen auf (vgl. ebd. 231), weshalb er zur Rechtfertigung des "ex falso quodlibet" noch die Konsistenz des Grundkalküls verlangen muß. Dies ist jedoch nicht nötig; man kann $\curlywedge$ wie andere Operatoren auch als nichtatomares Zeichen auffassen, das erst in der konservativen Erweiterung von Grundkalkülen auftritt.

Deshalb bleibt uns zur Behandlung der Negation nichts anderes übrig, als Grundkalküle zu betrachten, die selbst schon einen Widerlegungsbegriff, notiert mit $\sim$, besitzen, und dann die Negation durch die Regeln

$$\sim p \Rightarrow \neg p$$
$$\neg p \Rightarrow \sim p$$

zu charakterisieren. $\sim$ fassen wir dabei als <u>pragmatisches Grundzeichen</u> auf, nicht schon als Junktor, Das spiegelt sich in der Notation darin nieder, daß Schreibweisen wie $\sim\sim A$ sinnlos sind.[1] Genauer gesagt, gehen wir von einer Unterteilung aller Urteile in Behauptungen und Bestreitungen aus und fassen eine Aussage dann als widerlegt auf, wenn für ihre Bestreitung $\sim A$ eine Ableitung vorliegt. Deshalb bezeichnen wir das Vorhandensein des Bestreitungszeichens und von Regeln dafür auch als Vorliegen eines formalen Widerlegungsbegriffes.

In <u>§ 11</u> definieren wir Kalküle, die einen solchen Widerlegungsbegriff enthalten, indem wir den Begriff der Ableitungsregel erweitern. Dabei stellt sich sofort die Frage, welchen Adäquatheitsbedingungen ein Widerlegungsbegriff unterworfen sein muß, da offensichtlich das bloße Vorkommen eines Zeichens $\sim$ ihn noch nicht als solchen kennzeichnet.[2]

Diese Frage wollen wir in dieser Arbeit unbeantwortet lassen, da sie weitführende philosophische Untersuchungen über das

===========

1) Damit schließen wir an an VON KUTSCHERA 1969. $\sim$ soll also etwa so verstanden sein wie die negative Kopula ε' bei KAMLAH/LORENZEN 1967, wo ja auch streng zwischen der negativen Kopula und der junktorenlogischen Negation unterschieden wird.- Statt $\sim A$ könnte man wie BENDALL 1978 auch schreiben fA, statt A auch wA und das ganze als Bewertung mit den Wahrheitswerten "wahr" und "falsch" verstehen. Dies ist jedoch höchst mißverständlich, da man meist unter "wahr" und "falsch" metasprachliche Prädikatoren versteht und nicht pragmatische Zeichen, die die Einstellung eines Sprechers zu einer Aussage kennzeichnen.-Interessanterweise gibt auch schon LORENZEN (1955) die Widerlegung als pragmatischen Grundbegriff an, ohne ihn jedoch für die operative Begründung der Logik für wichtig zu erachten.

2) Das unterscheidet unseren Ansatz von dem bei VON KUTSCHERA 1969, der zunächst <u>gar keine</u> Adäquatheitsbedingung an den Widerlegungsbegriff stellt.

Wesen des Widerlegungsbegriffes voraussetzt. Damit verzichten wir auch auf Diskussionen über das Verhältnis von Begründungs- und Widerlegungsbegriff, ob z.B. Begründung und Widerlegung unabhängig voneinander sind oder ob etwa Widerlegung als Scheitern von Begründungsversuchen aufgefaßt werden muß etc. Wir wollen nur vier mögliche alternative Adäquatheitsbedingungen behandeln, die sich bei solchen philosophischen Untersuchungen ergeben könnten. Die erste und schwächste Form, die wir betrachten, wird in <u>§ 11-13</u> untersucht. Hier verlangen wir von Kalkülen mit Widerlegungsbegriff nur, daß das Schema der konstruktiven "reductio ad absurdum"

(1)
$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \sim B\end{array}}{\sim A}$$

für alle Aussagen A,B ableitbar ist. Für solche Kalküle mit Widerlegungsbegriff, die wie in Kapitel 2 Einführungs- und Beseitigungsregeln für beliebig viele n-stellige Operatoren enthalten, beweisen wir in <u>§ 12</u> den Normalisierungssatz und weisen die Kriterien von Nichtkreativität und Eindeutigkeit für Operator-Grundregelsysteme nach.

<u>§ 13</u> zeigt dann als Ergänzung des Resultates von § 8, daß sich jeder der nach Hinzunahme des Widerlegungsbegriffs zur Verfügung stehenden Operatoren explizit mit Hilfe der vier Standardjunktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ definieren läßt. Dieses Resultat läßt sich noch verschärfen: Man kann nämlich zeigen, daß in dem Kalkül, der nur noch die Standardjunktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ enthält, der Widerlegungsbegriff $\sim$ mithilfe von $\neg$ ausdrückbar ist, wenn man (1) ersetzt durch

(2)
$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \neg B\end{array}}{\neg A} \quad .$$

Man erhält so als Kalkül der formalen Logik dieser vier Standardjunktoren den 1937 von JOHANSSON aufgestellten Minimalkalkül. Unsere Deutung dieses Kalküls zeigt damit, daß

(2) nicht als $\neg$-Einführungsregel aufzufassen ist, sondern als eine Regel, die die Eigenschaft eines (pragmatischen) Widerlegungsbegriffes beschreibt.

§ 14 behandelt Kalküle mit Widerlegungsbegriff, die einer etwas stärkeren Adäquatheitsbedingung genügen, in denen nämlich neben (1) noch das Schema des "ex contradictione quodlibet"

(3) $$\frac{A \quad \sim A}{B}$$

für alle Aussagen A,B ableitbar ist. Wir beweisen ebenfalls den Normalisierungssatz für solche Systeme und zeigen, daß sich als Kalkül der formalen Logik der Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ die intuitionistische Junktorenlogik ergibt, wenn man neben (1) durch (2) auch (3) ersetzt durch

(4) $$\frac{A \quad \neg A}{B} \quad .$$

§ 15 ist ein Exkurs, der einiges über die ausgezeichnete Rolle des Junktors $\vee$ aussagt. Von $\wedge, \rightarrow, \neg$ kann man nämlich zeigen, daß diese Junktoren jeweils durch ein Regelsystem explizit definierbar sind, d.h. daß sie den Gehalt eines einzigen Regelsystems ausdrücken, man zu ihrer Bedeutungsfestlegung also nicht auf den gemeinsamen Gehalt mehrerer Regelsysteme zurückgreifen muß. Nachdem in § 13 nachgewiesen wurde, daß alle Aussagenoperatoren sich auf $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ zurückführen lassen, wären dann alle Operatoren durch Regelsysteme explizit definierbar, wenn auch $\vee$ explizit definierbar wäre. Wir beweisen jedoch, daß dies nicht der Fall ist: $\vee$ ist ein Junktor, der durch kein Regelsystem explizit definierbar ist. Das ergibt sich zwar schon aus der bekannten Nichtdefinierbarkeit von $\vee$ durch $\wedge, \rightarrow, \neg$ [1], es ist jedoch interessant, den Beweis auch im hier vorgeschlagenen semantischen Rahmen führen zu können.

=============

1) Vgl. McKINSEY 1939, WAJSBERG 1938, vgl. auch PRAWITZ 1965, S. 59-62 und RAUTENBERG 1979, S. 261f.

§ 16 und § 17 behandeln die klassische Logik. § 16 setzt als dritte Form einer an den Widerlegungsbegriff zu stellenden Adäquatheitsbedingung neben (1) noch das Prinzip der klassischen "reductio ad absurdum" voraus, wonach außer (1) noch

$$(5) \qquad \frac{\begin{matrix}[\sim A] \\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\sim A] \\ \vdots \\ \sim B\end{matrix}}{A}$$

für alle Aussagen A,B ableitbar ist. Der Normalisierungssatz läßt sich hier vorläufig nur für solche Systeme beweisen, deren Operatoren explizit definierbar sind durch ein einziges Regelsystem. Dementsprechend lassen sich aber auch alle Operatoren schon durch $\wedge, \rightarrow, \neg$ definieren. Als System der formalen Logik erhält man einen klassischen Aussagenkalkül der Junktoren $\wedge, \rightarrow, \neg$, der neben (2) anstelle von (5) die Regel

$$(6) \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\neg A] \\ \vdots \\ \neg B\end{matrix}}{A}$$

enthält. Man kann diesen Kalkül als angemessenen Formalismus der klassischen Aussagenlogik auffassen, wenn man $A \vee B$ definiert durch $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Die volle klassische Logik, in der auch $\vee$ ein eigenständiger Junktor ist, erhalten wir in § 17, wenn wir als stärkste Adäquatheitsbedingung voraussetzen, daß Grundkalküle formal entscheidbar sind, d.h. daß jede ihrer Aussagen begründbar ($\vdash A$) oder widerlegbar($\vdash \sim A$) ist. In diesem Fall gilt der Normalisierungssatz für beliebige Operatoren; die Gleichwertigkeit von $A \vee B$ mit $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ wird damit zu einem beweisbaren (d.h. nachträglichen) Resultat. Allerdings ist die formale Entscheidbarkeit eine Eigenschaft, die man nicht ohne weiteres erzwingen kann (und die auch in vielen Fällen, wie der GÖDELsche Unvollständigkeitssatz zeigt, prinzipiell nicht erzwingbar ist). Hingegen kann man die Ableitbarkeit einer Ableitungsregel wie z.B. die Ableitbarkeit der klassischen "reductio ad absurdum" einfach dadurch garantieren, daß man sie zur Grundregel erklärt.[1] § 18 skizziert schließlich noch die Möglichkeit, den Widerlegungsbegriff auf den Begriff der Absurdität zurückzuführen.

Ein Anhang beschreibt die Konsequenzen für § 16 und § 17, die sich ergeben würden, wenn sich das Resultat von TENNANT 1980 halten läßt. TENNANT versucht, einen Normalisierungssatz für die klassische Quantorenlogik unter Einbeziehung der $\vee$- und $\exists$-Regeln zu beweisen. Daraus ergäbe sich für uns ein Normalisierungssatz für die volle klassische Operatorenlogik, die nur (5) und noch nicht die formale Entscheidbarkeit von Grundkalkülen voraussetzte. Allerdings ist TENNANTS Beweis in der publizierten Version nicht ganz korrekt, wie Professor Tennant mir auf einen brieflichen Hinweis hin im September 1980 auch bestätigte. Die Chancen stehen jedoch nicht schlecht, in absehbarer Zeit eine hinreichende Verbesserung des Beweises zu finden.[2]

Wenn wir vier mögliche Adäquatheitsbedingungen für den Widerlegungsbegriff behandeln, ohne eine davon als die richtige auszuzeichnen, so behaupten wir damit, daß der regellogische Ansatz selbst noch nicht darüber entscheidet,

============

1) Vorausgesetzt allerdings, man hält den Widerlegungsbegriff für unabhängig vom Begründungsbegriff. Faßt man den Begründungsbegriff als primären Begriff auf, mit dessen Hilfe der Widerlegungsbegriff (z.B. als Scheitern von Begründungsversuchen) charakterisiert wird, so kann man nicht umgekehrt einfach (5) zur Grundregel erklären, wonach eine Aussage begründet ist, wenn ihre Widerlegung scheitert. Prof. F. Kambartel hat mich darauf hingewiesen, daß unter anderem die These vom Primat des Begründungsbegriffes von der klassischen Logik wegführt.

2) Inzwischen liegt ein solcher Beweis auch vor. Vgl. den Zusatz zum Anhang auf S. 247.

ob etwa die intuitionistische Logik der klassischen vorzuziehen ist oder nicht. Mit unserer regellogischen Deutung führen wir die Begründung eines Negats $\neg A$ einfach auf die Widerlegung $\sim A$ einer Aussage A zurück. Was über die Annahme etwa der intuitionistischen oder klassischen Logik entscheidet, sind die Eigenschaften des Widerlegungsbegriffes selbst und nicht die Tatsache, daß man ihn innerhalb gewisser Regeln zur Definition von $\neg$ verwenden kann.

Wenn sie auch keine Auszeichnung des einen vor dem anderen Logiksystem ermöglichen, so bieten unsere regellogischen Untersuchungen doch einen gemeinsamen Hintergrund, auf dem sich klassische und nichtklassische Logik vergleichen lassen. Das ist nicht selbstverständlich. Üblicherweise behandelt man die klassische Aussagenlogik als Theorie der Wahrheitsfunktionen, während man die intuitionistische Aussagenlogik ganz anders deutet. Hier dagegen werden beide Logikkonzeptionen mit Hilfe einer Analyse des Regelbegriffs interpretiert. Sie unterscheiden sich nur in der Art des Widerlegungsbegriffs, der hinter beiden Konzeptionen steht.

Zum Abschluß sei nochmals auf die Ansätze und Resultate hingewiesen, an die diese Arbeit vor allem anschließt bzw. die sie benutzt, auch wenn dies im folgenden nicht immer erwähnt wird. Der allgemeine semantische Rahmen entwickelte sich in Auseinandersetzung mit der operativen Logik von LORENZEN (1955) und dem semantischen Ansatz von PRAWITZ (1971, 1973). Die Idee, Kalküle mit Regeln beliebig hoher Stufe einzuführen, in denen die Heranziehung und Löschung von Regeln erlaubt ist, wurde angeregt durch die Aufsätze VON KUTSCHERAs (1968, 1969). Ebenfalls darauf geht der Versuch zurück, mit Hilfe solcher Regeln beliebige n-stellige Operatoren einzuführen und deren explizite Definierbarkeit durch die Standardjunktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ zu beweisen - gestützt auch auf die Arbeit von PRAWITZ (1979), die sich dasselbe Ziel setzt. Weiterhin wurde die Idee, die Negation auf einen formalen Widerlegungsbegriff zurückzuführen, von VON KUTSCHERA (1969) übernommen. Die in dieser Arbeit angegebenen Beweise von Normalisierungssätzen stützen sich auf das maßgebliche Werk von PRAWITZ (1965), an dessen Terminologie teilweise in allen Einzelheiten angeschlossen wird.

Einige Abkürzungen und Begriffserklärungen

"g.d.w." steht für "genau dann, wenn" .

"QED" markiert das Ende eines Beweises.

"$\equiv$" meint die Identität von Zeichen.

Ausdrücke "$A\equiv B$", wobei "A" und "B" für Vorkommen von Zeichen stehen, werden als Identitätsbehauptungen für die Zeichen, deren Vorkommen A und B sind, verstanden. Vorkommen sind dabei nicht etwa als konkrete Vorkommnisse verstanden, sondern als Zeichen zusammen mit einer Position innerhalb einer Anordnung von Zeichen (z.B. einer Ableitung). Vorkommen sind also selbst Abstrakta.[1)]

Zeichensysteme sind nicht als endliche Folgen im mathematischen Sinn zu verstehen, sondern als Listen von Zeichen, die dabei (möglicherweise durch Kommata getrennt) nebeneinander oder untereinander stehen.[2)] Wir lassen als Grenzfall auch das leere System von Zeichen zu, das wir mit Ø bezeichnen. Daneben benutzen wir Ø als Zeichen für die leere Menge.

Um uns Schwierigkeiten bei der metasprachlichen Rede über Zeichen zu erspraren, verwenden wir die Zeichen, über die wir reden, autonym, d.h. auch als Namen von sich selbst, sowie zusammengesetzte Zeichen auch als Namen der durch Zusammensetzung der Einzelzeichen entstandenen Zeichen.

===========

1) Vgl. KLEINKNECHT/WÜST 1976, S. 44f.

2) Vgl. LORENZEN 1955, § 12, sowie PRAWITZ 1965, S. 22(Fußn.).

Kapitel 1: Ein erweiterter Kalkülbegriff

§ 1. Abstrakte Kalküle

Unser Ausgangspunkt sind Kalküle in einem abstrakten, nicht auf Logikkalküle eingeschränkten Sinne, entsprechend der Auffassung von LORENZEN (1955). Wenn wir in diesem Kapitel von speziellen Logikkalkülen, z.B. Kalkülen des natürlichen Schließens, sprechen, so fassen wir diese nur als abstrakte Kalküle auf, ihre Beziehung zur Logik im engeren Sinne ist hier noch unwesentlich. Gegenüber LORENZEN (1955) werden wir jedoch einige terminologische und auch sachliche Veränderungen vornehmen.[1]

Die Grundzeichen eines Kalküls K seien eine entscheidbare Menge von Atomen und eine entscheidbare Menge von davon verschiedenen Objektvariablen. Ausdrucksformen seien beliebige endliche Aneinanderreihungen von Atomen und Objektvariablen, Ausdrücke seien Ausdrucksformen ohne Objektvariablen.[2] Jeder Objektvariablen sei zugeordnet eine entscheidbare Menge von Ausdrücken als zugehörige Menge von Objekten. Diese Menge sei auch als Variabilitätsbereich der Objektvariablen bezeichnet. Eine Belegung β sei eine Funktion, die jeder Objektvariablen ein Element aus dem zugehörigen Variabilitätsbereich zuordnet. Wenn X eine Ausdrucksform ist, β eine Belegung, dann sei X^{β} das Resultat der Ersetzung jeder Objektvariablen a in X durch $\beta(a)$ an allen Stellen des Vorkommens von a.

=============

1) Von "abstrakten" Kalkülen reden wir im Anschluß an HERMES/SCHOLZ (1952), S. 1,13f.. Auf die Diskussion solcher Kalküle, die schon vor und unabhängig von LORENZEN (1955) eine Tradition hat, gehen wir hier nicht ein. Vgl. dazu z.B. CARNAP (1934), SCHOLZ (1935), SCHRÖTER (1941), KEMENY (1948) (S. 16-19), SCHOLZ/HASENJAEGER (1961) (S. 28), HASENJAEGER (1962) (S. 78ff.), CURRY (1963).

2) Was eine Aneinanderreihung von Zeichen ist, setzen wir als bekannt voraus. Deshalb benötigen wir auch keine"Eigenvariablen" (vgl. LORENZEN 1955, S. 16), um den Begriff der Ausdrucksform und des Ausdrucks selbst wieder kalkülmäßig zu definieren. - Ausdrücke sind bei uns bloße Reihen von Atomen, nicht - wie z.B. bei SCHRÖTER (1941) oder SCHOLZ/HASENJAEGER (1961, S. 26) - schon eine ausgezeichnete Teilklasse derselben.

Eine entscheidbare Teilmenge $\mathcal{F}$ der Menge der Ausdrucksformen sei als Menge der Formeln von K ausgezeichnet, wobei mit jedem X auch das Resultat der Ersetzung eines Vorkommens einer Objektvariable in X durch ein Element des zugehörigen Variabilitätsbereichs zu $\mathcal{F}$ gehöre. Insbesondere gehört mit X auch X^{β} zu $\mathcal{F}$ für jede Belegung β. Unter Aussagen von K seien Formeln ohne Objektvariable verstanden.[1] Fällt der Variabilitätsbereich einer Objektvariablen mit der Menge der Aussagen zusammen, so sprechen wir auch von einer Aussagenvariablen.

Ob eine Objektvariable Aussagenvariable ist, können wir meist nur nachträglich feststellen, indem wir ihren Variabilitätsbereich mit der Menge der Aussagen vergleichen. Wir können nicht ohne weiteres den Variabilitätsbereich einer Objektvariablen als Menge der Aussagen festlegen, da der Begriff der Aussage mit Hilfe des Begriffs der Formel definiert ist; und um prüfen zu können, ob die als Formelmenge ausgezeichnete Menge $\mathcal{F}$ von Ausdrucksformen tatsächlich die oben geforderte Eigenschaft der Abgeschlossenheit gegenüber Ersetzungen von Objektvariablen besitzt, müssen in der Regel die Variabilitätsbereiche der Objektvariablen schon bekannt sein. In dem besonders einfachen Fall jedoch, in dem man als $\mathcal{F}$ die Menge aller Ausdrucksformen wählt,

==========

1) Den bei LORENZEN (1955) in § 1 eingeführten Gebrauch von "Formel" für beliebige, möglicherweise Variablen enthaltende Zeichenreihen und damit von "Aussage" für beliebige Zeichenreihen ohne Variablen übernehmen wir also nicht, sondern sprechen stattdessen von "Ausdrucksform" bzw. "Ausdruck". Denn in der formalen Logik versteht man "Formel" und "Aussage" in einem spezielleren Sinne; da wir Logikkalküle als Spezialfälle eines abstrakten Kalkülbegriffs auffassen und uns dabei nicht allzusehr von der üblichen Terminologie entfernen wollen, müssen wir auf die gewohnte Terminologie eine gewisse Rücksicht nehmen.- Im Gegensatz zu dem bei LORENZEN (1955) in § 6 eingeführten etwas erweiterten Kalkülbegriff ist durch unsere Definitionen sichergestellt, daß der Begriff der Aussage entscheidbar ist. LORENZEN verlangt weder, daß Objekte Ausdrücke (in seiner Terminologie: Aussagen) sind, noch daß Variabilitätsbereiche entscheidbar sind, sondern nur, daß sie durch einen Kalkül aufzählbar sind.

tritt diese Schwierigkeit nicht auf. Denn da Ersetzungen von Objektvariablen durch Ausdrücke jedenfalls immer wieder Ausdrucksformen liefern, weiß man ohne Kenntnis der Variabilitätsbereiche von Objektvariablen, daß $\mathcal{F}$ gegenüber solchen Ersetzungen abgeschlossen ist. Es ist also hier nicht zirkulär, bestimmte Objektvariablen als Aussagenvariablen zu definieren und ihnen damit die Menge der Aussagen (das sind dann alle Ausdrücke) als Variabilitätsbereich zuzuordnen. Von dieser Möglichkeit werden wir oft Gebrauch machen.[1]

Wenn $X_1,\ldots,X_n,X$ Formeln sind, so sei X eine Regel O. Stufe und $X_1,\ldots,X_n \Rightarrow X$ eine Regel 1. Stufe. Die $X_1,\ldots,X_n$ heißen auch Vorderformeln, X auch Hinterformel dieser Regel 1. Stufe. Mit "Regel" meinen wir in diesem §en immer "Regel O. oder 1. Stufe". Eine konkrete Regel sei eine Regel, in deren Formeln keine Objektvariable auftritt. Wenn R eine Regel ist, β eine Belegung, dann sei R^β die konkrete Regel $X_1^\beta,\ldots,X_n^\beta \Rightarrow X^\beta$, falls R die Gestalt $X_1,\ldots,X_n \Rightarrow X$ hat. Falls R Regel O. Stufe, dann ist R zugleich Formel, R^β ist also schon erklärt.[2]

Eine endliche Menge von Regeln von K sei ausgezeichnet als die Menge der Grundregeln von K. Eine Grundregel O. Stufe heißt auch Anfangsregel. Grundregeln bestimmen den Ableitungsbegriff von K. Ableitungen könnte man am einfachsten definieren als ein System von Aussagen $A_1,\ldots,A_k$ derart,

===============

1) Solche Kalküle, deren Ausdrucksformen und Ausdrücke mit den Formeln bzw. Aussagen zusammenfallen und die als Objektvariable nur Aussagenvariable enthalten, sind es, die LORENZEN in seiner "Protologik" (LORENZEN 1955, §1-§5) vornehmlich betrachtet.

2)Da durch den folgenden Ableitungsbegriff Regeln O. Stufe als solche Regeln gedeutet werden, deren Anwendung nicht voraussetzt, daß man schon etwas abgeleitet hat, könnte man sie als Regeln 1. Stufe ohne Vorderformeln auffassen und mit $\Rightarrow X$ notieren. Diese (sich bei LORENZEN 1955 noch nicht findende) Schreibweise übernehme ich aus technischen Gründen nicht. Die Unterscheidung zwischen Regeln O. und 1. Stufe ist im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen zweckmäßig, weil wir dann Regeln (n+1)-ter Stufe als solche Regeln definieren werden, deren "Vorderregeln" Regeln n-ter Stufe sind, so wie jetzt die "Vorderformeln" von Regeln 1. Stufe als Regeln O. Stufe aufgefaßt werden können.

daß jedes Aussagenvorkommen A_i in diesem System entweder durch Anwendung einer Grundregel 0. Stufe entsteht oder aus Aussagenvorkommen $A_{i_1},\dots,A_{i_n}$ mit $1 \leq i_1 < i, \dots, 1 \leq i_n < i$ durch Anwendung einer Grundregel 1. Stufe bei einer Belegung β hervorgeht, d.h. daß entweder $X^\beta \equiv A_i$ gilt für eine Anfangsregel X oder $X_1{}^\beta \equiv A_{i_1},\dots,X_n{}^\beta \equiv A_{i_n}$, $X^\beta \equiv A_i$ für eine Regel 1. Stufe $X_1,\dots,X_n \Rightarrow X$.

Im Hinblick auf die späteren Erweiterungen in § 2 und § 3 ist es allerdings zweckmäßiger, Ableitungen nicht linear, sondern in Baumform zu notieren. In einer solchen Notation markiert man die Anwendung einer Regel 1. Stufe R durch einen Schlußstrich, über dem die Aussagen stehen, auf die man R anwendet (die *Prämissen dieser Anwendung von R*), und unter dem das Ergebnis dieser Anwendung von R (die *Konklusion der Anwendung von R*) steht. Bei der baumförmigen Schreibweise von Ableitungen stehen die Prämissen einer Regelanwendung also immer unmittelbar über der Konklusion. Die jeweils angewendete Schlußregel und die dabei benutzte Belegung vermerkt man am besten neben dem Schlußstrich.
Eine Ableitung von A, die im letzten Schritt eine Regel 1. Stufe R unter Benutzung der Belegung β auf schon abgeleitete Aussagen $A_1,\dots,A_n$ anwendet, notieren wir also so:

$$R\ \beta\ \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ A_1 & \cdots\cdots & A_n\end{matrix}}{A}$$

Dabei identifizieren wir die Belegung β, die ja eigentlich eine Funktion und kein Zeichen ist, mit dem Zeichen: $\langle a_1 \mapsto b_1, \dots, a_\ell \mapsto b_\ell \rangle$, wobei $a_1,\dots,a_\ell$ die in R vorkommenden Objektvariablen und $b_1,\dots,b_\ell$ (respektive) die durch β diesen Objektvariablen zugeordneten Objekte sind. Falls R eine konkrete Regel ist, identifizieren wir β mit $\langle\,\rangle$. Diese Identifikationen sind dadurch berechtigt, daß man zur Anwendung von R bei der Belegung β nur wissen muß, wie β die in R effektiv auftretenden Objektvariablen belegt.

Um auch die Anwendung einer Anfangsregel neben einem Schlußstrich vermerken zu können, markieren wir eine solche Regelanwendung durch einen Schlußstrich, über dem keine Aussagen mehr stehen. Ist R also Regel 0. Stufe, so schreiben wir:

$$R\ \beta\,\dfrac{}{A}$$

<u>Beispiel für eine Ableitung</u>: Sei K_1 der Kalkül mit den Atomen o,+ und Objektvariablen a,b. Formeln und Aussagen von K_1 sollen mit den Ausdrucksformen bzw. Ausdrücken von K_1 zusammenfallen. a,b seien Aussagenvariable. Die Grundregeln von K_1 seien:

(R_1) $\qquad\qquad o$

(R_2) $\qquad\quad a \Rightarrow a+$

(R_3) $\qquad a, b \Rightarrow ab$.

Dann ist die Aussage o++o+o+++ in K_1 ableitbar, wie man aus folgender Ableitung sieht:

$$R_3\langle a\mapsto o{+}{+}o{+},\, b\mapsto o{+}{+}{+}\rangle\,\dfrac{R_3\langle a\mapsto o{+}{+},\, b\mapsto o{+}\rangle\,\dfrac{R_2\langle a\mapsto o{+}\rangle\,\dfrac{R_2\langle a\mapsto o\rangle\,\dfrac{R_1\langle\,\rangle\,\dfrac{}{o}}{o+}}{o{+}{+}} \qquad R_2\langle a\mapsto o\rangle\,\dfrac{R_1\langle\,\rangle\,\dfrac{}{o}}{o+}}{o{+}{+}o{+}} \qquad R_2\langle a\mapsto o{+}{+}\rangle\,\dfrac{R_2\langle a\mapsto o{+}\rangle\,\dfrac{R_2\langle a\mapsto o\rangle\,\dfrac{R_1\langle\,\rangle\,\dfrac{}{o}}{o+}}{o{+}{+}}}{o{+}{+}{+}}}{o{+}{+}o{+}o{+}{+}{+}}$$

Wir **werden allerdings** künftig auf die Angabe der verwendeten Belegungen verzichten, wenn diese sich eindeutig aus dem Zusammenhang ergeben.[1)]

Um nun den Begriff der Ableitung in K exakt definieren zu können, fassen wir die Baum-Notation

=============

1) Obige Ableitung findet sich in linearer Notation bei LORENZEN (1955), S. 17. Sie sieht dort wesentlich einfacher aus. Die Baum-Notation wurde, wie gesagt, auch nur im Hinblick auf die späteren Erweiterungen eingeführt.

$$R \;\; \beta \;\; \frac{\begin{matrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ A_1 & \cdots & A_n \end{matrix}}{A}$$

nur als inoffizielle Schreibweise für (n+3)-gliedrige Systeme $\langle R, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_n, A \rangle$ auf, wobei $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ die Ableitungen der $A_1, \dots, A_n$ repräsentieren sollen und im Falle, wo R Regel 0. Stufe ist, auch wegfallen dürfen. Für Belegungen β gilt dabei wieder die oben S. 36 erwähnte Identifizierung mit einem Zeichen.

<u>Π ist Ableitung von A in K</u> genau dann, wenn A Aussage ist und einer der folgenden beiden Fälle gilt:

1) Π hat die Gestalt $\langle R, \beta, A \rangle$, R ist Anfangsregel von K, β ist Belegung und $R^{\beta} \equiv A$.

2) Π hat die Gestalt $\langle R, \beta, \Pi_1, \dots, \Pi_n, A \rangle$, R ist Grundregel 1. Stufe von K, β ist Belegung, $R^{\beta} \equiv A_1, \dots, A_n \Rightarrow A$ und $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ sind schon Ableitungen von $A_1, \dots, A_n$ (respektive) in K.

Eine Aussage A heißt <u>ableitbar in K</u> ($\vdash_K A$), wenn es eine Ableitung Π für A in K gibt. Eine Aussage A heißt in K <u>aus Aussagen</u> $A_1, \dots, A_n$ <u>ableitbar</u> ($A_1, \dots, A_n \vdash_K A$), falls A in dem Kalkül K' ableitbar ist, der aus K durch Hinzunahme von $A_1, \dots, A_n$ als Anfangsregeln entsteht.

§ 2. Die JAŚKOWSKI-GENTZENsche Erweiterung des Kalkülbegriffs

Die von JAŚKOWSKI (1934) und GENTZEN (1935) entwickelten Kalküle des natürlichen Schließens - womit im folgenden immer deren junktorenlogischer Teil gemeint sein soll - lassen sich nun nicht unter den in § 1 definierten Kalkülbegriff subsumieren. Die Regeln der $\rightarrow$-Einführung und der $\vee$-Beseitigung, wie sie GENTZEN (1935, S. 186) angibt, sind nämlich keine Regeln im oben definierten Sinne. Die $\rightarrow$-Einführungsregel, von GENTZEN notiert als

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}$$

, besagt:

(*) Man darf von B zu A→B übergehen, wenn man B unter eventueller Benutzung der Annahme A abgeleitet hat. A→B ist dann nicht mehr von der Annahme A abhängig.

Dies ist ein neuer Typ von Regel, der nicht nur - wie bisher - den Übergang von Aussagen zu Aussagen regelt, sondern zugleich etwas über die <u>Annahmen</u> aussagt, von denen eine Aussage abhängt. PRAWITZ (1965) unterscheidet solche Regeln als "deduction rules" von Regeln, die wir in § 1 Regeln 0. und 1. Stufe genannt haben und die er im Anschluß an CHURCH "inference rules" nennt.[1] Wir wollen die "deduction rules" <u>Regeln 2. Stufe</u> nennen und damit schon andeuten, daß sie sich durch eine kanonische Erweiterung der Definition von Regeln 0. und 1. Stufe ergeben.

Durch Anwendung von Regeln 2. Stufe geht man nicht mehr nur von ableitbaren Aussagen zu ableitbaren Aussagen über, sondern von Ableitungen aus Annahmen zu Ableitungen aus möglicherweise anderen Annahmen. Wir werden daher, wenn wir im Hinblick auf Kalküle des natürlichen Schließens den in § 1 entwickelten Kalkülbegriff erweitern, nicht mehr

=============

1) PRAWITZ (1965), S. 22f., vgl. CHURCH (1956), S. 49.

einfach induktiv "Π ist Ableitung von A in K" definieren, sondern müssen zunächst "Π ist eine von einer endlichen Menge M von Aussagen abhängige Ableitung von A in K" definieren. Der erste Begriff wird dann zum Spezialfall des zweiten, nämlich zum Fall, wo M leer ist.[1]

Zunächst erweitern wir unsere Definition von "Regel". Wir fügen zu unserer Definition aus § 1 (S. 35) hinzu: Wenn $R_1,\ldots,R_n$ Regeln 0. oder 1. Stufe sind, wobei mindestens ein R_i ($1 \leq i \leq n$) von 1. Stufe, X eine Formel, dann sei $R_1;\ldots;R_n \dot{\Rightarrow} X$ eine Regel 2. Stufe. $R_1,\ldots,R_n$ heißen auch Vorderregeln, X auch Hinterformel der Regel 2. Stufe. Der Einheitlichkeit halber sprechen wir auch bei Regeln 1. Stufe von "Vorderregeln", benutzen daneben aber weiterhin den Ausdruck "Vorderformeln". Mit "Regel" meinen wir in diesem §en "Regel 0., 1. oder 2. Stufe". Mit R^{β} meinen wir $R_1^{\beta};\ldots;R_n^{\beta} \dot{\Rightarrow} X^{\beta}$, falls R die Gestalt $R_1;\ldots;R_n \Rightarrow X$ hat. Die Grundregeln von K seien wieder eine ausgezeichnete endliche Menge von Regeln.

Wenn wir metasprachlich eine Regel unbestimmt mitteilen, so schreiben wir oft $R_1,\ldots,R_n \Rightarrow X$, auch wenn es sich dabei um eine Regel 2. Stufe handelt, für die man $R_1;\ldots;R_n \Rightarrow X$ schreiben müßte. Wir benutzen also $R_1,\ldots,R_n \Rightarrow X$ als Kennzeichnung für die Zeichenreihe, die aus $R_1,\ldots,R_n$ und X mit dazwischenstehenden Strichpunkten bzw. "$\Rightarrow$" besteht.

Die $\rightarrow$-Einführungsregel des GENTZENschen Kalküls des natürlichen Schließens können wir jetzt als

$A \Rightarrow B \dot{\Rightarrow} (A \rightarrow B)$

===========

1) Von der "Jaśkowski-Gentzenschen" Erweiterung des Kalkülbegriffs zu sprechen, ist dadurch gerechtfertigt, daß beide Autoren erstmals die fundamentale Bedeutung des Schliessens aus Annahmen erkannten. Mit der Angabe darauf aufbauender Logikkalküle schufen sie ein Paradigma, aus dem sich leicht ein abstrakter Kalkültyp entwickeln läßt. - Auf die von mir übersehene Arbeit von JAŚKOWSKI (1934), in der unabhängig von GENTZEN ein Kalkül des natürlichen Schließens für die klassische Logik angegeben wird, hat mich Prof. Chr. Thiel hingewiesen.

formulieren und dieser Formulierung die Interpretation (*) geben. Das Analoge gilt für die $\vee$-Beseitigungsregel, die von GENTZEN notiert ist als

$$\frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

und die wir so formulieren können: $A \vee B; A \Rightarrow C; B \Rightarrow C \stackrel{.}{\Rightarrow} C$.

Allgemein soll $R_1, \ldots, R_n \Rightarrow X$ bedeuten: Für jede Belegung β darf man von Vorkommen der Hinterformeln von $R_1{}^\beta, \ldots, R_n{}^\beta$ übergehen zu X^β, und für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ die evtl. in der Ableitung der Hinterformel von $R_i{}^\beta$ auftretenden Vorkommen der Vorderregeln von $R_i{}^\beta$ als Annahmen beseitigen.

"Beseitigen" bedeutet dabei soviel wie: "in der Ableitung markieren". Die Endaussage einer Ableitung ist von genau den in der Ableitung vorkommenden Aussagen abhängig, die an mindestens einer Stelle unmarkiert vorkommen. Da wir den Terminus "beseitigen" später im Zusammenhang von Operatorenregeln wieder benötigen, wollen wir dieses Markieren als "<u>Löschen</u>" bezeichnen. Wir sprechen also davon, daß eine Annahme bei Anwendung einer Regel 2. Stufe <u>gelöscht</u> (statt "beseitigt") wird.

Regeln 2. Stufe, die es erlauben, Annahmen zu löschen, setzen natürlich voraus, daß es zunächst einmal möglich ist, innerhalb einer Ableitung in K Annahmen einzuführen, d.h. Aussagen zu "setzen", ohne dabei schon auf eine Grundregel von K Bezug zu nehmen. Dies zuzulassen, war im Kalkülbegriff aus § 1 nicht nötig, da man dort einfach zu einem erweiterten Kalkül übergehen konnte, in dem die Annahme zusätzliche Anfangsregel war (s.o. S. 38). Mit der Annahmenlöschung als Ableitungsoperation in einem Kalkül kann man nun aber die Annahmeneinführung nicht mehr als Übergang zu einem anderen Kalkül auffassen, sondern nur als Ableitungsschritt in demselben Kalkül. So wie wir oben von "Löschung" statt "Beseitigung" sprachen, vereinbaren wir auch hier einen neuen Terminus an Stelle von "einführen", indem wir von der "Heranziehung" einer Annahme reden. Es soll also jetzt erlaubt sein, einen Zweig eines Beweisbaumes mit der Heranziehung einer Annahme statt durch Anwendung einer Anfangsregel zu beginnen.

Annahmen fassen wir dabei nicht einfach als Aussagen, sondern als konkrete Regeln O. Stufe auf, weshalb wir auch von Annahmeregel statt Annahme sprechen. Auf diese Art und Weise erhalten wir eine Parallelität zwischen Anfangsregeln und Annahmen: Die Anwendung einer herangezogenen Regel O.Stufe. d.h. einer Annahme, erlaubt ebenso wie die Anwendung einer Anfangsregel, eine Aussage hinzuschreiben, ohne vorher andere Aussagen schon abgeleitet zu haben. Eine Annahme A, die man heranzieht, ist also eine konkrete Regel O. Stufe, die es erlaubt, A (jetzt als Aussage aufgefaßt) abzuleiten. Die Interpretation von Annahmen als konkreter Regeln nehmen wir schon hier vor, weil wir in §3 die Heranziehung von konkreten Regeln beliebig hoher Stufe als Annahmen definieren werden.

Um eine solche Interpretation auch in der Notation einer Ableitung zur Geltung zu bringen, benutzen wir eine etwas umständlichere Schreibweise als sie in Darstellungen des Kalküls des natürlichen Schließens (etwa bei GENTZEN 1935 oder PRAWITZ 1965) gebräuchlich ist. So wie wir in §1 die Anwendung einer Anfangsregel durch

$$R\ \beta \frac{}{A}$$

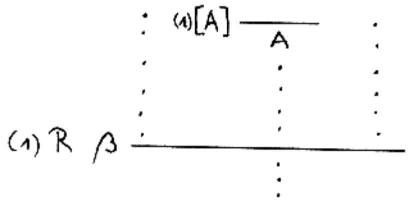
notiert haben, notieren wir die Heranziehung einer konkreten Regel O. Stufe A als Annahme so:

$$A \frac{}{A}\ ,$$

Die Angabe einer Belegung, auf die wir ohnehin meist verzichten, ist hier überflüssig, da es sich um die Heranziehung einer konkreten Regel handelt. Daß es sich bei dem links neben dem Schlußstrich stehenden A um eine herangezogene Regel und nicht um eine konkrete Anfangsregel von K handelt, geht daraus hervor, daß ansonsten rechts neben diesem A noch die leere Belegung $\langle\rangle$ stehen müßte:

$$A \langle\rangle \frac{}{A}\ .$$

Die spätere Löschung einer Annahme A vermerken wir durch ihre Einklammerung [A]. Außerdem setzen wir links neben die Klammer eine Ziffer und wiederholen diese links neben der Kennzeichnung der Regel, bei deren Anwendung die Annahme gelöscht wurde. Ansonsten behalten wir die in § 1 entwickelte Schreibweise bei.



Man beachte, daß sich die Operation der Löschung auf die links neben dem Schlußstrich stehende Regel A bezieht und nicht auf die Aussage A, die Aufgrund dieser Anwendung der Regel A abgeleitet wurde.

<u>Beispiel</u>: K_2 habe dasselbe Vokabular wie der oben S. 37 definierte Kalkül K_1, ebenso R_1 - R_3 als Grundregeln. K_2 habe jedoch noch die zusätzliche Grundregel 2. Stufe:

(R_4) $\quad a \Rightarrow a{+}{+} \stackrel{\cdot}{\Rightarrow} {+}a$.

Folgende Ableitung zeigt die Ableitbarkeit von ++ in K_2:

$$\begin{array}{rc}
(1)\,[+] & \overline{\qquad\quad} \\
 & + \\
R_2\langle a \mapsto + \rangle & \overline{\qquad\quad} \\
 & ++ \\
R_2\langle a \mapsto ++ \rangle & \overline{\qquad\quad} \\
 & +++ \\
(1)\,R_4\langle a \mapsto + \rangle & \overline{\qquad\quad} \\
 & ++
\end{array}$$

Da vor dem letzten Schritt eine Ableitung von +++ aus der Annahmeregel + vorlag, erlaubte es R_4, zu ++ überzugehen und dabei die Annahmeregel + zu löschen. a wurde bei der Anwendung von R_4 durch + belegt. - Die Doppeltheit zwischen der (als Regel aufgefaßten Annahme + und der unter Benutzung dieser Annahme im ersten Schritt abgeleiteten Aussage + erscheint künstlich. Man könnte vereinbaren, den obersten

Schlußstrich mit den links neben ihm stehenden Vermerken ganz wegzulassen und bei Löschung der Annahme + einfach die oberste Aussage + einzuklammern. Das entspräche dem Vorgehen bei GENTZEN (1935) und PRAWITZ (1965), wäre jedoch im Hinblick auf die in § 3 folgende Verallgemeinerung nicht sinnvoll.

<u>Ein weiteres Beispiel</u>, das etwas komplizierter ist: Sei K_3 der Kalkül mit o,+ als Atomen, a als einziger Objektvariable. Alle Ausdrucksformen und Ausdrücke seien auch Formeln bzw. Aussagen. a sei Aussagenvariable. K_3 habe die Grundregeln:

(R_1) $\quad o$

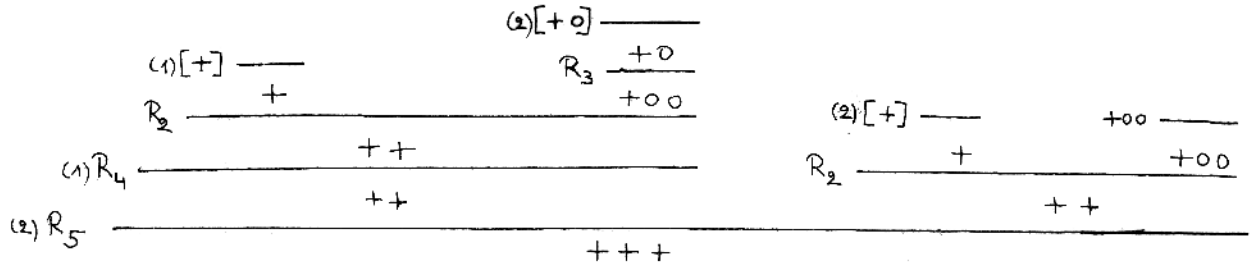
(R_2) $\quad a, aoo \Rightarrow a+$

(R_3) $\quad ao \Rightarrow aoo$

(R_4) $\quad a \Rightarrow a+ \dot{\Rightarrow} a+$

(R_5) $\quad ao \Rightarrow a+ ; a \Rightarrow a+ \dot{\Rightarrow} a++$

Die folgende Ableitung zeigt, daß sich +++ in K_3 aus +oo ableiten läßt:



Auf die Notation von Belegungen wurde dabei verzichtet. Abgesehen von +oo wurden in der Ableitung von +++ alle Annahmen an allen Stellen ihres Vorkommens gelöscht.

Nun zur exakten Definition des Ableitungsbegriffs. Zunächst einige Vereinbarungen. Sei R eine Regel. Dann sei $(R)_1$ das System ihrer Vorderregeln, $(R)_2$ ihre Hinterformel. Falls R also die Gestalt $R_1,\dots,R_n \Rightarrow X$ hat, dann ist $(R)_1 \equiv R_1,\dots,R_n$ und $(R)_2 \equiv X$. Falls R von 0. Stufe, ist $(R)_1$ das leere System. Sei Γ ein System von Regeln. Dann sei $\{\Gamma\}$ die Menge der in Γ vorkommenden Regeln. Insbesondere ist also $\{(R)_1\}$ die Menge der Vorderregeln von R. $\{.\}$ bezeichnet also den Übergang von einem System von Zeichen zu der endlichen Menge der in ihm vorkommenden Zeichen.[1] Speziell sei $\{\,\}$, d.h. die Menge der im leeren System vorkommenden Zeichen, mit $\emptyset$ bezeichnet. $\bigcup_{i=1}^{n}$, $\setminus$ sollen wie üblich die Vereinigung bzw. die Differenz endlicher Mengen bezeichnen. Für die "offizielle" Notation $\langle R, \beta, \Pi_1, \ldots, \Pi_n, A\rangle$ einer Ableitung gilt das in §1 gesagte, nur daß jetzt nicht nur $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, sondern auch β wegfallen kann (im Falle der Heranziehung einer Annahme). Wir definieren:

<u>Π ist von M abhängige Ableitung von A</u>, genau dann, wenn A Aussage, M endliche Menge konkreter Regeln 0. Stufe (d.h. Menge von Annahmen) und einer der folgenden Fälle gilt:

1) Π hat die Gestalt $\langle R, \beta, A\rangle$, R ist Anfangsregel von K, β ist Belegung, $R^{\beta} \equiv A$ und $M = \emptyset$.
2) Π hat die Gestalt $\langle R, A\rangle$, $R \equiv A$ und $M = \{A\}$.
3) Π hat die Gestalt $\langle R, \beta, \Pi_1, \ldots, \Pi_n, A\rangle$, R ist Grundregel 1. oder 2. Stufe von K, β ist Belegung, für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ ist Π_i von M_i abhängige Ableitung von A_i, $R^{\beta} \equiv R_1, \ldots, R_n \Rightarrow A$, für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ ist $(R_i)_2 \equiv A_i$, und $M = \bigcup_{i=1}^{n}(M_i \setminus \{(R_i)_1\})$.

Klausel 1) drückt die Anwendung einer Anfangsregel aus, 2) die Heranziehung einer Annahme, 3) die Anwendung einer Grundregel 1. oder 2. Stufe, bei deren Anwendung u.U. Annahmen gelöscht werden. Diese induktive Definition ist entscheidbar; insbesondere sind die in 3) vorkommenden Quantifikationen über M_i "beschränkt", d.h. wenn man die Definition durch Gödelisierung als zahlentheoretische Definition auffaßt, ergeben sich beschränkte Quantoren.

Weiterhin ist diese Definition so beschaffen, daß nur in Π effektiv angewandte konkrete Grundregeln zu M gehören. Es gilt sogar, daß M eindeutig bestimmt ist, falls Π von M abhängige Ableitung von A ist. Deshalb definieren wir noch den Begriff der <u>Ableitung</u> von A <u>aus</u> einem (endlichen) System von Regeln, für den gilt, daß eine Ableitung von A aus Γ zugleich eine Ableitung von A aus Γ' ist, falls $\{\Gamma\} \subset \{\Gamma'\}$:

=============

1) Vgl. dazu LORENZEN (1955), S. 131f.

<u>Π ist Ableitung von A aus Γ</u> genau dann, wenn A Aussage, Γ System konkreter Regeln 0. Stufe und es eine endliche Menge M gibt mit $M \subset \{\Gamma\}$, so daß Π von M abhängige Ableitung von A ist. (Diese Definition ist offensichtlich auch entscheidbar, da die Quantifikation über M "beschränkt" ist.)

<u>A ist aus Γ in K ableitbar</u> ($\Gamma \vdash_K A$) genau dann, wenn es ein Π gibt, so daß Π Ableitung von A aus Γ ist. Wenn Γ das leere System ist, schreiben wir auch "$\vdash_K A$".

Man beachte, daß der Begriff der Ableitung <u>aus Γ</u> für Systeme und nicht für Mengen definiert ist, ebenso der Begriff der Ableitbarkeit. Das erweist sich für syntaktische Untersuchungen zweckmäßiger. Es gilt natürlich: Π ist Ableitung von A aus Γ genau dann, wenn Π Ableitung von A aus Γ' ist, falls $\{\Gamma\}=\{\Gamma'\}$. Dieses Resultat werden wir im folgenden benutzen, ohne es zu erwähnen, d.h. wir wenden stillschweigend Strukturregeln auf Γ an.[1]

===============

1) Statt der Definition einer Ableitung von A aus Γ, d.h. der Definition einer zweistelligen Relation, kann man auch einen "Annahmenkalkül" angeben, dessen Aussagen etwa die Gestalt $\Gamma \blacktriangleright A$ haben und in dem $\Gamma \blacktriangleright A$ genau dann ableitbar ist, wenn A aus Γ im Ausgangskalkül ableitbar ist. Ein solcher Annahmenkalkül (wie er sich z.B. bei GENTZEN 1936, S. 514f. für den Kalkül des natürlichen Schließens findet) wäre ein Kalkül im Sinne von § 1. Um die in ihm ableitbaren Sequenzen $\Gamma \blacktriangleright A$ sinnvoll interpretieren zu können, wird man jedoch wieder auf den in diesem §en definierten Kalkülbegriff zurückgreifen müssen, für den der Begriff der Ableitung aus Annahmen grundlegend ist.

§ 3. Regeln beliebiger (endlicher) Stufe

Die zentrale Definition des in § 2 im Anschluß an JAŚKOWSKI und GENTZEN entwickelten Kalkülbegriffs war die der von einer endlichen Menge von Aussagen abhängigen Ableitung einer Aussage. Dabei hatten wir Annahmen als konkrete Regeln O. Stufe interpretiert. Diese Auffassung legt die Verallgemeinerung nahe, nicht nur konkrete Regeln O. Stufe, sondern auch konkrete Regeln 1. und 2. Stufe als Annahmen zuzulassen, die man heranziehen und wieder löschen kann. Da eine Regel, bei deren Anwendung man eine Annahme O. Stufe löschen konnte, schon von 2. Stufe war, muß man dann Regeln 3. und 4. Stufe einführen. Will man auch solche wieder als Annahmen benutzen, benötigt man Regeln noch höherer Stufe. Es ist also sinnvoll, Regeln und entsprechend auch Annahmen beliebiger (endlicher) Stufe zu definieren.

Wir führen ganz allgemein den Begriff der Regel beliebiger (endlicher) Stufe ein, wobei alle anderen Bestimmungen über das Vokabular eines Kalküls aus § 1 bzw. § 2 übernommen werden:

1) Jede Formel ist eine <u>Regel O. Stufe</u>.
2) Sind $R_1,\ldots,R_n$ Regeln höchstens m-ter Stufe, wobei mindestens ein R_i $(1 \leq i \leq n)$ von m-ter Stufe ist, und ist X Formel, so ist $R_1 \overset{x}{,} \ldots \overset{x}{,} R_n \overset{x}{\Rightarrow} X$ eine <u>Regel (m+1)-ter Stufe</u>, wobei an den mit x markierten Stellen m Punkte stehen sollen.

Mit "Regel" meinen wir von nun ab "Regel irgendeiner Stufe". Wie oben (S. 40) vereinbaren wir wieder, daß wir bei metasprachlicher Mitteilung einer Regel (insbesondere wenn die Regel unbestimmt, also ohne Angabe ihrer Stufe angeführt wird) auf die Punkte über Komma und Regelpfeil verzichten bzw. nur soviele Punkte setzen, daß die metasprachliche Mitteilung nicht mehrdeutig wird. Z.B. notieren wir $R_1 \dot{;} R_2 \Rightarrow R_3 \dot{\Rightarrow} A$, auch wenn R_1, R_2, R_3 von höherer als O. Stufe sind. Aus der unbestimmten metasprachlichen Mitteilung kann man also nur die Stufen<u>unterschiede</u> herauslesen (z.B. daß hier R_1 höchstens die Stufe von $R_2 \Rightarrow R_3$ haben kann), nicht jedoch die <u>absoluten</u> Stufenzahlen.

R^β sei analog zu vorhin induktiv definiert: Falls R die Gestalt $R_1, \dots, R_n \Rightarrow X$ hat, dann sei R^β gerade $R_1^\beta, \dots, R_n^\beta \Rightarrow X^\beta$. Für Formeln X ist X^β auf S. 33 erklärt worden. <u>Vorderregeln</u> und <u>Hinterformel</u> seien wie auf S. 40 erklärt. Weiterhin benutzen wir "Annahmeregel" und "Annahme" synonym mit "als Annahme herangezogene Regel".

Die intendierte Bedeutung einer Regel kann man wörtlich von S. 41 übernehmen, nur daß "Annahmen" jetzt konkrete Regeln beliebig hoher Stufe sein können. Eine Regel $X_1 \Rightarrow X_2 \dot{\Rightarrow} X_3; X_4 \Rightarrow X_5 \ddot{\Rightarrow} X$ soll also bedeuten: Für jede Belegung β darf man von X_3^β und X_5^β zu X^β übergehen und dabei die eventuell in der Ableitung von X_3^β benutzte Annahmeregel $X_1^\beta \Rightarrow X_2^\beta$ und die evtl. in der Ableitung von X_5^β benutzte Annahmeregel X_4^β löschen. Falls also z. B. die Ableitung von X_3^β nur von $X_1^\beta \Rightarrow X_2^\beta$ und die Ableitung von X_5^β nur von X_4^β abhängig war, so ist die entstehende Ableitung von X^β von keiner Annahmeregel mehr abhängig.

Die Funktionsweise einer Regel höherer Stufe wird exakt durch die genaue Definition des Ableitungsbegriffes festgelegt; Beispielableitungen können den Ableitungsbegriff jedoch verständlicher machen. Zur Notation von Ableitungen gilt das in §2 gesagte, nur daß Annahmen nicht mehr nur an der Spitze von Ableitungen herangezogen werden, sondern auch im Verlaufe von Ableitungen, sofern es sich bei den Annahmen nicht um Regeln 0. Stufe handelt.

<u>Beispiel</u>: Sei K_4 der Kalkül mit den Atomen o,+ und a als einziger Objektvariable. Alle Ausdrucksformen und Ausdrücke seien auch Formeln bzw. Aussagen. a sei Aussagenvariable. K_4 habe die Grundregeln:

(R_1) o

(R_2) $ao \Rightarrow aoo$

(R_3) $a+ \Rightarrow a$

(R_4) $ooa \Rightarrow ooa{+}{+} \dot{\Rightarrow} ooa+ \ddot{\Rightarrow} a+$

Die folgende Ableitung beweist die Ableitbarkeit von o+ aus $o \Rightarrow oo$ in K_4, wobei auf die Angabe von Belegungen verzichtet wird:

$$\begin{array}{rc}
R_1 & \overline{\qquad\qquad} \\
 & o \\
o \Rightarrow oo & \overline{\qquad\qquad} \\
 & oo \\
R_2 & \overline{\qquad\qquad} \\
 & ooo \\
(1)\,[ooo \Rightarrow ooo{+}{+}] & \overline{\qquad\qquad} \\
 & ooo{+}{+} \\
R_3 & \overline{\qquad\qquad} \\
 & ooo{+} \\
(1)\,R_4 & \overline{\qquad\qquad} \\
 & o{+}
\end{array}$$

Im 2. Schritt wurde die konkrete Regel $o \Rightarrow oo$ als Annahme herangezogen, indem von o zu oo übergegangen wurde. Im 4. Schritt wurde $ooo \Rightarrow ooo{+}{+}$ herangezogen, indem von ooo zu ooo++ übergegangen wurde. Nach dem 5. Schritt lag eine Ableitung von ooo+ aus der herangezogenen Annahme $ooo \Rightarrow ooo{+}{+}$ vor. Also erlaubte es R_4 (bei Belegung von a durch o), im 6. Schritt zu o+ überzugehen und dabei die Annahme $ooo \Rightarrow ooo{+}{+}$ zu löschen.

<u>Ein etwas komplizierteres Beispiel</u>: K_5 habe o,+ als Atome, a,b als Variable. Alle Ausdrucksformen und Ausdrücke seien auch Formeln bzw. Aussagen. a,b seien Aussagenvariable. Die Grundregeln von K_5 seien:

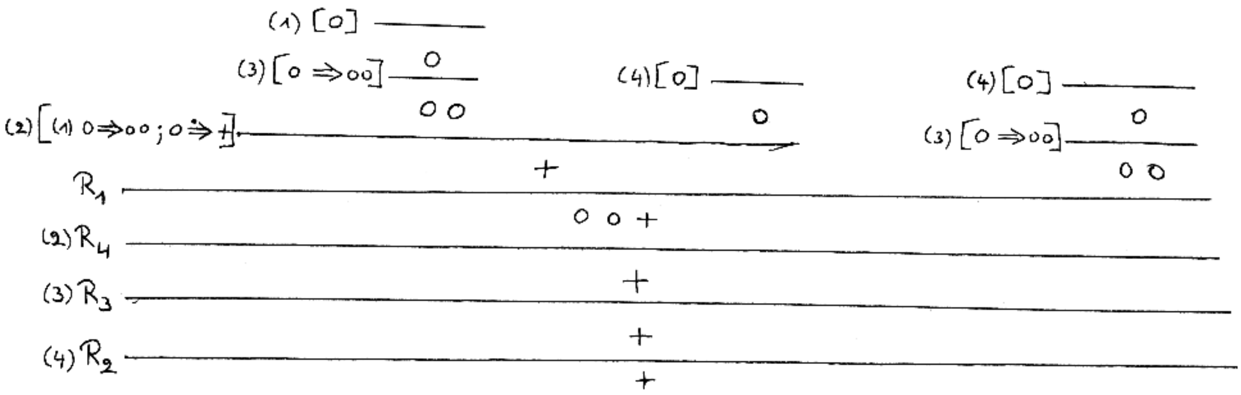
(R_1) $\quad +, a \Rightarrow a+$

(R_2) $\quad o \Rightarrow a \dot{\Rightarrow} a$

(R_3) $\quad a \Rightarrow aa \dot{\Rightarrow} b \ddot{\Rightarrow} b$

(R_4) $\quad a \Rightarrow ao ; a \dot{\Rightarrow} b \ddot{\Rightarrow} oob \dddot{\Rightarrow} b$

Folgende Ableitung, bei der wieder auf Angabe von Belegungen verzichtet wird, beweist die Ableitbarkeit von + in K_5:



Dieses Beispiel zeigt, daß die Heranziehung einer Annahmeregel mit der Löschung einer anderen Annahmeregel verbunden sein kann: Bei Heranziehung von $o \Rightarrow oo; o \Rightarrow +$ wurde o gelöscht. Diese herangezogene Regel selber wurde später wieder bei Anwendung von R_4 gelöscht. Obige Ableitung zeigt weiterhin, daß Aussagen ableitbar sind, ohne daß K_5 eine Anfangsregel hat.[1]

Jetzt die exakte Definition der erweiterten Ableitungsbegriffes. Die Zeichen $(R)_1, (R)_2, \{\Gamma\}$ verstehen wir dabei wie auf S.44f. angegeben.

<u>Π ist von M abhängige Ableitung von A</u> genau dann, wenn A Aussage, M endliche Menge konkreter Regeln (d.h. Annahmenmenge) und einer der folgenden Fälle gilt:

1) Π hat die Gestalt $\langle R, \beta, A\rangle$, R ist Anfangsregel von K, β ist Belegung, $R^\beta \equiv A$ und $M = \emptyset$.

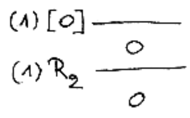
2) Π hat die Gestalt $\langle R, A\rangle$, $R \equiv A$ und $M = \{A\}$.

3) Π hat die Gestalt $\langle R, \beta, \Pi_1, \ldots, \Pi_n, A\rangle$, R ist Grundregel von K, die nicht Anfangsregel ist, β ist Belegung, für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ ist Π_i von M_i abhängige Ableitung von A_i, $R^\beta \equiv R_1, \ldots, R_n \Rightarrow A$, für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ ist $(R_i)_2 \equiv A_i$ und $M = \bigcup_{i=1}^{n} (M_i \setminus \{(R_i)_1\})$.

4) Π hat die Gestalt $\langle R, \Pi_1, \ldots, \Pi_n, A\rangle$, R ist konkrete Regel von mindestens 1. Stufe, die nicht Grundregel von K ist,

=============

1)Für letzteres läßt sich auch noch ein einfacheres Beispiel geben, nämlich die Ableitung



.

für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ ist Π_i von M_i abhängige Ableitung von A_i, $R \equiv R_1, \ldots, R_n \Rightarrow A$, für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ ist $(R_i)_2 \equiv A_i$, und $M = \bigcup_{i=1}^{n} (M_i \setminus \{(R_i)_1\}) \cup \{R\}$.

Klauseln 1) und 2) stimmen mit den entsprechenden Klauseln aus § 2 überein, 3) ebenso, wenn man davon absieht, daß R jetzt beliebige Stufe haben kann. Klausel 4) regelt die Heranziehung von Annahmen von höherer als 0. Stufe. Eine solche Heranziehung geschieht ja dadurch, daß man die herangezogene (konkrete) Regel anwendet und zugleich in die Menge der Annahmen aufnimmt. - Es ließe sich wieder leicht zeigen, daß die definierte Relation entscheidbar ist (vgl. oben S. 45).

Weiter definieren wir, wobei sich alle oben S. 45f. gemachten Bemerkungen wörtlich auf unseren erweiterten Kalkülbegriff übertragen:

Eine Zeichenreihe $\Gamma \Vdash A$ heißt <u>Ableitungsbeziehung</u>, wenn es eine von $\{\Gamma\}$ abhängige Ableitung von A gibt.

<u>Π ist Ableitung von A aus Γ</u> genau dann, wenn A Aussage, Γ System konkreter Regeln und es eine endliche Menge M mit $M \subset \{\Gamma\}$ gibt, so daß Π von M abhängige Ableitung von A ist.

<u>A ist aus Γ in K ableitbar</u> ($\Gamma \vdash_K A$) genau dann, wenn es ein Π gibt, so daß Π eine Ableitung von A aus Γ ist.

Wenn wir im folgenden $\Gamma \vdash_K A$ behaupten, so meinen wir immer, daß wir einen effektiven Beweis für diese Behauptung haben, also eine Ableitung von A aus Γ angeben können.

Zur Notation von Ableitbarkeitsbehauptungen $\Gamma \vdash_K A$: Ist die höchste Stufe einer in Γ vorkommenden Regel n, so werden die in Γ vorkommenden Regeln vor "$\vdash_K$" durch Kommata mit n Punkten getrennt. Für die metasprachliche Mitteilung von Ableitbarkeitsbehauptungen gibt jedoch wieder die Vereinbarung, nur soviele Punkte über die Kommata zu setzen, daß keine Mißverständnisse auftreten können. - Falls klar ist, um welchen Kalkül es sich im jeweiligen Kontext handelt, lassen wir den Index "K" weg, schreiben also "$\vdash$" statt "$\vdash_K$".

Wollten wir einen Ableitungsschritt schematisch notieren, so könnten wir dies etwa so tun:

$$(*)\qquad \Delta_1 \Rightarrow A_1;\ldots;\Delta_n \Rightarrow A_n \stackrel{\cdot}{\Rightarrow} A \quad \frac{\begin{array}{c}[\Delta_1^\beta]\\ \vdots\\ A_1^\beta\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}[\Delta_n^\beta]\\ \vdots\\ A_n^\beta\end{array}}{A^\beta}\ ,$$

wobei $\begin{array}{c}\Delta_i^\beta\\ \vdots\\ A_i^\beta\end{array}$ für eine Ableitung von A_i^β mit den Annahmen Δ_i^β steht.

Es ist natürlich unerheblich, ob wir stattdessen schreiben

$$(**)\qquad \frac{\Delta_1 \Rightarrow A_1;\ldots;\Delta_n \Rightarrow A_n \stackrel{\cdot}{\Rightarrow} A \quad \begin{array}{c}[\Delta_1^\beta]\\ \vdots\\ A_1^\beta\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}[\Delta_n^\beta]\\ \vdots\\ A_n^\beta\end{array}}{A^\beta}$$

und so suggerieren, die Regel $\Delta_1 \Rightarrow A_1;\ldots;\Delta_n \Rightarrow A_n \stackrel{\cdot}{\Rightarrow} A$ sei eine mit Hilfe von $\Rightarrow$ zusammengesetzte Formel. Wir könnten dabei statt von "Regel" z.B. von "$\Rightarrow$-Formel", statt von "konkreter Regel" von "$\Rightarrow$-Aussage", statt von "Grundregel" von "Axiom" reden und dann (**) als Schema für einen Ableitungsschritt wählen, in dem links eine "$\Rightarrow$-Formel" als Prämisse auftritt. Das wäre aber nur eine Frage der Terminologie, da "$\Rightarrow$-Formeln" so wie Regeln nicht Konklusionen von Regelanwendungen sein können. D.h.: In (**) ist die linke Prämisse immer Annahme (bzw. Axiom). Zudem wäre dieser Vorschlag insofern unglücklich, als man sinnvollerweise nur das Aussage nennt, was sowohl Prämisse als auch Konklusion einer Regelanwendung sein kann.

Anders ist es, wenn man statt (*) folgende Schemata für Ableitungsschritte zur Verfügung hat:

$$\Rightarrow\text{-Einführung}\quad \frac{\begin{array}{c}[R_1,\ldots,R_n]\\ \vdots\\ A\end{array}}{R_1,\ldots,R_n \Rightarrow A}$$

$$\Rightarrow\text{-Beseitigung}\quad \frac{R_1,\ldots,R_n \Rightarrow A \qquad R_1 \quad \ldots \quad R_n}{A}\quad ,$$

wobei $R_1,\ldots,R_n$ $\Rightarrow$-Aussagen (d.h. konkrete Regeln) und A eine Aussage sei. Faßt man ferner Axiome (d.h. Grundregeln in der anderen Terminologie) als Axiomenschemata auf, erlaubt also für jedes Axiom R und jede Belegung β

R^{β}

als Anfang, so ergibt sich eine Art Implikationskalkül mit $\Rightarrow$ als (materialem) Implikationszeichen, der allerdings nur linksiterierte Implikationen (eben $\Rightarrow$-Aussagen) zuläßt. Es ließe sich für diesen Kalkül ein geeigneter Ableitungsbegriff definieren, gemäß dem ein Ableitungsschritt sich nach obigen Schemata vollzieht. Diese Schemata würden also nicht explizit als Regeln auftreten. Wenn wir einen so konstruierten Kalkül mit $K_{\Rightarrow}$ bezeichnen (wobei die Grundregeln von K die Axiome von $K_{\Rightarrow}$ sind), so läßt sich leicht für konkrete Regeln ($\Rightarrow$-Aussagen) $R_1,\ldots,R_n$ und Aussagen A zeigen:

$$R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_{\Rightarrow}} A \quad \text{g.d.w.} \quad R_1,\ldots,R_n \vdash_{K} A \quad .$$

Führt man $\vdash_K R$ als Abkürzung für $(R)_1 \vdash_K (R)_2$ ein, so gilt sogar

(1) $\vdash_{K_{\Rightarrow}} R$ g.d.w. $\vdash_K R$ für alle konkreten Regeln R.

D.h.: Technisch gesehen sind $K_{\Rightarrow}$ und K gleichwertig.

Warum wir K mit seinem komplizierteren Ableitungsbegriff vorziehen, hat philosophische Gründe: Wir gehen von einer bestimmten Interpretation von Zeichengebilden

(2) $\Delta_1 \Rightarrow A_1;\ldots;\Delta_n \Rightarrow A_n \dot{\Rightarrow} A$

aus, nämlich ihrer Interpretation als Regeln: Du darfst zu

A übergehen, falls du für jedes i ($1 \leq i \leq n$) A_i unter Benutzung von Δ_i abgeleitet hast (wobei dies gegebenenfalls auf eine Belegung β zu relativieren ist). Diese Interpretation wird durch den Ableitungsbegriff von K expliziert; ein Schema der Art (*) gibt unmittelbar die philosophische Interpretation von (2) wieder. Der Ableitungsbegriff von $K_{\Rightarrow}$ würde dies nicht leisten. Die Schemata der $\Rightarrow$-Einführung und $\Rightarrow$-Beseitigung ließen sich durch unsere Interpretation von (2) nur auf Umwegen (etwa über Sätze wie (1)) rechtfertigen. Mir ist auch keine andere Interpretation von linksiterierten Implikationen bekannt, die unmittelbar zu den Schemata von $\Rightarrow$-Einführung und $\Rightarrow$-Beseitigung führt. Wir werden zwar selbst in Kapitel 2 bei der Behandlung aussagenlogischer Operatoren Regeln für einen Junktor $\rightarrow$ motivieren, die obigen Schemata entsprechen, doch diese Motivation geschieht wieder unter Rückgriff auf den $\Rightarrow$-Begriff. Unsere Deutung von linksiterierten Implikationen durch Regeln scheint so grundlegend und auch klar zu sein, daß es schwierig sein dürfte, einen noch fundamentaleren Begriff zu finden.
Dies hindert natürlich niemanden, aus technischen Gründen für metalogische Untersuchungen die gewohntere Kalkülform $K_{\Rightarrow}$ zu wählen. Wir wollen jedoch auf die möglichen technischen Vereinfachungen verzichten, um die philosophische Interpretation des $\Rightarrow$-Begriffs besser hervortreten zu lassen.

Man kann also unsere Erweiterung des Kalkülbegriffs in diesem §en auch so zusammenfassen: Wir geben eine Deutung von linksiterierten (materialen) Implikationen mit Hilfe des Regelbegriffs. Diese Deutung bietet uns den grundlegenden Begriff der (materialen) Implikation, auf die wir dann in Kapitel 2 die aussagenlogischen Operatoren zurückführen werden.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß der definierte Begriff der Ableitung in einem Kalkül eine Idealisierung des Begriffs der Begründung sein soll, jedenfalls gewisser Arten von Begründungen. Begründungen einer Aussage A gehen ja immer so vor sich, daß man auf Aussagen $A_1,\ldots,A_n$ und eine Regel R zurückgreift, die es erlaubt, von $A_1,\ldots,A_n$ zu A überzugehen. Da eine Begründung fundiert sein soll, also irgendwann bei akzeptierten Annahmen enden muß, kann man sie auch umgekehrt als Ableitung lesen, wenn man die schon als akzeptiert unterstellten Regeln, nach denen man von Aussagen zu Aussagen übergeht, als Grundregeln eines Kalküls auffaßt.

Der Ableitungsbegriff umfaßt damit sicherlich **nicht alle** Aspekte des Begründungsbegriffs, aber jedenfalls einen wesentlichen Teil davon, und zwar in idealtypischer Weise. Dieser Teil ist größer als der vom LORENZENschen Kalkülbegriff erfaßte, weil er auch das Schließen aus Annahmen miteinbezieht. Der Ansatz, im Rahmen von Kalkülen die Bedeutung logischer Partikeln festzulegen, soll also auch ein Betrag zur argumentationstheoretischen Begründung der Logik sein.

§ 4. Einige Konventionen und Hilfssätze

In diesem §en werden einige Konventionen eingeführt, die für künftige Beweise zweckmäßig sind, außerdem einige wichtige Sätze.

Der Kürze halber werden wir in Kapitel 2 und 3 Ausdrücke, Aussagen, Regeln, Ableitungen etc. eines Kalküls K oft als K-Ausdrücke, K-Aussagen, K-Regeln, K-Ableitungen etc. bezeichnen, das Präfix "K-" jedoch weglassen, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, um welchen Kalkül es sich handelt. Für diesen § 4 gehen wir immer von einem festen Kalkül K im Sinne des § 3 aus, brauchen also die Relativierung auf K nicht zu notieren.

Sei R eine Regel, in der höchstens $a_1,\ldots,a_n$ an Objektvariablen auftreten. Um dies auszudrücken, schreiben wir auch $R(a_1,\ldots,a_n)$. Wenn nicht ausdrücklich erwähnt, besagt die Schreibweise $R(a_1,\ldots,a_n)$ also nur, daß <u>höchstens</u> $a_1,\ldots,a_n$ an Variablen in $R(a_1,\ldots,a_n)$ vorkommen, nicht jedoch, daß <u>genau</u> $a_1,\ldots,a_n$ auftreten. Seien $A_1,\ldots,A_n$ Objekte aus den Variabilitätsbereichen von $a_1,\ldots,a_n$ (respektive). Dann sei $R(A_1,\ldots,A_n)$ die aus $R(a_1,\ldots,a_n)$ durch Substitution von a_i durch A_i $(1 \leq i \leq n)$ hervorgehende konkrete Regel. Entsprechende Festsetzungen sollen für Regelsysteme $\triangle(a_1,\ldots,a_n)$ bzw. $\triangle(A_1,\ldots,A_n)$ gelten.

Nun einiges zur unbestimmten Mitteilung von Ableitungen: Wenn wir metasprachlich mitteilen wollen, daß eine Ableitung von A aus Γ vorliegt mit $R \in \{\Gamma\}$, notieren wir dies mit

$$\begin{array}{c} \vdots \\ R\,\vdots \\ A \end{array}.$$

Die Schreibweise

$$\begin{array}{c} R \\ \vdots \\ A \end{array},$$

die man vom Kalkül des natürlichen Schließens her gewohnt ist, können wir nicht übernehmen, da Annahmen höherer Stufe nicht an der Spitze, sondern im Verlaufe von Ableitungen eingeführt werden. Manchmal benutzen wir statt Punkten auch Kreuze

$$\begin{array}{c} + \\ R\,+ \\ + \\ A \end{array} \;,$$

um uns später wieder aus dieselbe Ableitung beziehen zu können. Anstelle von R kann auch ein System Δ von konkreten Regeln stehen:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Delta\,\vdots \\ A \end{array} \;,$$

wobei wir gelegentlich die Elemente des Systems auch untereinander schreiben:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ R_1 \vdots \\ R_2 \vdots \\ A \end{array} \;.$$

Eine Notation

$$\begin{array}{c} \vdots \\ (1)[\Delta]\vdots \\ (1)\,R\;\dfrac{B}{A} \end{array}$$

versteht sich dann von selbst: Sie dient der unbestimmten **Mitteilung einer Ableitung von A, die im letzten Schritt die Regel R auf die einzige Prämisse B anwendet, wobei bei dieser Anwendung von R die Regeln Δ gelöscht werden. Die Anwendung einer Regel R, die möglicherweise mehrere Vorderregeln hat, notieren wir unbestimmt so:**

$$R\;\frac{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \end{array}}{A} \;.$$

Hier können wir allerdings keine Annahmenlöschung mehr mitnotieren, da diese sich jeweils auf die Ableitungen der einzelnen Prämissen bezieht. Es kann ja z.B. der Fall

$$(1)\,R\;\frac{\begin{array}{c} (1)[R_1]\vdots \\ A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} R_1 \vdots \\ A_2 \end{array}}{A}$$

auftreten, in dem bei Anwendung von R die Annahme R_1 nur in der Ableitung von A_1 gelöscht wird und nicht in der Ableitung von A_2, so daß die entstehende Ableitung weiterhin von R_1 abhängig bleibt.

Liegt eine Ableitung von A aus Γ mit $B \in \{\Gamma\}$ vor, wobei B herangezogene Regel 0. Stufe (d.h.Aussage), dann notieren wir statt

$$\begin{array}{c} \vdots \\ B \; \vdots \\ \vdots \\ A \end{array}$$

auch

$$\begin{array}{c} \dfrac{B}{B} \\ \vdots \\ A \end{array} ,$$

da in diesem Falle B an der Spitze eines Ableitungsfadens stehen muß. Eine Ableitung von A aus Γ mit $\{B,C\} \subset \{\Gamma\}$ notieren wir auch so:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{B}{B} & & \dfrac{C}{C} \\ \ddots & & .\cdot{}^{\cdot} \\ & A & \end{array} .$$

Man beachte, daß in Ableitungen, die auf diese Weise unbestimmt mitgeteilt werden, neben den notierten Annahmen noch weitere Annahmen herangezogen sein können, die jedoch im betrachteten Zusammenhang nicht hervorgehoben werden.

Seien Ableitungen

$$\begin{array}{c} \dfrac{B}{B} \\ \vdots \\ A \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ B \end{array}$$

gegeben. Dann bezeichne

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ B \\ \vdots \\ A \end{array}$$

die Ableitung, die aus

$$\begin{array}{c} \mathfrak{B}\,\overline{\mathfrak{B}} \\ \vdots \\ A \end{array}$$

dadurch entsteht, daß man jede Anwendung der herangezogenen Regel B ersetzt durch die Ableitung

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ \mathfrak{B} \end{array} \qquad \text{von B.}$$

Sei Π eine Ableitung. Bei einer Regelanwendung

$$\begin{array}{c} \vdots \quad \ldots\ldots \quad \vdots \\ R\ \dfrac{A_1 \quad \ldots\ldots \quad A_n}{A} \\ \vdots \end{array}$$

heißen die Aussagenvorkommen $A_1,\ldots,A_n$ *Prämissen der Anwendung von R*, A heiße die *Konklusion der Anwendung von R*. Von den Aussagenvorkommen $A_1,\ldots,A_n$ sagen wir auch, daß sie *nebeneinander* stehen bzw. daß z.B. A_1 (links) *neben* A_3 steht etc.. A_n heißt auch die *rechteste* Prämisse der Anwendung von R. Von $A_1,\ldots,A_n$ sagen wir weiterhin, daß sie *unmittelbar über* A in Π stehen, von A, daß es *unmittelbar unter* $A_1,\ldots,A_n$ steht. Diese Redeweisen sind unabhängig davon, welche Stufe die Regel R hat und ob bei Anwendung von R Annahmen gelöscht wurden; z.B. sollen auch in dem Fall

$$\begin{array}{c} {}^{(1)}[R_1] \vdots \quad \ldots\ldots \quad {}^{(1)}[R_n] \vdots \\ {}^{(1)}R\ \dfrac{A_1 \quad \ldots\ldots \quad A_n}{A} \\ \vdots \end{array}$$

$A_1,\ldots,A_n$ Prämissen der Anwendung von R und A Konklusion der Anwendung von R heißen.

Ein Aussagenvorkommen A heißt ein *oberstes Aussagenvorkommen* in Π, wenn unmittelbar über A kein Aussagenvorkommen steht. A ist das *unterste Aussagenvorkommen* von Π, wenn unmittelbar unter A kein Aussagenvorkommen steht.

Ein Faden in Π ist ein System $A_1,\dots,A_n$ von Aussagenvorkommen in Π, so daß A_1 ein oberstes Aussagenvorkommen in Π ist, A_i unmittelbar über A_{i+1} steht für alle i ($1 \leq i < n$) und A_n unterstes Aussagenvorkommen von Π ist. (Ein System von Aussagenvorkommen kann man sich dabei z.B. vorstellen als Liste von Aussagen, wobei jede Aussage mit einem zusätzlichen Index versehen ist, der die Position dieser Aussage in Π eindeutig charakterisiert.) Statt daß A_i in einem solchen Faden vor A_j steht ($1 \leq i < j \leq n$), sagen wir anschaulicher auch, daß A_i in diesem Faden über A_j und A_j in diesem Faden unter A_i steht. Ein Aussagenvorkommen A steht in Π über B, falls es einen Faden in Π gibt, in dem A über B steht. A steht in Π unter B, wenn B in Π über A steht.

Ferner noch einiges zur Abkürzung von Ableitbarkeitsbehauptungen bzw. Regeln: Seien Γ, Δ Systeme konkreter Regeln, $R_1,\dots,R_n,R$ konkrete Regeln. Dann sei $\Gamma \vdash R$ Abkürzung für $\Gamma, (R)_1 \vdash (R)_2$. $\Gamma \vdash R_1,\dots,R_n$ sei Abkürzung für das System von Ableitungsbeziehungen

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash R_1 \\ \vdots \\ \Gamma \vdash R_n \end{array} .$$

$\Gamma \dashv\vdash \Delta$ bedeute, falls Γ, Δ nicht leer:

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash \Delta \\ \Delta \vdash \Gamma \end{array}$$

(In den letzten beiden Fällen wird also eine metasprachliche Konjunktion abgekürzt.)

Entsprechende Vereinbarungen für Regeln statt Ableitungsbeziehungen: Seien $R_1,\dots,R_n,R$ (nicht notwendigerweise konkrete) Regeln, Γ System von Regeln. Dann sei $\Gamma \Rightarrow R$ Abkürzung für $\Gamma, (R)_1 \Rightarrow (R)_2$ und $\Gamma \Rightarrow R_1,\dots,R_n$ Abkürzung für das Regelsystem

$$\begin{array}{l} \Gamma \Rightarrow R_1 \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow R_n \end{array} .$$

$\Gamma \Leftrightarrow \Delta$ stehe für das Regelsystem

$$\begin{array}{l} \Gamma \Rightarrow \Delta \\ \Delta \Rightarrow \Gamma . \end{array}$$

Eine konkrete Regel R heiße ableitbar, wenn gilt: $\vdash R$, d.h. nach obigen Definitionen, wenn gilt: $(R)_1 \vdash (R)_2$. Eine nichtkonkrete Regel $R(a_1,\ldots,a_n)$ heiße ableitbar, wenn für <u>alle</u> Ausdrücke $A_1,\ldots,A_n$ aus den Variabilitätsbereichen von $a_1,\ldots,a_n$ (respektive) gilt: $\vdash R(A_1,\ldots,A_n)$, d.h.: $(R(A_1,\ldots,A_n))_1 \vdash (R(A_1,\ldots,A_n))_2$. Entsprechend heißen Regelsysteme $\Delta(a_1,\ldots,a_n)$ ableitbar, wenn für alle Ausdrücke $A_1,\ldots,A_n$ aus den Variabilitätsbereichen von $a_1,\ldots,a_n$ (respektive) gilt: $\vdash \Delta(A_1,\ldots,A_n)$ (was durch obige Definitionen erklärt ist).

Wir erweitern noch unsere Schreibweise, mit der wir auf die Vorderregeln und Hinterformel einer Regel R Bezug nehmen. Wir hatten $(R)_1$ als Bezeichnung für das System der Vorderregeln von R gewählt, $(R)_2$ für die Hinterformel. Falls R Formel, war dabei $(R)_1$ leer und $(R)_2 \equiv R$. Falls R n Vorderregeln hat, also $(R)_1$ aus n Gliedern besteht, sei $(R)_{1,i}$ $(1 \leq i \leq n)$ die i-te Vorderregel von R, also das i-te Glied von $(R)_1$. Hat R nur eine Vorderregel, dann ist $(R)_1$ mit $(R)_{1,1}$ identisch. Dies können wir nun iterieren: $(R)_{1,i,1}$ sei das System der Vorderregeln der i-ten Vorderregel von R, $(R)_{1,i,2}$ die Hinterformel der i-ten Vorderregel von R. Falls $(R)_{1,i}$ Formel, sei $(R)_{1,i,1}$ wieder leer und $(R)_{1,i,2} \equiv (R)_{1,i}$. Man kann sich diese Schreibweise leicht merken, wenn man daran denkt, wie man den Übergang von Gödelnummern von Zeichenfolgen zu Gödelnummern von Gliedern solcher Folgen oft notiert.[1)]

Man könnte gegenüber unserer Definition der Ableitbarkeit von Regeln einwenden, sie werden der intendierten Bedeutung von Regeln nicht gerecht. So solle doch eine Regel $A \Rightarrow B \dot{\Rightarrow} C$ bedeuten: "Man darf zu C übergehen, wenn man B unter Benutzung der Annahme A abgeleitet hat." Dementsprechend müsse diese Regel ableitbar heißen, wenn man eine Ableitung von B unter der Annahme A in eine Ableitung von C umformen kann

============

1) Allerdings ist hier $(R)_{1,i}$ nicht als $((R)_1)_i$ definiert. Denn z.B. ist $(A \Rightarrow B \dot{\Rightarrow} C)_{1,1} \equiv A \Rightarrow B \equiv (A \Rightarrow B \dot{\Rightarrow} C)_1$ und nicht etwa $(A \Rightarrow B \dot{\Rightarrow} C)_{1,1} \equiv (A \Rightarrow B)_1 \equiv A$.

- d.h. wenn aus $\Gamma, A \vdash B$ folgt: $\Gamma \vdash C$ -, und nicht, wenn (nach obiger Definition) C unter Benutzung von $A \Rightarrow B$ ableitbar ist - d.h. wenn $A \Rightarrow B \vdash C$. Beides ist jedoch bei unserer Fassung der Ableitbarkeit von Regeln gleichwertig, d.h. es gilt für beliebige konkrete Regeln R:

> $(R)_1 \vdash (R)_2$ genau dann, wenn für jede Annahmenfolge Γ gilt: Wenn $\Gamma \vdash (R)_1$, dann $\Gamma \vdash (R)_2$.

Dies ergibt sich aus der Transitivität und Reflexivität von "$\vdash$", die wir mit folgenden beiden Sätzen beweisen.

<u>Satz 4.1</u> (Transitivität von "$\vdash$")
Sei Γ System konkreter Regeln, R konkrete Regel, A Aussage. Falls $\Gamma \vdash R$ und $\Gamma, R \vdash A$, dann $\Gamma \vdash A$.

<u>Beweis</u> Eine Anwendung einer Annahmeregel R in einer Ableitung Π heiße <u>frei</u>, wenn dieses Vorkommen von R in Π nicht gelöscht wird. Wir führen Paarinduktion über $\langle \gamma, \delta \rangle$, wobei γ die Stufe von R sei und δ die Zahl der freien Anwendungen von R in der betrachteten Ableitung Π von A aus Γ, R. Wir können annehmen, daß R in Γ nicht vorkommt, sonst ist die Behauptung trivial. Wir müssen zeigen, daß sich jede freie Anwendung von R in Π eliminieren läßt.

Ist <u>$\gamma = 0$</u>, dann ist R Aussage. Ist <u>$\delta = 0$</u>, dann ist nichts zu beweisen, da R in Π nicht effektiv herangezogen wird. Ist <u>$\delta > 0$</u>, dann wähle man eine beliebige freie Anwendung von R in Π. Diese sieht so aus:

$$\begin{array}{c} R\ \overline{} \\ R \\ \vdots \end{array}$$

Man ersetze sie durch $\begin{array}{c} + \\ \Gamma\ + \\ + \\ + \\ R \\ \vdots \end{array}$, wobei $\begin{array}{c} + \\ \Gamma\ + \\ + \\ + \\ R \end{array}$

die nach Voraussetzung existierende Ableitung von R aus Γ ist. Die aus Π durch diese Umformung hervorgegangene Ableitung heiße Π'. Π' ist ebenfalls eine Ableitung von A aus Γ, R. Ferner enthält Π' eine freie Anwendung von R weniger als Π, da wir annehmen konnten, daß R in Γ

nicht vorkommt. Also kann man die Induktionsvoraussetzung bezüglich δ anwenden.

Ist $\underline{\gamma > 0}$ und $\underline{\delta = 0}$, dann ist wieder nichts zu beweisen.

Ist $\underline{\gamma > 0}$ und $\underline{\delta > 0}$, dann wähle man eine solche freie Anwendung von R in Π, über der sich keine weitere freie Anwendung von R mehr befindet. Diese sieht so aus:

$$(*)\qquad (1)\,R\;\frac{\begin{matrix}(1)[(R)_{1,1,1}] & & (1)[(R)_{1,n,1}]\\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ (R)_{1,1,2} & \cdots\cdots & (R)_{1,n,2}\end{matrix}}{(R)_2}$$
$$\vdots$$

, wobei n die Zahl der Vorderregeln von R sei.

Es gilt also $\Gamma', (R)_{1,i,1} \vdash (R)_{1,i,2}$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$, d.h.

(1) $\quad \Gamma' \vdash (R)_{1,i} \qquad (1 \leq i \leq n)$.

Dabei sei $\{\Gamma'\} = \{\Gamma\} \cup M$, wobei M gerade die Regeln enthalte, die als Annahmen in dem angegebenen Ableitungsstück (*) auftreten, jedoch bei Regelanwendungen unterhalb von $(R)_2$ wieder gelöscht werden.

Weiterhin folgt aus der Voraussetzung $\Gamma \vdash R$:

$$\Gamma', (R)_1 \vdash (R)_2 \quad \text{, d.h.:}$$

(2) $\quad \Gamma', (R)_{1,1}, \ldots, (R)_{1,n} \vdash (R)_2$.

Durch n-fache Anwendung der Induktionsvoraussetzung bezüglich γ auf (1),(2) (da $(R)_{1,i}$ von kleinerer Stufe als R ist) erhält man:

$\Gamma' \vdash (R)_2$. Es gibt also eine Ableitung

$$\begin{matrix} + \\ \Gamma' + \\ + \\ + \\ (R)_2 \end{matrix} .$$

Sei Π' nun die Ableitung, die man aus Π erhält, wenn man obiges Ableitungsstück (*) durch

$$\begin{array}{c} + \\ \Gamma' \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \\ + \\ (R)_2 \\ \vdots \end{array}$$

ersetzt.

Dann ist Π' ebenfalls eine Ableitung von A aus Γ,R, da die in Γ' gegenüber Γ zusätzlich auftretenden Annahmen bei Regelanwendungen unterhalb von $(R)_2$ wieder gelöscht werden. Ferner enthält Π' eine freie Anwendung von R weniger als Π , da nach Wahl der betrachteten freien Anwendung von R in Π durch die Umformung keine neue freie Anwendung von R oberhalb von $(R)_2$ in Π' entstehen kann. Man kann also die Induktionsvoraussetzung bezüglich δ anwenden.

<u>QED</u>

<u>Satz 4.2</u> (Reflexivität von "$\vdash$") Sei R konkrete Regel. Dann $R \vdash R$ (d.h. $R,(R)_1 \vdash (R)_2$).

<u>Beweis</u> Induktion über der Stufe von R. Ist <u>R von 0. Stufe</u>, dann hat R die Gestalt A für eine Aussage A. $A \vdash A$ gilt jedoch trivialerweise.

<u>R habe Stufe >0</u>. Sei n die Anzahl der Vorderregeln von R. Die einzelnen Vorderregeln $(R)_{1,i}$ $(1 \leq i \leq n)$ von R haben niedrigere Stufe als R, nach Induktionsvoraussetzung gilt also für alle i mit $1 \leq i \leq n$: $(R)_{1,i},(R)_{1,i,1} \vdash (R)_{1,i,2}$.

Es gibt also für alle i $(1 \leq i \leq n)$ Ableitungen:

$$\begin{array}{c} (R)_{1,i} \quad \vdots \\ (R)_{1,i,1} \vdots \\ \vdots \\ (R)_{1,i,2} \end{array}$$

Daraus forme man die Ableitung:

$$(1)\, R \; \dfrac{\begin{array}{c} (R)_{1,1} \quad \vdots \\ (1)\, [(R)_{1,1,1}] \vdots \\ \vdots \\ (R)_{1,1,2} \end{array} \quad \cdots\cdots \quad \begin{array}{c} (R)_{1,n} \quad \vdots \\ (1)\, [(R)_{1,n,1}] \vdots \\ \vdots \\ (R)_{1,n,2} \end{array}}{(R)_2}$$

Es gilt also: $R,(R)_{1,1},\ldots,(R)_{1,n} \vdash (R)_2$, d.h.: $R,(R)_1 \vdash (R)_2$, d.h.: $R \vdash R$.

<u>QED</u>

Satz 4.3 Seien A,B,C Aussagen, Γ, Δ, Δ_1 Systeme konkreter Regeln:

(i) Wenn $\Gamma \vdash \Delta$ und $\Delta_1, \Delta \vdash A$, dann $\Gamma, \Delta_1 \vdash A$ (Δ nicht leer).

(ii) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \Gamma \vdash \Delta$ (Γ, Δ nicht leer).

(iii) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta \Rightarrow \Delta_1 \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta_1$ (Γ, Δ, Δ_1 nicht leer).

(iv) Wenn $\Delta \Rightarrow A \vdash B$, dann $\Delta, C \Rightarrow A; C \vdash B$ (Δ nicht leer).

Beweise Sofort aus den Sätzen 4.1, 4.2 und den oben S. 60 eingeführten abkürzenden Schreibweisen.

QED

Zum Beweis der folgenden Ersetzungstheoreme benötigen wir den Begriff der Komponente n-ten Grades eines Systems Δ von (nicht notwendigerweise konkreten) Regeln:

Alle Glieder von Δ sind Komponenten 0. Grades von Δ. Jedes Vorkommen einer Vorderregel einer Komponente n-ten Grades von Δ ist eine Komponente (n+1)-ten Grades von Δ.

Sei z.B. Δ das aus einer einzigen Regel 3. Stufe bestehende Regelsystem, wobei $X_1,\ldots,X_4,X$ Formeln sind:

$$X_1 \Rightarrow X_2; X_3 \dot{\Rightarrow} X_4 \,\ddot{;}\, X_1 \Rightarrow X_2 \ddot{\Rightarrow} X \quad .$$

Dann ist Δ die einzige Komponente 0. Grades von Δ. Die als Vorderregeln von Δ vorkommenden Regeln $X_1 \Rightarrow X_2; X_3 \dot{\Rightarrow} X_4$ und $X_1 \Rightarrow X_2$ sind die Komponenten 1. Grades von Δ. Die als Vorderregeln der Vorderregeln von Δ vorkommenden Regeln $X_1 \Rightarrow X_2$ und X_3 und X_1 sind die Komponenten 2. Grades von Δ. Die als Vorderregel der ersten Vorderregel der ersten Vorderregel von Δ vorkommende Regel X_1 ist die einzige Komponente 3. Grades von Δ. Man beachte dabei, daß sich die Definition von "Komponente" auf Regelvorkommen bezieht: X_1 kommt in Δ sowohl als Komponente 3. Grades, an anderer Stelle jedoch auch als Komponente 2. Grades von Δ vor. Ebenso kommt $X_1 \Rightarrow X_2$ einmal als Komponente 2. Grades, an anderer Stelle jedoch auch als Komponente 1. Grades von Δ vor.

Der Grad einer Komponente ist gewissermaßen eine Umkehrung der Stufe. Im vorliegenden Beispiel hat Δ Stufe 3, ist jedoch Komponente 0. Grades von sich selbst; X_1 hat Stufe 0, kommt jedoch an der linkesten Stelle von Δ als Komponente 3. Grades von Δ vor.

Satz 4.4 (Ersetzungstheorem I) Sei R konkrete Regel, Θ System konkreter Regeln. Sei $\Delta[R]$ System konkreter Regeln, in dem R als Komponente irgendeines Grades an einer Stelle vorkommt. Sei $\Delta[\Theta]$ das Resultat der Ersetzung dieses Vorkommens von R in $\Delta[R]$ durch Θ. Wenn gilt: $R \dashv\vdash \Theta$, dann gilt auch $\Delta[R] \dashv\vdash \Delta[\Theta]$.

Beweis Induktion über dem Grad, mit dem R als Komponente in $\Delta[R]$ auftritt.

Dieser Grad sei 0 . Dann hat $\Delta[R]$ die Gestalt:
$R_1,\ldots,R,\ldots,R_n$ (worin auch der Fall eingeschlossen sei, daß R an erster oder letzter Stelle steht, und der Fall wo $n=1$). Nach Voraussetzung gilt $R \vdash \Theta$, nach Satz 4.2 gilt: $R_i \vdash R_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Daraus folgt durch Verdünnung sofort:

$$\begin{array}{ccccccc} R_1, & \ldots, & R, & \ldots, & R_n & \vdash & R_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_1, & \ldots, & R, & \ldots, & R_n & \vdash & \Theta \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_1, & \ldots, & R, & \ldots, & R_n & \vdash & R_n \end{array} \quad .$$

Dies ist nun nach Definition gerade $\Delta[R] \vdash \Delta[\Theta]$.
Die andere Richtung folgt analog.

Dieser Grad sei >0. Dann hat $\Delta[R]$ die Gestalt:
$R_1,\ldots,R_i[R],\ldots,R_n$ (wobei wieder i auch 1 oder n sein kann). Aus Satz 4.2 folgt nun:

(3) $R_i[R],\ (R_i[R])_1 \vdash (R_i[R])_2$ $\qquad (1 \leq i \leq n)$

(4) $R_i[\Theta],\ (R_i[\Theta])_1 \vdash (R_i[\Theta])_2$ $\qquad (1 \leq i \leq n)$.

Da der Grad, mit dem R in $(R_i[R])_1$ vorkommt, kleiner ist als der, mit dem R in $\Delta[R]$ vorkommt, gilt nach Induktionsvoraussetzung:

(5) $(R_i[R])_1 \dashv\vdash (R_i[\Theta])_1$ $\qquad (1 \leq i \leq n)$.

Aus (5), (3), (4) folgt unter Benutzung der Transitivität von "$\vdash$" (Satz 4.1):

(6) $R_i[R], (R_i[\Theta])_1 \vdash (R_i[R])_2 \qquad (1 \leq i \leq n)$

(7) $R_i[\Theta], (R_i[R])_1 \vdash (R_i[\Theta])_2 \qquad (1 \leq i \leq n)$.

(6), (7) ist gerade die geforderte Behauptung, wenn man berücksichtigt, daß $(R_i[R])_2 \equiv (R_i[\Theta])_2 \quad (1 \leq i \leq n)$.

<u>QED</u>

Bezeichnet man diejenigen Aussagen, die selbst Komponente (irgendeines Grades) oder Hinterformel einer Komponente (irgendeines Grades) einer konkreten Regel R sind, als die <u>unmittelbaren Teilaussagen</u> von R, und seien die unmittelbaren Teilaussagen eines Systems Δ konkreter Regeln gerade die unmittelbaren Teilaussagen der Glieder von Δ , so gilt:

<u>Satz 4.5</u> (Ersetzungstheorem II) Sei A Aussage, Θ System konkreter Regeln. Sei $\Delta[A]$ System konkreter Regeln, in dem an einer Stelle die Aussage A als unmittelbare Teilaussage vorkommt. Sei $\Delta[\Theta]$ das Resultat der Ersetzung dieses Vorkommens von A in $\Delta[A]$ durch Θ (wobei, falls A Hinterformel einer Komponente $\Gamma \Rightarrow A$ von $\Delta[A]$ ist, $\Gamma \Rightarrow \Theta$ im Sinne der Konvention von S. 60 zu verstehen sei). Dann gilt: Wenn $A \dashv\vdash \Theta$, dann $\Delta[A] \dashv\vdash \Delta[\Theta]$.
Insbesondere gilt also für eine Aussage B: Wenn $A \dashv\vdash B$, dann $\Delta[A] \dashv\vdash \Delta[B]$.

<u>Beweis</u> Wenn A selbst Komponente (irgendeines Grades) von $\Delta[A]$ ist, dann folgt die Behauptung aus der von Satz 4.4. Wenn A Hinterformel einer Komponente von $\Delta[A]$ ist, gibt es ein System konkreter Regeln Γ , so daß $\Gamma \Rightarrow A$ Komponente von $\Delta[A]$ ist, $\Delta[A]$ also die Gestalt $\Delta[\Gamma \Rightarrow A]$ hat, wobei $\Gamma \Rightarrow A$ als Komponente in $\Delta[\Gamma \Rightarrow A]$ vorkommt. Durch Anwendungen der Voraussetzung $A \dashv\vdash \Theta$ und von Satz 4.3 (iii) ergibt sich $\Gamma \Rightarrow A \dashv\vdash \Gamma \Rightarrow \Theta$. Daraus mit Satz 4.4 die Behauptung.

<u>QED</u>

Kapitel 2: Positive Junktorenlogik

§ 5. Erweiterung von Kalkülen um Aussagenoperatoren

Wir gehen in diesem Kapitel von einem beliebigen Kalkül K der in § 3 geschilderten Art aus, den wir aussagenlogisch erweitern wollen und der deshalb ab jetzt auch "Grundkalkül" heißt.[1] Wir erweitern zunächst in irgendeiner Weise das Vokabular von K um endlich viele neue Atome, die wir "Aussagenoperatoren" oder kurz "Operatoren" nennen und die wir metasprachlich durch "S", "S'", "S_1", "S_2", ... mitteilen. Außerdem sollen die Klammern "(", ")" und das Komma "," weitere neue Atome bezeichnen.[2] Dabei soll jedem Operator eindeutig eine positive natürliche Zahl als Stellenzahl zugeordnet sein.[3] Ist Ω ein System $S_1 \ldots S_\ell$ von solchen Operatoren, so sollen die Atome von K – erweitert um $S_1,\ldots,S_\ell$,(,) und das Komma , – gerade die Atome des Kalküls K_Ω sein. Wir wollen auch den Grenzfall zulassen, daß Ω leer ist; wir schreiben dann: $K_\emptyset$.

Wir setzen voraus, daß die Zeichen $S_1,\ldots,S_\ell$,(,),, in keinem der betrachteten Grundkalküle selbst schon als Atome vorkommen, so daß man also statt K_Ω auch K'_Ω bilden kann für einen anderen Grundkalkül K'. Dies ist keine wesentliche Voraussetzung. Man kann $S_1,\ldots,S_\ell$,(,) und , auch als schematische Zeichen ansehen, denen in K_Ω und K'_Ω verschiedene Realisierungen als Atome entsprechen. So würden diesen Zeichen in K'_Ω andere Atome als in K_Ω entsprechen, wenn z.B. alle K_Ω-Atome auch K'-Atome wären. Eine Kalkülbildung $(K_\Omega)_\Omega$ wäre damit sinnvoll. Wir

=============

1) Zur Motivation einer solchen Erweiterung wird in § 6 noch einiges gesagt.

2) Im Fall des Kommas "," ist es dabei mißlich, daß dieses gleichzeitig in die Schreibweise für Kalkülregeln eingeht und auch sonst in der Metasprache häufig verwendet wird. Es geht jedoch immer aus dem Zusammenhang vor, wie es gemeint ist.

3) Wir behandeln also vorerst nur Operatoren positiver Stellenzahl. 0-stellige Operatoren werden wir in § 10 hinzunehmen.

sparen uns jedoch diesen Abstraktionsschritt, tun also so, als hätten wir einen festen Bereich von Grundkalkülen vor uns, so daß wir Operatoren sowie Klammern und Komma von vornherein verschieden von <u>allen</u> in Grundkalkülen vorkommenden Atomen wählen können.

Weiterhin nehmen wir an, daß außer den Operatoren aus Ω beliebig viele weitere , von allen Atomen der betrachteten Grundkalküle verschiedene, Operatoren jeder Stellenzahl >0 vorhanden sind, so daß wir von K_Ω zu Kalkülen $K_{\Omega'}$ übergehen können, wobei Ω Teilsystem von Ω'. Wir tun so, als hätten wir ein festes Repertoire von Operatoren - unendlich viele zu jeder Stellenzahl -, aus dem wir dann unsere endlichen Systeme $S_1 \ldots S_\ell$ zusammenstellen. Falls Ω ein System $S_1 \ldots S_\ell$ ist, soll ΩS das System $S_1 \ldots S_\ell S$ bezeichnen. Entsprechend sind Schreibweisen wie $SS'\Omega$ oder $\Omega SS'$ zu verstehen.

Alle K-Objektvariablen seien auch K_Ω-Objektvariablen. Damit sind alle K-Ausdrucksformen bzw. K-Ausdrücke auch K_Ω-Ausdrucksformen bzw. K_Ω-Ausdrücke. Eine K_Ω-Objektvariable, die zugleich K-Objektvariable ist, soll in K_Ω denselben Variabilitätsbereich haben, den sie in K hatte, also weiterhin für die (und <u>nur</u> für die) K-Aussagen (und damit zugleich K_Ω-Aussagen) stehen, für die sie in K stand. Dies hat z.B. zur Konsequenz, daß - falls Ω nicht leer - K-Aussagenvariable keine K_Ω-Aussagenvariable sind. Denn wenn der Variabilitätsbereich einer K-Objektvariablen gerade die Menge der K-Aussagen ist, fällt er nicht mit der Menge der K_Ω-Aussagen zusammen, da letztere bei nichtleerem Ω eine echte Obermenge der Menge der K-Aussagen ist. K-Aussagenvariable stehen also in K_Ω nur für solche K_Ω-Aussagen, die zugleich K-Aussagen sind, nicht für beliebige K_Ω-Aussagen.

Außer K-Objektvariablen besitze K_Ω eine entscheidbare unendliche Menge zusätzlicher Objektvariablen, die wir mit "p", "p_1", "p_2",...,"q", "q_1", "q_2",...,"r", "r_1", "r_2",... mitteilen. Der Variabilitätsbereich dieser Objektvariablen sei die in folgender Weise induktiv definierte Menge $\mathfrak{A}$:

1) Jede K-Aussage gehört zu $\mathfrak{A}$.
2) Gehören $A_1,\ldots,A_n$ zu $\mathfrak{A}$, dann gehört auch $S(A_1,\ldots,A_n)$ zu $\mathfrak{A}$ für jeden Operator S aus Ω der Stellenzahl n.

Die K_Ω-Formeln definieren wir induktiv so:

1) Jede K-Formel ist K_Ω-Formel.
2) Jede K_Ω-Objektvariable, die nicht K-Objektvariable ist, ist K_Ω-Formel.
3) Sind $X_1,\ldots,X_n$ K_Ω-Formeln, dann ist auch $S(X_1,\ldots,X_n)$ eine K_Ω-Formel für jeden Operator S aus Ω der Stellenzahl n.

Aus beiden induktiven Definitionen ersieht man sofort, daß für jede Belegung β der in einer K_Ω-Formel X vorkommenden K_Ω-Objektvariablen die K_Ω-Ausdrucksform X^β wieder eine K_Ω-Formel ist. Ferner sieht man, daß die Menge der K_Ω-Aussagen (d.h. die K_Ω-Formeln ohne K_Ω-Objektvariablen) mit $\mathfrak{A}$ zusammenfällt. Deshalb können wir die K_Ω-Objektvariablen, die nicht K-Objektvariable sind, auch K_Ω-Aussagenvariable nennen. Die K_Ω-Objektvariablen bestehen also aus K-Objektvariablen und K_Ω-Aussagenvariablen.[1)]

==========

1) Es ist wesentlich, daß man in den erweiterten Kalkülen neue Aussagenvariable einführt. LORENZEN (1955) tut dies nicht, sondern verwendet die in K vorkommenden Aussagenvariablen wieter zur Formulierung seiner Konjunktions- und Adjunktionsregeln. Das führt bei LORENZEN zu der falschen Behauptung, die $\vee$-Regel (*) $a \Rightarrow a\vee b$ sei relativ zulässig bzgl. der Klasse der Aussagen ohne $\vee$ (bezogen auf einen beliebigen Kalkül K), da in ihrer Hinterformel stets $\vee$ vorkomme (LORENZEN 1955, S. 60 oben). Diese Argumentation ist fehlerhaft: Der Kalkül K habe +,o als Atome und a,b als Aussagenvariable, wobei alle Ausdrücke als Aussagen zählen sollen. Die Grundregeln von K seien:

(R_1) $+$
(R_2) o
(R_3) $a \Rightarrow a+$
(R_4) $ab \Rightarrow b$

Offensichtlich gilt: $\not\vdash_K oo$, jedoch gilt auch: $\vdash_{K+(*)} oo$ - wobei K+(*) der um (*) als Grundregel erweiterte Kalkül sei -, wie man aus folgender Ableitung ersieht:

$$\begin{array}{ll} R_1 & \overline{\qquad} \\ & \quad + \\ (*) & \overline{\qquad} \\ & +\vee oo \\ R_4 & \overline{\qquad} \\ & \quad oo \end{array}$$

.

Da K_Ω auch ein Kalkül in Sinne des § 3 sein soll, ist damit - abgesehen von der Angabe der K_Ω-Grundregeln - alles festgelegt. K_Ω-Aussagen der Gestalt $S(A_1,\ldots,A_n)$ heißen auch Operate bzw., wenn man auf den am Beginn stehenden Operator S hinweisen will, S-Operate (leider keine schönen Wörter). In K_ϕ gibt es keine Operate, hier fallen K_ϕ-Aussagen mit K-Aussagen zusammen (jedoch nicht K_ϕ-Formeln und -Regeln mit K-Formeln und-Regeln!). K_Ω-Formeln bzw. -Aussagen bzw. -Regeln, die zugleich K-Formeln bzw. -Aussagen bzw. -Regeln sind, heißen jetzt atomare K_Ω-Formeln bzw. -Aussagen bzw. -Regeln.

Eine nichtatomare K_Ω-Regel, die kein K-Atom und keine K-Objektvariable enthält, heiße auch Ω-Regel. Offensichtlich ist dies unabhängig vom betrachteten Grundkalkül, d.h. eine Ω-Regel bleibt Ω-Regel, wenn man von K zu einem anderen Grundkalkül K' übergeht. Ω-Regeln sind z.B. $p \Rightarrow q \dot{\Rightarrow} q$ oder $S(p_1,p_2) \Rightarrow S'(p_1,p_2,p_3)$, falls S und S' zu Ω gehören. $p \Rightarrow q \dot{\Rightarrow} q$ ist dabei auch eine

============

Die Hinzunahme von (*) macht also oo ableitbar, obwohl oo das Zeichen $\vee$ nicht enthält. (Den Hinweis darauf verdanke ich C. Grob und P. Georgii.) Dies kann offensichtlich nicht mehr auftreten, wenn man den Variabilitätsbereich von a, b unverändert läßt und stattdessen neue Variable p, q zur Formulierung der Regel (*) verwendet. Denn dann kann die Regel R_4 (die beliebige Ausdruckskürzungen erlaubt), gar nicht mehr auf Ausdrücke angewendet werden, die $\vee$ enthalten. - In der 2. Auflage der "Operativen Logik" von 1969 findet sich gegenüber der 1. Auflage auf S. 56 oben eine Korrektur, in der LORENZEN vorschlägt, nur noch solche Regeln zu betrachten, bei denen jede Variable einer Vorderformel in der Hinterformel vorkommt. Damit entkommt man natürlich der beschriebenen Schwierigkeit, da dann abbauende Regeln wie R_4 nicht mehr zugelassen werden. Dieser Vorschlag ist jedoch nicht plausibel, da es triftige Gründe dafür gibt, abbauende Regeln zuzulassen; man denke z.B. an $\wedge$-Beseitigungsregeln $a \wedge b \Rightarrow a$ etc. - Neue Variable p, q für um Junktoren erweiterte Kalküle führt auch HERMES 1959 (S. 67) ein. Bei HERMES sind p, q im Gegensatz zur obigen Fassung jedoch Eigenvariable; außerdem benutzt HERMES eine Variable a, deren Variabilitätsbereich die nicht unbedingt entscheidbare Menge der im Grundkalkül K ableitbaren Aussagen ist, während wir nur entscheidbare Mengen als Variabilitätsbereiche zulassen wollten.

$\emptyset$-Regel, da in ihr kein Operator vorkommt. Ω-Regeln 0. Stufe heißen auch <u>Ω-Formeln</u>.

Was noch fehlt in der Definition von K_Ω ist die Auszeichnung gewisser K_Ω-Regeln als <u>K_Ω-Grundregeln</u>. Zunächst sollen alle K-Grundregeln auch K_Ω-Grundregeln sein und dann <u>atomare</u> K_Ω-Grundregeln heißen. Zur Charakterisierung der nichtatomaren K_Ω-Grundregeln müssen einige Erörterungen vorweggeschickt werden.

Während an die atomaren K_Ω-Grundregeln (d.h. die K-Grundregeln) keine besonderen Anforderungen gestellt werden - diese repräsentieren sozusagen die materiale Basis, die von Kontext zu Kontext wechseln kann -, haben die nichtatomaren K_Ω-Grundregeln eine bestimmte Aufgabe: Sie sollen die Bedeutung der in ihnen auftretenden Operatoren festlegen. Unser regellogisches Programm ist es, die nichtatomaren K_Ω-Grundregeln so zu formulieren, daß man von den zu Ω gehörenden Operatoren sagen kann, daß sie durch diese K_Ω-Grundregeln eine Bedeutung erlangen.

Unter der <u>Bedeutung</u> eines Operators S aus Ω in K_Ω verstehen wir dabei die Menge der K_Ω-Ableitungsbeziehungen, in denen S vorkommt, d.h. die Menge der $\Gamma \Vdash A$, in denen S auftritt und für die eine von $\{\Gamma\}$ abhängige K_Ω-Ableitung von A existiert. Bei diesem Sinn von "Bedeutung" ist allerdings noch keine nichtatomare K_Ω-Grundregel vonnöten, damit die Bedeutung von S nicht leer ist. Denn offensichtlich ist z.B.

$$S(A_1,\ldots,A_n) \frac{\qquad\qquad}{S(A_1,\ldots,A_n)}$$

für beliebige atomare Aussagen $A_1,\ldots,A_n$ eine von $\{S(A_1,\ldots,A_n)\}$ abhängige Ableitung von $S(A_1,\ldots,A_n)$, in der überhaupt keine (geschweige denn eine nichtatomare) K_Ω-Grundregel verwendet worden ist (vorausgesetzt, die Menge der K-Aussagen ist nicht leer.) Nun ist eine solche Ableitungsbeziehung wie $S(A_1,\dots,A_n) \| S(A_1,\dots,A_n)$ nicht spezifisch für S; man kommt für ein von S verschiedenes S' aus Ω auf analoge Weise zu $S'(A_1,\dots,A_n) \| S'(A_1,\dots,A_n)$. Ableitungsbeziehungen, die für S spezifisch sind, erhält man offensichtlich nur durch K_Ω-Grundregeln, in denen S vorkommt.

Solche nichtatomaren K_Ω-Grundregeln sollen nicht beliebig sein. Zunächst wollen wir ihre bedeutungsverleihende Funktion so verstanden wissen, daß sie unabhängig vom zugrundeliegenden Grundkalkül K den Operatoren aus Ω eine Bedeutung geben. Deshalb verlangen wir, daß die nichtatomaren K_Ω-Grundregeln Ω-Regeln sind. Denn würde in den nichtatomaren K_Ω-Grundregeln ein K-Atom oder eine K-Objektvariable vorkommen, so könnten wir diese K_Ω-Grundregeln nicht auch als nichtatomare K'_Ω-Grundregeln für einen beliebigen anderen Grundkalkül K' deuten, da K-Atome oder -Objektvariable nicht auch K'-Atome oder -Objektvariable sein müssen.

Den Ansatz, Bedeutung von Operatoren durch Ω-Regeln zu charakterisieren, könnte man nun so durchführen, daß man einfach ein System von Ω-Regeln zu K_Ω-Grundregeln erklärt und die Operatoren aus Ω durch dieses System als implizit definiert ansieht. Um dabei nicht jede Regelmenge, in der ein Operator auftritt, als adäquate Bedeutungsfestlegung für den Operator auffassen zu müssen, wird man gewisse Kriterien aufstellen, die zulässige von unzulässigen Regelsystemen unterscheiden und das angegebene Regelsystem als zulässig nachzuweisen versuchen.

Auf diese Weise ein spezielles Regelsystem als zulässig zu erweisen, wäre jedoch ein ad-hoc-Vorgehen, da es auf die speziellen Operatoren, die zu Ω gehören, beschränkt bliebe. Es wäre sinnvoll, wenn es nur um die Bedeutungsfestlegung spezieller Operatoren, etwa $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ginge. Wir wollen uns jedoch ein höheres Ziel setzen: Es soll nicht nur den Operatoren aus einem bestimmten System Ω eine

Bedeutung verschafft werden, sondern wir wollen allgemein angeben, wie man den Operatoren eines <u>beliebigen</u> Systems Ω Bedeutung geben kann.

Angenommen, wir hätten schon Ω-Regeln zur Bedeutungsfestlegung der Operatoren $S_1,\ldots,S_\ell$ aus Ω als nichtatomare K_Ω-Grundregeln gewählt. Wenn wir nun $\Omega S_{\ell+1}$-Regeln zur Bedeutungsfestlegung der Operatoren $S_1,\ldots,S_\ell,S_{\ell+1}$ des erweiterten Systems $\Omega S_{\ell+1}$ angeben wollen, dann erwarten wir natürlich, daß der Kalkül $K_{\Omega S_{\ell+1}}$ eine Erweiterung von K_Ω ist, daß also alle in K_Ω ableitbaren K_Ω-Regeln auch in $K_{\Omega S_{\ell+1}}$ ableitbar sind. Denn an der Bedeutung von $S_1,\ldots,S_\ell$ soll nichts verloren gehen, wenn man einen zusätzlichen Operator zur Verfügung hat. Dies wird am einfachsten dadurch gewährleistet, daß alle K_Ω-Grundregeln auch $K_{\Omega S_{\ell+1}}$-Grundregeln sind, daß also die $\Omega S_{\ell+1}$-Regeln zur Bedeutungsfestlegung von $S_1,\ldots,S_\ell,S_{\ell+1}$ einfach aus den Ω-Regeln zur Bedeutungsfestlegung von $S_1,\ldots,S_\ell$ bestehen, erweitert um $\Omega S_{\ell+1}$-Regeln, die für die Bedeutungsfestlegung von $S_{\ell+1}$ zuständig sind. Dies hätte auch den Vorteil, daß Kalküle K_Ω 'offene' Systeme sind, die durch einfaches Adjungieren von Grundregeln zu Kalkülen mit zusätzlichen Aussagenoperatoren gemacht werden können, also beliebig erweiterbar sind, ohne daß an vorherigen Deduktionen etwas geändert werden müßte. In diesem Sinne können wir sagen, daß wir die potentielle Unendlichkeit 'aller' Aussagenoperatoren erfassen.

An ein System von Ω-Regeln zur Bedeutungsfestlegung von Operatoren $S_1,\ldots,S_\ell$ werden wir also die weitere Anforderung stellen, daß es jederzeit erweiterbar ist um Bedeutungsregeln, die einen zusätzlichen Operator $S_{\ell+1}$ betreffen, derart, daß das so erweiterte System als Bedeutungsfestlegung für $S_1,\ldots,S_\ell,S_{\ell+1}$ aufgefaßt werden kann. Es soll nicht so sein, daß man zur Einführung eines neuen Operators $S_{\ell+1}$ ein ganz neues Regelsystem für $S_1,\ldots,S_{\ell+1}$ aufstellen muß, sondern daß dies durch Hinzunahme gewisser, $S_{\ell+1}$ betreffender, Regeln zu dem schon bestehenden System für $S_1,\dots,S_\ell$ geschehen kann. Unser allgemeines Schema für Bedeutungsregeln von Operatoren wird also ein Schema für Bedeutungsregeln <u>eines einzigen</u> Operators sein, so daß man durch Zusammenfügung solcher dem Schema genügender Systeme - die wir <u>Operator-Grundregelsysteme</u> nennen wollen - ein Regelsystem zur Bedeutungsfestlegung der Operatoren aus Ω erhält. Ein solches System der zu einem Operator S gehörenden Bedeutungsregeln nennen wir auch System der S-Grundregeln oder S-Grundregelsystem und bezeichnen es mit Σ_S.

Nach obigen Bemerkungen sollen die nichtatomaren $K_{\Omega S_{\ell+1}}$-Grundregeln bestehen aus den K_Ω-Grundregeln, ergänzt um $\Sigma_{S_{\ell+1}}$. Rekursiv weiter zurückgehend, erhält man auf analoge Weise:

Die nichtatomaren -Grundregeln sollen bestehen aus den	K_Ω	$K_{S_1\dots S_{\ell-1}}$-Grundregeln,	ergänzt	um	Σ_{S_ℓ}.
"	$K_{S_1\dots S_{\ell-1}}$	$K_{S_1\dots S_{\ell-2}}$-	"	"	$\Sigma_{S_{\ell-1}}$.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
"	$K_{S_1 S_2}$	K_{S_1}-	"	"	Σ_{S_2}.
"	K_{S_1}	K_ϕ-	"	"	Σ_{S_1}
			(d.h. aus Σ_{S_1}).		

Die den Operatoren aus Ω zugeordneten Grundregelsysteme $\Sigma_{S_1},\dots,\Sigma_{S_\ell}$ dürfen also schon, was das Vokabular betrifft, nicht beliebige Ω-Regeln sein: Damit Σ_{S_1} als System von K_{S_1}-Grundregeln aufgefaßt werden kann, darf in Σ_{S_1} <u>nur</u> S_1 als Operator auftreten, denn andere Operatoren gehören nicht zu den Atomen von K_{S_1}. Allgemeiner: Damit Σ_{S_i} ($1 \leq i \leq \ell$) auch als System von $K_{S_1 \ldots S_i}$-Grundregeln aufgefaßt werden kann, dürfen in Σ_{S_i} <u>nur</u> $S_1, \ldots, S_i$ als Operatoren auftreten. Um diese Einschränkung exakt zu erfassen, definieren wir:

Sei Ω das System von Operatoren $S_1 \ldots S_\ell$. Eine Folge $\Delta_1, \ldots, \Delta_\ell$ von Systemen von Ω-Regeln heißt <u>methodisch zulässig für Ω</u>, falls für jedes i ($1 \leq i \leq \ell$) in Δ_i außer höchstens $S_1, \ldots, S_i$ kein Operator auftritt.

Wir wollen ab jetzt verlangen, daß die nichtatomaren K_Ω-Grundregeln aus Systemen $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ von Ω-Regeln bestehen, wobei die Folge $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ für Ω methodisch zulässig ist. Offensichtlich gilt, daß damit auch für jedes i ($1 \leq i \leq \ell$) die Folge $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_i}$ für $S_1 \ldots S_i$ methodisch zulässig ist.

Einen Operator S, dem ein S-Grundregelsystem Σ_S zugeordnet ist, nennen wir auch einen <u>Junktor</u>, falls Σ_S für das nur aus S bestehende Operatorensystem methodisch zulässig ist, falls also Σ_S außer S keinen Operator enthält. Insbesondere muß S_1 ein Junktor sein, falls $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ für $S_1 \ldots S_\ell$ methodisch zulässig ist. Junktoren sind Operatoren, deren Bedeutung nicht notwendigerweise zusammen mit anderen Operatoren festgelegt wird, die also in diesem Sinne von anderen Operatoren unabhängig sind. Eines der Hauptresultate dieser Arbeit wird sein, daß sich alle Operatoren durch Junktoren - genauer: durch spezielle Standardjunktoren $\wedge, \vee, \Rightarrow$ bzw. (in Kap. 3, wo wir einen Widerlegungsbegriff einführen) $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ - definieren lassen.

Eine für Ω methodisch zulässige Folge $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ ist so geordnet, daß Operatoren <u>schrittweise</u> eingeführt werden: Für jedes i ($1 \leq i \leq \ell$) wird durch Σ_{S_i} nur S_i als neuer Operator eingeführt. Alle anderen in Σ_{S_i} vorkommenden Operatoren sind vorher schon eingeführt, gehören also zum System $S_1 \ldots S_{i-1}$. Bei der Hinzunahme von Σ_{S_i} zu $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_{i-1}}$

wird allerdings nicht nur zusätzlich S_i eine Bedeutung gegeben, sondern auch die Bedeutung von $S_1,\dots,S_{i-1}$ erweitert: Sei R eine Regel aus Σ_{S_i}, β eine Belegung von R, die eine Aussagenvariable in R mit einem S_j-Operat ($j < i$) belegt. Dann ist R^β ableitbar nach Hinzunahme von Σ_{S_i}, jedoch gewöhnlich nicht ableitbar ohne Σ_{S_i}.

Deshalb kann man die Bedeutungsfestlegung der Operatoren $S_1,\dots,S_\ell$ nicht soweit trennen('separieren'), daß Σ_{S_i} nur für die Bedeutung von S_i zuständig ist. Man kann jedoch eine möglichst weitgehende Separierung verlangen: Wenn schon Σ_{S_i} die Bedeutung der vorher eingeführten Operatoren $S_1,\dots,S_{i-1}$ erweitert, so soll dies nur dann geschehen, wenn damit zugleich ein Beitrag zur Bedeutungsfestsetzung von Σ_{S_i} geleistet wird. Σ_{S_i} soll 'primär' der Bedeutungsfestlegung von S_i dienen; die Bedeutungserweiterung von $S_1,\dots,S_{i-1}$ soll nur ein 'Nebeneffekt' der Bedeutungsfestlegung von S_i sein. Σ_{S_i} soll nur im Rahmen der Bedeutungsfestlegung von S_i die Bedeutung von $S_1,\dots,S_{i-1}$ erweitern.

Dies können wir so präzisieren: Sei K^i_Ω derjenige Kalkül, der das Vokabular von K_Ω, jedoch nur $\Sigma_{S_1},\dots,\Sigma_{S_i}$ als nichtatomare Grundregeln hat.[1] In K^i_Ω sind also erst die Operatoren $S_1,\dots,S_i$ durch Grundregelsysteme eingeführt, für die Operatoren $S_{i+1},\dots,S_\ell$ sind noch keine Grundregeln angegeben. K^o_Ω sei der Kalkül, der sich von K_Ω durch das Fehlen aller nichtatomaren Grundregeln unterscheidet.

Eine Regel R wird in einer von M abhängigen Ableitung Π von A wesentlich angewendet, wenn sich Π nicht in eine Ableitung Π' von A umformen läßt, die von einer Annahmenmenge N mit $N \subseteq M$ abhängt, in der keine Anwendung von R vorkommt. Dann fordern wir: Jede K^i_Ω-Ableitung Π, in der eine Regel aus Σ_{S_i} wesentlich angewendet wird, leistet einen Beitrag zur Bedeutungsfestsetzung von S_i. Da wir unter der Bedeutung von S_i die Menge der Ableitungsbeziehungen verstehen, in denen S_i vorkommt, heißt das: Falls Π eine

============

1) Die Bezeichnung K^i_Ω benutzen wir im Anschluß an HINST (1974), S. 357.

von einer Annahmenmenge M abhängige Ableitung von A ist, in der mindestens eine Regel aus Σ_{S_i} wesentlich angewendet wird, dann muß S_i in einer Annahme aus M oder in A vorkommen. Dies folgt, wie man leicht sieht, aus der Bedingung:

(*) Sei Π eine K^i_Ω-Ableitung von A aus Γ, wobei S_i in A oder Γ nicht vorkommt. Dann läßt sich Π in eine K^{i-1}_Ω-Ableitung Π' von A aus Γ umformen.

Wenn (*) für jedes i ($1 \leq i \leq \ell$) erfüllt ist, sagen wir auch: Die Folge $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ ist <u>bezüglich K nichtkreativ</u>. Denn dann schafft jeweils K^i_Ω ($1 \leq i \leq \ell$) keine neuen Ableitungsbeziehungen außer solchen, die S_i enthalten.

Die Forderung der Nichtkreativität bzgl. K, die wir an $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ richten wollen, soll noch etwas verschärft werden. Oben hatten wir verlangt, daß Operator-Grundregelsysteme aus Ω-Regeln bestehen, d.h. aus Regeln, deren Formulierung vom vorausgesetzten Grundkalkül unabhängig ist. Dementsprechend können wir verschiedene Grundkalküle um dieselbe Folge von für Ω methodisch zulässigen Operator-Grundregelsystemen erweitern. Um diese Unabhängigkeit von speziellen Grundkalkülen auch für die Eigenschaft der Nichtkreativität zu sichern, ist es sinnvoll, sie bezüglich <u>beliebiger</u> Grundkalküle zu verlangen:

Eine für Ω methodisch zulässige Folge $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ von Operator-Grundregelsystemen heißt <u>nichtkreativ</u>, falls sie bezüglich jedes Grundkalküls K nichtkreativ ist.

Wir fordern also von einem Schema für Grundregelsysteme Σ_S:

Für jedes Ω und jede für Ω methodisch zulässige Folge von Operator-Grundregelsystemen $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ gilt: $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ ist nichtkreativ.

Bei der Motivierung der Forderung der Nichtkreativität sind wir davon ausgegangen, daß wir Operatoren in methodisch geordneten Schritten durch Regelsysteme einführen, so daß Σ_S nur dann als Grundregelsystem zugelassen ist,

wenn schon für die in $\leq_S$ außer S vorkommenden Operatoren S' Grundregelsysteme $\leq_{S'}$ vorhanden sind. Dementsprechend haben wir in (*) auch nur gefordert, daß sich eine K^i_Ω-Ableitung von A aus Γ in eine K^{i-1}_Ω-Ableitung von A aus Γ umformen läßt, falls Γ und A S_i nicht enthalten, und nicht etwa die stärkere Bedingung: Jede K_Ω-Ableitung von R läßt sich umformen in eine K_Ω-Ableitung von R, die $\leq_{S_i}$ nicht benutzt. Diese Bedingung ließe sich nur dann erfüllen, wenn kein $\leq_{S_i}$ auf $\leq_{S_j}$ mit $j < i$ aufbauen dürfte, also alle Operatoren auch Junktoren wären. Denn daß in $\leq_{S_i}$ ein S_j für $j < i$ vorkommen darf, erlaubt es ja, daß Regeln aus $\leq_{S_j}$ wesentlich angewendet werden können zur Gewinnung von Ableitungsbeziehungen, in denen S_i, jedoch nicht S_j vorkommt.[1]) Wir lassen eine methodische Abhängigkeit zwischen Operatoren zu, insofern Operatoren andere Operatoren voraussetzen. Was wir jedoch nicht zulassen, ist eine Abhängigkeit in beiden Richtungen:
Wenn z.B. in $\leq_{S_2}$ der Operator S_1 vorkommt, also $\leq_{S_2}$ nur zusammen mit $\leq_{S_1}$ Grundregelsystem sein kann, darf nicht in $\leq_{S_1}$ auch S_2 vorkommen; $\leq_{S_1}$ muß dann für sich alleine Grundregelsystem sein können. Was wir ausschließen, ist eine <u>wechselseitige</u> Abhängigkeit von Operatoren.

Die Forderung der Nichtkreativität hatten wir so begründet, daß wir die Bedeutungsfestlegung von $S_1,\dots,S_\ell$ möglichst weitgehend 'separieren', d.h. auf Regelsysteme $\leq_{S_1},\dots,\leq_{S_\ell}$ für die einzelnen Operatoren verteilen wollten. Wenn die Bedeutung eines Operators S aus Ω weitestgehend durch ein S-Grundregelsystem $\leq_S$ festgelegt werden soll, dann ist es sinnvoll zu fordern, daß diese Festlegung <u>eindeutig</u>

============

1) Wenn z.B. $\leq_{S_i}$ nur die Regeln $S_j(p) \Rightarrow S_i(p)$ und $S_i(p) \Rightarrow S_j(p)$ enthält und man unter wesentlicher Verwendung einer Regel R aus $\leq_{S_j}$ ableiten kann: $S_j(A)$, so kann man in K^i_Ω ableiten: $S_i(A)$. Eine solche K^i_Ω-Ableitung von $S_i(A)$ würde R wesentlich anwenden.

ist, daß also ein Operator S' aus Ω, der dasselbe Grundregelsystem besitzt wie S, auch dieselbe Bedeutung hat wie S, d.h. dieselben Ableitungsbeziehungen erfüllt wie S.

Genauer: S,S' seien Operatoren aus Ω. Es liege der Fall vor, daß $\leqq_{S'}$ aus $\leqq_S$ hervorgeht durch Ersetzung aller Vorkommen von S durch S' und $\leqq_S$ aus $\leqq_{S'}$ durch Ersetzung aller Vorkommen von S' durch S. Sei R[S] eine beliebige konkrete K_Ω-Regel, in der an einer Stelle S vorkommt. R[S'] gehe aus R[S] durch Ersetzung dieses Vorkommens von S durch S' hervor. Dann soll gelten:

$$\vdash_{K_\Omega} R[S] \quad \text{genau dann, wenn} \quad \vdash_{K_\Omega} R[S']\ .$$ 1)

Wäre dies nicht der Fall, so müßte man Grundregelsysteme für von S und S' verschiedene Operatoren für die Unterschiedlichkeit der Bedeutung von S und S' verantwortlich machen, entgegen der Forderung möglichst weitgehender Separierung der Beiträge verschiedener Regelsysteme zur Bedeutungsfestlegung verschiedener Operatoren.

Wir nennen ein S-Grundregelsystem $\leqq_S$ eindeutig, wenn für jeden Grundkalkül K und jede für Ω methodisch zulässige Folge $\leqq_{S_1}, \ldots \leqq_{S_e}$ gilt:
Falls S und S' zu Ω gehören, ferner $\leqq_{S'}$ aus $\leqq_S$ durch Substitution von S durch S' und $\leqq_S$ aus $\leqq_{S'}$ durch Substitution von S' durch S hervorgeht, dann gilt für jede konkrete K_Ω-Regel R[S], in der S an einer Stelle vorkommt:

$$\vdash_{K_\Omega} R[S] \quad \textbf{genau dann, wenn} \quad \vdash_{K_\Omega} R[S']\ .$$

============

1) Man beachte, daß dies gleichwertig ist mit: $R[S] \dashv\vdash_{K_\Omega} R[S']$.
Denn es muß auch gelten:

$\vdash_{K_\Omega} R[S] \Rightarrow R[S]$ g. d. w. $\vdash_{K_\Omega} R[S] \Rightarrow R[S']$

d.h. $R[S] \vdash_{K_\Omega} R[S]$ g. d. w. $R[S] \vdash_{K_\Omega} R[S']$

d.h. $R[S] \vdash_{K_\Omega} R[S']$ (mit Satz 4.2). Analog folgt die Umkehrung.
Weiterhin ist gleichwertig die Bedingung, die man erhält, wenn man für R[S] und R[S'] beliebige, nicht notwendigerweise konkrete, Regeln zuläßt, da die Ableitbarkeit nichtkonkreter Regeln auf die Ableitbarkeit konkreter Regeln zurückgeführt wird. (s.o. S. 61).

Wir fordern also: Jedes Operator-Grundregelsystem ist eindeutig.

Unsere in diesem §en aufgestellten Forderungen zusammenfassend, suchen wir also ein Schema für eindeutige Operator-Grundregelsysteme Σ_S, so daß jede für ein beliebiges Operatorensystem Ω methodisch zulässige Folge von solchen Operator-Grundregelsystemen $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ nichtkreativ ist.[1]

Es war beim Aufstellen dieser Forderungen nur unsere Absicht, sie zu motivieren als sinnvolle Forderungen, also zu zeigen, daß sie nicht willkürlich sind. Wir wollten sie nicht rechtfertigen als Forderungen, die man stellen <u>muß</u>. Die Möglichkeit, schwächere Forderungen zu stellen, bleibt offen. Da jedoch das im nächsten §en angegebene Schema für Operator-Grundregelsysteme unseren Forderungen genügt, ist die Frage nach solchen Abschwächungen müßig.

===============

1) BELNAP (1962) hat meines Wissens erstmals versucht, Nichtkreativität (er spricht von Konservativität) und Eindeutigkeit als Adäquatheitsbedingung für Operator-Grundregelsysteme zu rechtfertigen, in Antwort auf PRIOR (1960), der den Ansatz einer Regelsemantik grundsätzlich kritisiert hatte mit dem Argument, in einer solchen Semantik könne man beliebige Regeln als Bedeutungsregeln aufstellen. Auch ZUCKER/TRAGESSER (1978) greifen auf die Kriterien von BELNAP zurück, bei ihnen ist jedoch nicht ganz klar, ob sie diese als Adäquatheitsbedingungen für Operator-Grundregelsysteme oder als 'nachträglich' gefundene Eigenschaften von solchen Systemen betrachten.

§ 6. Einführungs- und Beseitigungsregeln als Operator-Grundregeln

Wir haben Bedingungen formuliert, denen ein noch aufzustellendes Schema für Operator-Grundregelsysteme Σ_S genügen soll. Ein solches Schema muß nun angegeben werden. Die Bedingungen aus § 5 zeichnen es noch nicht eindeutig aus, sie sind nur notwendige Bedingungen. Um die Wahl eines bestimmten Schemas zu begründen, müssen wir zusätzliche Überlegungen anstellen.

Es wäre eine naheliegende Idee, Operate einfach als Abkürzungen für Systeme konkreter Regeln aufzufassen, d.h. Operatoren durch Explizitdefinitionen einzuführen. So könnte man als Schema für ein Operator-Grundregelsystem Σ_S angeben:

(1) $\quad S(p_1,\ldots,p_n) \Longleftrightarrow \Delta(p_1,\ldots,p_n)$

(wie dies zu lesen ist, wurde oben S. 60 gesagt). Dabei sei $\Delta(p_1,\ldots,p_n)$ ein System von Ω-Regeln, das genau $p_1,\ldots,p_n$ an Aussagenvariablen enthält und S ein n-stelliger Operator. S soll in $\Delta(p_1,\ldots,p_n)$ nicht vorkommen. Es läßt sich zeigen, daß für eine solche Explizitdefinition die Kriterien der Nichtkreativität und Eindeutigkeit erfüllt sind.[1] Weiterhin läßt sich mit Satz 4.5 die Eliminierbarkeit von S aus allen konkreten K_Ω-Regeln zeigen, so daß es wirklich berechtigt ist, (1) als eine Abkürzungszwecken dienende Explizitdefinition aufzufassen.

Diesem Vorschlag wollen wir uns jedoch nicht anschließen, d.h. wir machen uns nicht die These zu eigen, Bedeutungsfestlegung könne nur durch Explizitdefinitionen geleistet werden, die nichtkreativ sind und deren Definiens eliminierbar ist. Stattdessen wollen wir einen Aspekt hervorheben, der bei Explizitdefinitionen eine wichtige Rolle spielt, durch die Eliminierbarkeitsforderung jedoch stark in den Hintergrund gedrängt wird und der uns schließlich auch

==========

1) Dies wollen wir jetzt nicht ausführen, da der Fall (1) von unserem endgültigen Schema (8) umfaßt wird, für das in § 7 Nichtkreativität und Eindeutigkeit bewiesen wird.

von Explizitdefinitionen der Gestalt (1) zu einer allgemeineren Form von Bedeutungsfestlegung führen wird.

Wenn man von Explizitdefinitionen verlangt, daß ihr Definiens eliminierbar sein muß, so begründet man dies oft damit, daß Explizitdefinitionen als Abkürzungen aufgefaßt werden können und Abkürzungen immer durch den abgekürzten Ausdruck ersetzbar seien. Die Charakterisierung von Explizitdefinitionen als bloßen Abkürzungen trifft jedoch nur einen Teil dessen, was man mit solchen Definitionen intendiert. Das Interesse an Explizitdefinitionen besteht nicht nur darin, eine schon aufgestellte Theorie kürzer zu gestalten, indem man nachträglich in ihr auftretende komplexe Ausdrücke durch kürzere ersetzt. Nicht weil eine Theorie faktisch zu lang ist, versucht man sie abzukürzen, sondern: weil ein komplexer Ausdruck einen für eine Theorie wichtigen Inhalt hat, kürzt man ihn ab, damit die Theorie übersichtlich wird. Das Abkürzen geschieht sozusagen "vor" dem Aufbau einer Theorie, da das, was man abkürzt, einen für den Aufbau der Theorie wichtigen Inhalt ausdrückt. Das Ziel von Explizitdefinitionen ist also nicht bloß die syntaktische Vereinfachung von Theorien, sondern auch der Ausdruck von Inhalten, die für den Aufbau einer Theorie bedeutsam sein können und für die deshalb ein Ausdruck zur Verfügung stehen soll.

Die Forderung der Eliminierbarkeit, die man nach PASCAL an Explizitdefinitionen stellt, besagt ja auch nicht, daß man in einer Theorie komplexe Ausdrücke durch kürzere (d.h. Definiens durch Definiendum) ersetzt, sondern umgekehrt, daß man - wenn man eine Theorie mit Hilfe von definierten Zeichen aufgebaut hat - diese definierten Zeichen nachträglich wieder durch komplexe Zeichen ersetzen kann. Das Interesse an Übersichtlichkeit von Theorien, das zu Explizitdefinitionen führt, ist also immer auch ein Interesse an der Hervorhebung gewisser Inhalte. Nachträgliche syntaktische Abkürzungen bestehender Theorien können auf vielerlei Weise vorgenommen werden; Explizitdefinitionen am 'Anfang' von Theorien haben die Funktion, kurze Ausdrücke für Inhalte zur Verfügung zu haben, damit die Theorie als etwas, was Beziehungen zwischen speziellen definitorisch gefaßten Inhalten formuliert, verständlich wird.

Gerade diese inhaltliche Interpretation von "Explizitdefinition" gibt nun einen Grund dafür ab, (1) als Schema für Explizitdefinitionen von aussagenlogischen Operatoren aufzufassen. Das zeigt sich, wenn wir den oben ohne Erläuterung verwendten Begriff des "Inhalts" in Bezug auf den vorliegenden Fall präzisieren. Wir schlagen vor, unter dem K_Ω-Gehalt eines Systems konkreter K_Ω-Regeln Δ die Menge der konkreten Regeln R zu verstehen, die in K_Ω aus Δ ableitbar sind (für die also gilt: $\Delta, (R)_1 \vdash_{K_\Omega} (R)_2$).[1] Wir verstehen damit "Gehalt" ähnlich wie Carnap in einem Definitionsvorschlag für den logischen Gehalt[2], nur daß es bei unserem erweiterten Kalkülbegriff immer um konkrete Regeln statt um Aussagen geht. "Gehalt" ist dabei zu unterscheiden von "Bedeutung". Von "Bedeutung" hatten wir nur im Zusammenhang von einzelnen Zeichen (z.B. Operatoren) gesprochen und darunter die Klasse der Ableitungsbeziehungen verstanden, in denen es vorkam. "Gehalt" ist für uns etwas, das ganzen Systmen konkreter Regeln zukommt.

Unter einer Explizitdefinition eines n-stelligen Operators S durch ein Regelsystem $\Delta(p_1,\dots,p_n)$ wollen wir nun ein Regelsystem verstehen, das jeder Aussage $S(A_1,\dots,A_n)$ genau denjenigen Gehalt verschafft, den $\Delta(A_1,\dots,A_n)$ hat, und zwar für beliebige Aussagen $A_1,\dots,A_n$. Dabei soll in $\Delta(p_1,\dots,p_n)$ natürlich S noch nicht vorkommen. Genauer: Durch eine Explizitdefinition von S durch $\Delta(p_1,\dots,p_n)$ soll gewährleistet sein, daß

===========

1) Wer den Begriff "Menge" hier ablehnt, kann dies auch als Definition eines Relators "R gehört zum K_Ω-Gehalt von Δ " verstehen.

2) Vgl. z.B. CARNAP(1942), S. 152.

$$(2)\begin{cases}\text{für alle } K_{\Omega}\text{-Aussagen } A_1,\ldots,A_n \text{ und für alle konkre-}\\ \text{ten } K_{\Omega}\text{-Regeln R gilt:}\\ \Delta(A_1,\ldots,A_n)\vdash_{K_{\Omega}} R \quad \text{genau dann, wenn} \quad S(A_1,\ldots,A_n)\vdash_{K_{\Omega}} R.\end{cases}$$

Satz 6.1 (2) gilt genau dann, wenn (1) in K_{Ω} ableitbar ist.

Beweis Wenn (2) gilt, dann gilt nach Einsetzen von $S(A_1,\ldots,A_n)$ für R:

$$\Delta(A_1,\ldots,A_n)\vdash S(A_1,\ldots,A_n) \quad \text{g.d.w.} \quad S(A_1,\ldots,A_n) \vdash S(A_1,\ldots,A_n)\ ,$$

d.h.:

(3) $\Delta(A_1,\ldots,A_n)\vdash S(A_1,\ldots,A_n)$.

Analog ergibt sich, wenn man die Glieder aus $\Delta(A_1,\ldots,A_n)$ für R einsetzt:

(4) $S(A_1,\ldots,A_n) \vdash \Delta(A_1,\ldots,A_n)$.

(3) und (4) machen die Ableitbarkeit von (1) aus.

Wenn umgekehrt (1) in K_{Ω} ableitbar ist, dann ergibt sich für beliebige $A_1,\ldots,A_n,R$, daß

(5) $S(A_1,\ldots,A_n)\vdash R$ aus $\Delta(A_1,\ldots,A_n)\vdash R$ folgt

(mit $S(A_1,\ldots,A_n)\vdash\Delta(A_1,\ldots,A_n)$), und daß

(6) $\Delta(A_1,\ldots,A_n)\vdash R$ aus $S(A_1,\ldots,A_n)\vdash R$ folgt

(mit $\Delta(A_1,\ldots,A_n)\vdash S(A_1,\ldots,A_n)$).

(5) und (6) zusammen machen gerade (2) aus.

QED

Wir können also (1) motivieren als Operator-Grundregelsystem, durch das ein Operator S als abkürzender Ausdruck eingeführt wird derart, daß ein Operat $S(A_1,\ldots,A_n)$ denselben Gehalt besitzt wie ein komplexes Regelsystem

$\Delta(A_1,\ldots,A_n)$.[1)]

Nachdem wir Explizitdefinitionen nicht nur als syntaktische Abkürzungen, sondern auch als Ausdrücke für bestimmte Gehalte beschrieben haben, wollen wir unseren Ansatz noch etwas verallgemeinern. Solange eine Definition auch eine Abkürzung ist, kann man zu Recht verlangen, daß sich diese Abkürzung jederzeit wieder rückgängig machen läßt, d.h. man kann die Forderung der Eliminierbarkeit aufstellen. Wenn wir jedoch von dem Aspekt der Explizitdefinition als Abkürzung einmal absehen und nur ihren inhaltlichen Aspekt hervorheben, dann erscheint die Forderung der Eliminierbarkeit nicht mehr als wesentlich. Dies wollen wir, bezogen auf unser Ziel der Bedeutungsfestlegung von aussagenlogischen Operatoren, tatsächlich tun.

Mit (2) hatten wir einen Operator S als einen solchen Ausdruck bestimmt, daß S-Operate $S(A_1,\ldots,A_n)$ für alle $A_1,\ldots,A_n$ denselben Gehalt haben wie ein Regelsystem $\Delta(A_1,\ldots,A_n)$. Wir definieren nun den gemeinsamen K_Ω-Gehalt von Systemen konkreter K_Ω-Regeln $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ als Menge der konkreten K_Ω-Regeln R, für die gilt: $\Delta_1 \vdash_{K_\Omega} R$ und ... und $\Delta_m \vdash_{K_\Omega} R$, d.h. $\Delta_i \vdash_{K_\Omega} R$ für alle i mit $1 \leq i \leq m$. Dabei soll der Fall m=0 ausgeschlossen sein, da dann der Begriff des "Gehaltes" nicht mehr angemessen erscheint. Der gemeinsame Gehalt von 0 Regelsystemen wäre der Gehalt keines Regelsystems; "Gehalt" versteht man jedoch immer als "Gehalt von etwas". Mit "gemeinsamer Gehalt von Regelsystemen" meinen wir also "gemeinsamer Gehalt eines oder mehrerer Regelsysteme". Den Begriff des "Gehalts" erweitern wir nur so, daß wir jetzt auch mehrere Regelsysteme zulassen (d.h. $m>1$), nicht jedoch auch kein Regelsystem (d.h. $m<1$).

===========

1) Eine gewisse Ähnlichkeit mit diesem Ansatz, Operatoren als Regelsysteme und damit als Ausdruck möglicher Ableitungsbeziehungen zu verstehen, hat der Versuch von K.R. POPPER (1949), logische Zeichen durch bestimmte Ableitbarkeitsrelationen zu definieren. Allerdings handelt es sich hierbei nur um eine grobe Skizze, in der z.B. der problematische Fall der Adjunktion v nicht behandelt wird.

So wie man nach Satz 6.1 durch eine Explizitdefinition einem Operat $S(A_1,\ldots,A_n)$ als K_Ω-Gehalt den K_Ω-Gehalt eines Regelsystems $\Delta(A_1,\ldots,A_n)$ zusprechen kann, so könnte man allgemeiner in einer Bedeutungsfestsetzung für S auch verlangen, daß

$$(7)\left\{\begin{array}{l}\text{für alle } K_\Omega\text{-Aussagen } A_1,\ldots,A_n \text{ und für alle konkreten } K_\Omega\text{-Regeln } R \text{ gilt:}\\ \quad \Delta_i(A_1,\ldots,A_n)\vdash_{K_\Omega} R \quad \text{für alle } i \text{ mit } 1\leq i\leq m\\ \qquad\qquad \text{g.d.w.} \quad S(A_1,\ldots,A_n)\vdash_{K_\Omega} R\ ,\end{array}\right.$$

wobei $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n)$ $(1\leq i\leq m)$ wieder Systeme von Ω-Regeln sein sollen, in denen S nicht vorkommt, und wo $m\geq 1$ vorausgesetzt ist.

Offensichtlich geht (7) in (2) über, wenn m=1 ist, so daß wir tatsächlich eine Verallgemeinerung des vorigen Falles haben. Daß wir "Gehalt" immer als "Gehalt von etwas" verstehen[1] und damit den Fall m=0 von vornherein ausschliessen, ist eine gewichtige Einschränkung. Sie verbaut uns nämlich den direkten Zugang zur intuitionistischen Logik. (Vgl. dazu auch § 11.) Bei einer Bedeutungsfestlegung von Operatoren, die so beschaffen ist, daß für geeignete Regelsysteme die Bedingung (7) erfüllt ist, gilt nicht mehr generell das Kriterium der Eliminierbarkeit (vgl. dazu § 15), weshalb wir nicht mehr von "Explizitdefinition" sprechen wollen. Das schmälert jedoch nicht das Recht, trotzdem von "Bedeutungsfestlegung" zu sprechen, da man gemeinhin z.B. auch von "induktiven Definitionen" spricht, obwohl bei diesen das Kriterium der Eliminierbarkeit nicht erfüllt ist.

So wie wir mit (1) ein Schema für Regelsysteme angegeben haben, deren K_Ω-Ableitbarkeit nach Satz 6.1 mit der Erfüllung von Bedingung (2) gleichwertig war, wollen wir auch hier ein entsprechendes Schema angeben:

============

1) Wobei dieses "etwas" im Grenzfall auch das leere System sein darf, vgl. § 10.

$$(8)\begin{cases} \Delta_1(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\dots,p_n) \\ \vdots \\ \Delta_m(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\dots,p_n) \\ \Delta_1(p_1,\dots,p_n)\Rightarrow p;\dots;\Delta_m(p_1,\dots,p_n)\Rightarrow p;S(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow p \end{cases} .$$

Hierbei wollen wir nicht fordern, daß in jedem System $\Delta_i(p_1,\dots,p_n)$ $(1 \le i \le m)$ <u>alle</u> Variablen $p_1,\dots,p_n$ vorkommen. Wir wollen jedoch verlangen, daß jede Variable p_j $(1 \le j \le n)$ in mindestens <u>einem</u> System $\Delta_i(p_1,\dots,p_n)$ $(1 \le i \le m)$ vorkommt, ferner, daß keines der Systeme $\Delta_i(p_1,\dots,p_n)$ $(1 \le i \le m)$ leer ist. Diese Liberalisierung dient nur der technischen Vereinfachung und ist ansonsten unwesentlich: Kommt in $\Delta_i(p_1,\dots,p_n)$ die Variable p_j nicht vor, erweitere man einfach $\Delta_i(p_1,\dots,p_n)$ um $p_j \Rightarrow p_j$; man erhält so ein gleichwertiges System.

<u>Satz 6.2</u> (7) gilt genau dann, wenn (8) in K_Ω ableitbar ist.

<u>Beweis</u> Wenn (7) gilt, dann ergibt sich durch Einsetzung von $S(A_1,\dots,A_n)$ für R in (7):

$$\Delta_i(A_1,\dots,A_n) \vdash S(A_1,\dots,A_n) \quad \text{für alle i mit } 1 \le i \le m$$
$$\text{g.d.w.} \quad S(A_1,\dots,A_n) \vdash S(A_1,\dots,A_n) ,$$

d.h.:

(9) $\Delta_i(A_1,\dots,A_n) \vdash S(A_1,\dots,A_n)$ für alle i mit $1 \le i \le m$.

Ferner ergibt sich aus (7) für beliebige A durch Einsetzung von $\Delta_1(A_1,\dots,A_n)\Rightarrow A;\dots;\Delta_m(A_1,\dots,A_n)\Rightarrow A \Rightarrow A$ für R:

$$\Delta_i(A_1,\dots,A_n);\Delta_1(A_1,\dots,A_n)\Rightarrow A;\dots;\Delta_m(A_1,\dots,A_n)\Rightarrow A \vdash A$$
für alle i mit $1 \le i \le m$

genau dann, wenn

$$S(A_1,\dots,A_n);\Delta_1(A_1,\dots,A_n)\Rightarrow A;\dots;\Delta_m(A_1,\dots,A_n)\Rightarrow A \vdash A,$$

woraus sich wegen der Gültigkeit von

$$\Delta_i(A_1,\ldots,A_n);\ \Delta_i(A_1,\ldots,A_n)\Rightarrow A \vdash A \qquad (1 \leq i \leq m)$$

sofort

(10) $S(A_1,\ldots,A_n);\ \Delta_1(A_1,\ldots,A_n)\Rightarrow A;\ldots;\Delta_m(A_1,\ldots,A_n)\Rightarrow A \vdash A$

ergibt. (9) und (10) machen die Ableitbarkeit von (8) aus.

Wenn umgekehrt (8) in K_Ω ableitbar ist, dann ergibt sich die Richtung von rechts nach links von (7) sofort aus den ersten m Regeln von (8). Sei nun

$$\Delta_i(A_1,\ldots,A_n) \vdash R \quad \text{für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq m \qquad ,$$

d.h.

(11) $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n),(R)_1 \vdash (R)_2$ für alle i mit $1 \leq i \leq m$.

Mit der letzten Regel von (8), angewandt auf (11), ergibt sich dann

$$S(A_1,\ldots,A_n),(R)_1 \vdash (R)_2 \quad ,$$

d.h. $S(A_1,\ldots,A_n) \vdash R$. Damit ist auch die Richtung von links nach rechts von (7) bewiesen.

QED

Wenn wir es als Zweck von Operaten ansehen wollen, im Sinne von (7) den gemeinsamen Gehalt möglicherweise mehrerer Regelsysteme auszudrücken, können wir nach Satz 6.2 einfach (8) als Schema für unsere Operator-Grundregelsysteme wählen. Dann wenn Systeme der Gestalt (8) zu den nichtatomaren K_Ω-Grundregeln gehören, dann sind sie trivialerweise K_Ω-ableitbar, so daß nach Satz 6.2 (7) erfüllt ist. Wenn umgekehrt die nichtatomaren Grundregeln nur den Zweck haben sollen, die Erfüllung von (7) zu garantieren, ist es wegen Satz 6.2 sinnvoll, keine nichtatomaren K_Ω-Grundregeln zu wählen, die stärker als (8) sind.

Wir wollen also (8) in diesem Kapitel als Schema für unsere Operator-Grundregelsysteme $\leq_S$ betrachten. Die ersten m Regeln von $\leq_S$:

$$\Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$
$$\vdots$$
$$\Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$

sollen auch S-Einführungsregeln oder S-E-Regeln (abgekürzt S-E) - allgemein: Einführungsregeln oder E-Regeln - heißen, die letzte Regel

$$\Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p;\ldots;\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p; S(p_1,\ldots,p_n) \dot{\Rightarrow} p$$

auch S-Beseitigungsregel oder S-B-Regel (abgekürzt S-B) - allgemein: Beseitigungsregel oder B-Regel. Der Grund für diese Bezeichnungen ist naheliegend: Mit einer S-E-Regel kann man zu einem S-Operat übergehen, ausgehend von Ableitungsbeziehungen, die möglicherweise S nicht enthalten, also S "einführen". Mit einer S-B-Regel kann man von einem S-Operat und gewissen anderen Ableitungsbeziehungen zu einer Aussage übergehen, die möglicherweise S nicht enthält, also S "beseitigen".

Es seien nochmals die Bedingungen aufgeführt, die wir oben an diese Regeln gestellt haben:

1. Kein System $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ darf leer sein.
2. S darf in keinem System $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ vorkommen.
3. Jedes System $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ darf höchstens $p_1,\ldots,p_n$ an Aussagenvariablen enthalten.
4. Jede Aussagenvariable p_j $(1 \leq j \leq n)$ muß in mindestens einem System $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n)$ $(1 \leq j \leq n)$ vorkommen.

Im Falle, wo nur eine einzige S-E-Regel

$$\Delta(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$

vorhanden ist, geht (8) über in

$$(12)\begin{cases}\Delta(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\dots,p_n)\\ \Delta(p_1,\dots,p_n)\Rightarrow p;S(p_1,\dots,p_n)\dot{\Rightarrow} p\end{cases} .$$

(12) ist gleichwertig mit (1), was sich nach Satz 6.1 und 6.2 daraus ergibt, daß (2) und (7) gleichwertig sind, falls nur ein einziges Regelsystem $\Delta(p_1,\dots,p_n)$ vorhanden ist. Dies läßt sich auch unabhängig von Satz 6.1 und 6.2 beweisen:

<u>Satz 6.3</u> K_Ω enthalte ein System Σ_S der Gestalt (12) von nichtatomaren Grundregeln. Sei K_Ω^- der Kalkül, der aus K_Ω durch Ersetzung des Grundregelsystems (12) durch (1) entsteht. Dann gilt:

(i) $S(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow \Delta(p_1,\dots,p_n)$ ist K_Ω^--ableitbar

(ii) $\Delta(p_1,\dots,p_n)\Rightarrow p;S(p_1,\dots,p_n)\dot{\Rightarrow} p$ ist K_Ω^--ableitbar.

<u>Beweis</u> Seien $A_1,\dots,A_n,A$ beliebige K_Ω-Aussagen.

(i) Das System $\Delta(p_1,\dots,p_n)$ bestehe aus ν Regeln $R_k(p_1,\dots,p_n)$ $(1\leq k\leq\nu)$. Für jedes k $(1\leq k\leq\nu)$ gilt:

$$\Delta(A_1,\dots,A_n);(R_k(A_1,\dots,A_n))_1 \vdash (R_k(A_1,\dots,A_n))_2$$

(nach Satz 4.2).

Daraus mit S-B:

$$S(A_1,\dots,A_n);(R_k(A_1,\dots,A_n))_1 \vdash (R_k(A_1,\dots,A_n))_2 \quad ,$$

d.h. $S(A_1,\dots,A_n)\vdash R_k(A_1,\dots,A_n)$.

(ii) $S(A_1,\dots,A_n)\vdash \Delta(A_1,\dots,A_n)$ gilt nach Voraussetzung. Daraus mit Satz 4.3 (ii) und 4.3 (i):

$$\Delta(A_1,\dots,A_n)\Rightarrow A;S(A_1,\dots,A_n)\vdash A .$$

<u>QED</u>

Da das Regelsystem

(13) $S(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow\Delta(p_1,\dots,p_n)$

leichter zu handhaben ist als die nach Satz 6.3 gleichwertige Regel

(14) $\Delta(p_1,\dots,p_n)\Rightarrow p;S(p_1,\dots,p_n)\dot{\Rightarrow} p$,

können wir stillschweigend auch Anwendungen von (13) statt von (14) als Anwendungen von S-B-Regeln bezeichnen und werden dies auch gelegentlich tun. Für metalogische Untersuchungen, wie z.B. im folgenden §en die Nachweise von Nichtkreativität und Eindeutigkeit, werden wir jedoch nur von der Version (8) ausgehen , weil sie allgemein und in allen Fällen anwendbar ist.

Daß wir (8) als Schema für Operator-Grundregelsysteme wählen wollen, hat sich daraus ergeben, daß wir von einer Bedeutungsfestlegung für Operatoren verlangten, daß nach ihr gemäß (7) Operate den gemeinsamen Gehalt möglicherweise mehrerer Regelsysteme ausdrücken. Wir haben gezeigt, daß dies den Spezialfall der Explizitdefinition, in dem nur <u>ein</u> Regelsystem vorliegt, miteinschließt. Man könnte nun nach der Motivation dafür fragen, daß Operate nicht mehr den Gehalt eines Regelsystems sondern den gemeinsamen Gehalt evtl. mehrerer Regelsysteme ausdrücken sollen und dementsprechend nicht mehr generell explizit definierbar sind. Der Grund ist der, daß wir uns nicht willkürlich ein Logiksystem zurechtbasteln wollen, sondern daß wir auch ein rekonstruktives Interesse verfolgen. Daher sollen zumindest die üblichen Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ (die Negation wird in Kap. 3 behandelt) in unserem Rahmen deutbar sein. Und zur Deutung von $\vee$ scheint es unumgänglich zu sein, mehr als eine E-Regel zuzulassen; die üblichen E-Regeln für $\vee$ lauten ja:

$$p_1 \Rightarrow (p_1 \vee p_2)$$
$$p_2 \Rightarrow (p_1 \vee p_2) .$$

Den üblichen $\vee$-Regeln, zu denen ja noch die B-Regel

$$p_1 \Rightarrow p; p_2 \Rightarrow p; (p_1 \vee p_2) \Rightarrow p$$

gehört, können wir jetzt eine sinnvolle Deutung geben: Ein Adjungat $A \vee B$ drückt den gemeinsamen Gehalt der nur aus einzelnen Aussagen bestehenden Regelsysteme A und B aus. Die Bedingung (7) bzw. die Regeln (8) scheint die naheliegendste und schwächste Verallgemeinerung von (2) bzw. (1) zu sein, die eine Einbeziehung der üblichen $\vee$-Regeln in unsere Operator-Grundregeln erlaubt. Außerdem ist die philosophische Deutung dieser Verallgemeinerung mit Hilfe des Begriffs des gemeinsamen Gehaltes nicht unplausibel.

Es läßt sich noch eine etwas andere Motivation unseres Schemas (8) für allgemeine E- und B-Regeln denken, die nicht auf den Begriff des gemeinsamen Gehalts zurückgreift, sondern Operatoren direkt als Regeln deutet. Dazu definieren wir zunächst: Eine konkrete Regel R ist in K_Ω unter Benutzung einer (nicht unbedingt konkreten) Regel R' ableitbar, wenn R in dem Kalkül ableitbar ist, der aus K_Ω durch Hinzunahme von R' zu den Grundregeln entsteht. Dann gilt für beliebige Systeme Δ_i $(1 \leq i \leq m)$ konkreter Regeln und konkrete Regeln R:

$\Delta_i \vdash_{K_\Omega} R$ für alle i mit $1 \leq i \leq m$ g. d. w. R unter Benutzung von $\Delta_1 \Rightarrow p; \ldots; \Delta_m \Rightarrow p \dot{\Rightarrow} p$ in K_Ω ableitbar.

Denn aus $\Delta_i, (R)_1 \vdash_{K_\Omega} (R)_2$ für alle i $(1 \leq i \leq m)$ ergibt sich unter Benutzung von $\Delta_1 \Rightarrow p; \ldots; \Delta_m \Rightarrow p \dot{\Rightarrow} p$ bei Belegung von p mit $(R)_2$ eine Ableitung

$$\Delta_1 \Rightarrow p; \ldots; \Delta_m \Rightarrow p \dot{\Rightarrow} p \quad \frac{\begin{array}{c}[\Delta_1] \quad (R)_1 \\ \vdots \\ (R)_2\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}[\Delta_m] \quad (R)_1 \\ \vdots \\ (R)_2\end{array}}{(R)_2}$$

von R in K_Ω. Ist umgekehrt R in K_Ω unter Benutzung von $\Delta_1 \Rightarrow p; \ldots; \Delta_m \Rightarrow p \dot{\Rightarrow} p$ ableitbar, so ersetze man für ein i $(1 \leq i \leq m)$ sukzessive jede Regelanwendung

$$\Delta_1 \Rightarrow p; \ldots; \Delta_m \Rightarrow p \dot{\Rightarrow} p \quad \frac{\begin{array}{c}[\Delta_1] \\ \vdots \\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Delta_m] \\ \vdots \\ A\end{array}}{A}$$

durch $\begin{array}{c}\Delta_i \\ \vdots \\ A\end{array}$, womit man schließlich $\Delta_i \vdash_{K_\Omega} R$ erhält. Dieses Verfahren führe man für alle i $(1 \leq i \leq m)$ durch.

Aufgrund dieses Resultats ist mit (7) gleichwertig:

(15) $\left\{\begin{array}{l}\text{Für alle } K_\Omega\text{-Aussagen } A_1,\ldots,A_n \text{ und für alle konkreten}\\ K_\Omega\text{-Regeln } R \text{ gilt: } R \text{ ist in } K_\Omega \text{ unter Benutzung von}\\ \Delta_1(A_1,\ldots,A_n)\Rightarrow p;\ldots;\Delta_m(A_1,\ldots,A_n)\Rightarrow p \dot{\Rightarrow} p\\ \text{ableitbar g.d.w. } S(A_1,\ldots,A_n) \vdash_{K_\Omega} R.\end{array}\right.$

Es lassen sich also dieselben Operator-Grundregeln (8) rechtfertigen, wenn man (15) statt (7) als Adäquatheitsbedingung für Operator-Grundregeln wählt. (15) würde den Gehalt eines Operats als Gehalt <u>einer</u> Regel deuten und nicht wie (7) als gemeinsamen Gehalt mehrerer Regeln.

Die Wahl von (15) statt (7) als Adäquatheitsbedingung bringt für uns jedoch keinen wesentlichen Vorteil. Denn die Regel

(16) $\Delta_1(A_1,\ldots,A_n)\Rightarrow p;\ldots;\Delta_m(A_1,\ldots,A_n)\Rightarrow p \dot{\Rightarrow} p$

hat keinen klareren Sinn als das, was mit dem Begriff des gemeinsamen Gehaltes ausgedrückt ist; vielmehr ist der Begriff des gemeinsamen Gehaltes geeignet, die Regel (16) zu interpretieren, nämlich als: Das, was aus allen $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ folgt, d.h. der gemeinsame Gehalt der $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$, gilt auch unabhängig von den Annahmen $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ $(1 \leq i \leq m)$. (15) besagt dann: Aus $S(A_1,\ldots,A_n)$ soll genau das ableitbar sein, was sich daraus ergibt, daß der gemeinsame Gehalt der $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ als Annahme genommen werden darf. Gegenüber einer solchen Formulierung erscheint es sogar viel klarer, im Sinne von (7) zu sagen: $S(A_1,\ldots,A_n)$ drückt den gemeinsamen Gehalt der $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ aus.

Vorteilhaft wäre die Bedingung (15) allerdings in einem stärkeren Kalkül, in dem man auch Regeln mit Variablen, also nicht nur konkrete Regeln, als Annahmen zuläßt, die wieder gelöscht werden können. Dann müßte man eine Art Variablenbindung in Regeln zur Verfügung haben, also etwa Zeichenreihen

$$R_1,\ldots,R_n \Rightarrow_{x,y\ldots} X$$

als Regeln zulassen, wobei die tiefgestellten Indizes x,y,... die gebundenen Variablen anzeigen.[1] In einem solchen Kalkül, der auch die Behandlung von Quantoren erlaubte, würde das Schema (15) zu Explizitdefinitionen der aussagenlogischen Operatoren der Gestalt

$$S(p_1,\ldots,p_n) \overset{\cdot\cdot}{\Leftrightarrow} \Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p; \ldots; \Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p \overset{\cdot}{\underset{p}{\Rightarrow}} p$$

Anlaß geben. Damit wären zwar die Schwierigkeiten der philosophischen Deutung von (16) nicht behoben - d.h. man müßte wohl weiterhin auf den Begriff des gemeinsamen Gehaltes zurückgreifen, um sich (16) verständlich zu machen -, man könnte jedoch zeigen, daß aussagenlogische Operatoren explizit durch Regeln definierbar sind, ein Resultat, das in unserem Rahmen noch nicht gilt (vgl. § 15). Es würde vollkommen in Parallele stehen zu dem bei PRAWITZ (1965, S. 67f.) bewiesenen Satz, daß in Logiken zweiter Stufe die Konstanten $\wedge$, $\vee$ und $\exists$ mit Hilfe von $\forall$ und $\rightarrow$ definierbar sind. Denn die Regel (16) ist nichts anderes als eine regellogische Lesart der dort angegebenen definierenden Aussageschemata, bezogen auf n-stellige Aussagenoperatoren.

Um den hier vorgetragenen Ansatz noch abzuheben von anderen Begründungen von E- und B-Regeln für Operatoren, wollen wir die E- und B-Regeln jeweils für sich interpretieren. Die B-Regel legt fest, daß zum Gehalt eines Operats $S(A_1,\ldots,A_n)$ jedenfalls der gemeinsame Gehalt von $\Delta_1(A_1,\ldots,A_n)$ und ... und $\Delta_m(A_1,\ldots,A_n)$ gehört: Alles, was aus jedem einzelnen Regelsystem $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ ableitbar ist, soll auch aus $S(A_1,\ldots,A_n)$ ableitbar sein. Die E-Regeln legen fest, daß zum Gehalt eines Operats $S(A_1,\ldots,A_n)$ nur der gemeinsame Gehalt von $\Delta_1(A_1,\ldots,A_n)$ und ... und $\Delta_m(A_1,\ldots,A_n)$ gehört: Wenn etwas aus $S(A_1,\ldots,A_n)$ ableitbar ist, dann muß es schon aus jedem $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ ableitbar sein (weil $S(A_1,\ldots,A_n)$ aus $\Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ ableitbar ist). Man könnte also sagen, daß E-Regeln die B-Regel abschließen, in-

1) Der Vorschlag, in Regeln Variable zu binden, stammt von LORENZEN (1955), vgl. dort S. 25f. und passim.

dem sie festlegen, daß Operate keinen weiteren Gehalt haben als den, den sie aufgrund der B-Regel haben. Für den Fall, daß nur ein Regelsystem $\Delta(p_1,\ldots,p_n)$ und damit eine Explizitdefinition von S vorliegt, also die B-Regel

$$\Delta(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow p;S(p_1,\ldots,p_n)\dot{\Rightarrow} p$$

gleichwertig ist mit dem Regelsystem

$$S(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow\Delta(p_1,\ldots,p_n)\ ,$$

und (8) damit gleichwertig mit dem Regelsystem

$$S(p_1,\ldots,p_n)\Leftrightarrow\Delta(p_1,\ldots,p_n)\ ,$$

kann man sagen: Eine Explizitdefinition eines Operators ist ein durch eine E-Regel abgeschlossenes System von B-Regeln.

Eine damit verwandte Auffassung, dort allerdings bezogen auf Explizitdefinitionen von Prädikatoren, findet sich bei KAMLAH/LORENZEN 1967. Dort wird eine Explizitdefinition eines Prädikators P durch Prädikatoren $P_1,\ldots,P_n$ aufgefaßt als abgeschlossenes System von Regeln der Gestalt

$$(17)\left\{\begin{array}{l} P(x)\Rightarrow P_1(x)\\ \quad\vdots\\ P(x)\Rightarrow P_n(x)\ , \end{array}\right.$$

das man mit einem System von B-Regeln der Gestalt (13) vergleichen kann. (Wir verzichten bei dieser Notation von Prädikatorenregeln auf das für die "Logische Propädeutik" typische Kopula-ε.) Abgeschlossen wird (17) durch die Regel

$$P_1(x),\ldots,P_n(x)\Rightarrow P(x)$$

bzw. durch

$$P_1(x)\wedge\ldots\wedge P_n(x)\Rightarrow P(x)\ ,$$

wenn man - wie die "Logische Propädeutik" - den Junktor

$\wedge$ schon voraussetzt, (was natürlich (gemessen am methodischen Anspruch dieses Werkes) ein Manko ist).

Unsere Deutung der Operatorenregeln unterscheidet sich auf jeden Fall von der z.B. durch einige Äußerungen GENTZENs nahegelegten Auffassung, wonach E-Regeln die "primären" Operator-Grundregeln sind und B-Regeln einen abgeleiteten Status haben (vgl. oben S. 15f. Anm.). Wir versuchen, E- und B-Regeln als gleichwertige Träger der Bedeutung von Operatoren zu begreifen. Dieser Auffassung am nächsten kommt noch N. W. TENNANT mit seinem 'principle of harmony', das die Gleichwertigkeit von E- und B-Regeln betont (vgl. TENNANT 1978, S. 74).

§ 7. Nachweis von Nichtkreativität und Eindeutigkeit

Wir wollen im folgenden zeigen, daß für Folgen von Operator-Grundregelsystemen, für die wir im vorigen §en aufgrund allgemeiner semantischer Überlegungen ein Schema angegeben haben, die beiden Anforderungen erfüllt sind, die wir in § 5 verlangt haben: Nichtkreativität und Eindeutigkeit. Wir beginnen mit der Nichtkreativität. Sie Ω ein System $S_1 \ldots S_\ell$ von Operatoren und $\leq_{S_1}, \ldots, \leq_{S_\ell}$ eine für Ω methodisch zulässige Folge von Operator-Grundregelsystemen der in § 6 angegebenen Gestalt. Die Regeln aus $\leq_{S_1}, \ldots, \leq_{S_\ell}$ sollen die nichtatomaren Grundregeln von K_Ω ausmachen. Zu zeigen ist: $\leq_{S_1}, \ldots, \leq_{S_\ell}$ ist bzgl. K nichtkreativ. Da Ω und $\leq_{S_1}, \ldots, \leq_{S_\ell}$ beliebig gewählt werden können (also metasprachliche Variablen sind), ferner der Grundkalkül K unspezifiziert bleibt, ist, wie oben S. 78 gefordert, die Nichtkreativität für <u>jedes</u> Ω und für <u>jede</u> für Ω methodisch zulässige Folge von Operator-Grundregelsystemen gesichert.

Da wir in diesem §en durchgängig Ω als System $S_1 \ldots S_\ell$ von Operatoren und $\leq_{S_1}, \ldots, \leq_{S_\ell}$ als für Ω methodisch zulässige Folge von Operator-Grundregelsystemen voraussetzen, werden wir bei vielen benutzten Begriffen die Relativierung auf K_Ω nicht notieren (schreiben also z.B. "Regel" statt "K_Ω-Regel"). Zunächst definieren wir die Begriffe der Teilaussage, der Subaussage und des Ranges:

B ist <u>unmittelbare Teilaussage</u> eines Operats $S(A_1, \ldots, A_n)$, falls B mit einem A_i $(1 \leq i \leq n)$ identisch ist.
B ist <u>Teilaussage</u> einer Aussage A, falls B mit A identisch oder Teilaussage einer unmittelbaren Teilaussage von A ist.
B ist <u>echte Teilaussage</u> einer Aussage A, wenn B von A verschiedene Teilaussage von A ist.
B ist <u>Teilaussage einer konkreten Regel</u> R, falls B Teilaussage einer unmittelbaren Teilaussage von R ist (unmittelbare Teilaussagen von konkreten <u>Regeln</u> sind auf S. 67 definiert worden).

B ist <u>unmittelbare K_Ω-Subaussage</u> eines Operats $S(A_1,\ldots,A_n)$, falls B unmittelbare Teilaussage eines Regelsystems $\Delta(A_1,\ldots,A_n)$ ist, so daß $\Delta(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$ zu den S-Einführungsregeln gehört.
B ist <u>K_Ω-Subaussage einer Aussage</u> A, falls B mit A identisch ist oder K_Ω-Subaussage einer unmittelbaren K_Ω-Subaussage von A ist.
B ist <u>K_Ω-Subaussage einer konkreten Regel</u> R, falls B K_Ω-Subaussage einer unmittelbaren Teilaussage von R ist.
B ist <u>K_Ω-Subaussage eines Systems von konkreten Regeln</u> Δ, falls B K_Ω-Subaussage eines Gliedes von Δ ist.

(In dieser Definition haben wir das an sich redundante Präfix "K_Ω-" mitgeschleppt, weil wir unten den davon verschiedenen Begriff der K_Ω^i-Subaussage definieren werden.)

Die Definition von "Teilaussage" entspricht der üblichen Definition. Der Begriff der K_Ω-Subaussage oder kurz Subaussage ist auf unsere spezielle Situation zugeschnitten: Wir wollen sagen können, daß man bei Anwendung einer Einführungsregel für einen Operator S von Subaussagen eines Operats zu diesem selbst übergeht. Deshalb haben wir die Subaussagen von $S(A_1,\ldots,A_n)$ induktiv definiert als die Subaussagen von Aussagen, die in dem System $\Delta(p_1,\ldots,p_n)$ der Vorderregeln einer S-E-Regel $\Delta(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$ vorkommen, wenn man diese Regel so belegt, daß durch ihre Anwendung $S(A_1,\ldots,A_n)$ abgeleitet werden kann. Im Falle, wo S Junktor ist, sind alle unmittelbaren Subaussagen auch unmittelbare Teilaussagen von $S(A_1,\ldots,A_n)$, da höchstens $A_1,\ldots,A_n$ unmittelbare Teilaussagen von $\Delta(A_1,\ldots,A_n)$ sein können. Falls S jedoch nicht Junktor ist, kann man einer Aussage $S(A_1,\ldots,A_n)$ nicht ansehen, aus welchen Aussagen $S(A_1,\ldots,A_n)$ durch eine E-Regel gewonnen worden sein kann. Deshalb können unmittelbare Subaussagen nicht schon durch die äußere Gestalt einer Aussage festgelegt sein, sondern erst durch die Vorderregeln der E-Regeln für diese Aussage. Die Terminologie "Subaussage"/"Teilaussage" scheint uns für diesen Sachverhalt geeignet zu sein: "Sub-" drückt eine Unterordnung von Aussagen aus, "Teil-" darüber hinaus ein optisches Enthaltensein von Aussagen.

Wir definieren nun den Rang einer Aussage A, einer konkreten Regel R und eines Systems konkreter Regeln Δ - notiert mit rg(A), rg(R) und rg(Δ) -, der für spätere Induktionsbeweise benötigt wird. Es sei:

rg(A)=0 , falls A atomar.

rg(A)=max$\{$rg(A_1),...,rg(A_k)$\}$+1, falls A nichtatomar und $\{A_1,\ldots,A_k\}$ die Menge der unmittelbaren K_Ω-Subaussagen von A ist.

rg(R)=max$\{$rg(A_1),...,rg(A_k)$\}$, wobei $\{A_1,\ldots,A_k\}$ die Menge der unmittelbaren Teilaussagen von R ist.

rg(Δ)=max$\{$rg(R_1),...,rg(R_k)$\}$, falls Δ die Glieder $R_1,\ldots,R_k$ hat.

Dabei soll eine K_Ω^i-Aussage, die ja Operatoren ohne ein zu K_Ω^i gehörendes Grundregelsystem (nämlich $S_{i+1},\ldots,S_\ell$) enthalten kann, den Rang haben, den sie aufgrund dieser Definition hat, wenn man sie als K_Ω-Aussage auffaßt.

Die Definition des Ranges ist nur dann eine korrekte induktive Definition, wenn wir zeigen können, daß die Relation "ist unmittelbare Subaussage von" fundiert ist. Dazu ordnen wir jeder Aussage A eine Ordinalzahl $\varepsilon(A)$ zu und zeigen, daß $\varepsilon(B) < \varepsilon(A)$, falls B unmittelbare Subaussage von A ist. Es sei

$$\varepsilon(A) = \omega^{\ell-1}\cdot\alpha_\ell(A) + \omega^{\ell-2}\cdot\alpha_{\ell-1}(A) + \ldots + \omega^0\cdot\alpha_1(A) ,$$

wobei $\alpha_k(A)$ $(1 \leq k \leq \ell)$ die Zahl der mit S_k beginnenden Teilaussagen (nicht Teilaussagenvorkommen!) von A sei. Falls nun $A \equiv S_i(A_1,\ldots,A_n)$ $(1 \leq i \leq \ell)$ ist und B unmittelbare Subaussage von A, dann ist $B \equiv X(A_1,\ldots,A_n)$, wobei $X(p_1,\ldots,p_n)$ Formel, die höchstens $p_1,\ldots,p_n$ an Variablen enthält und in der nur Operatoren S_j mit $j < i$ vorkommen (nach Definition von "methodisch zulässig" oben S. 76, und den Bedingungen oben S. 90). Teilaussagen von B, die mit einem S_j mit $j > i$ beginnen, müssen also schon Teilaussagen von $A_1,\ldots,A_n$ und damit von A sein. Ferner enthält A eine mit S_i beginnende Teilaussage mehr als B, nämlich sich selbst. Es gilt also:

$\alpha_j(B) = \alpha_j(A)$, falls $j > i$,
$\alpha_i(B) < \alpha_i(A)$ (genauer: $\alpha_i(B)+1 = \alpha_i(A)$),
$\alpha_j(B) \lesseqgtr \alpha_j(A)$, falls $j < i$.
Damit ist $\varepsilon(B) < \varepsilon(A)$. 1)

Es folgt die Definition des Begriffs der K^i_Ω-Subaussage von Aussagen, Regeln und Regelsystemen. (Man beachte, daß "K^i_Ω-Regel" und "K_Ω-Regel" dasselbe bedeutet, wir also bei "Regel" die Relativierung auf einen Kalkül weglassen können.)
Diese Definition ist dadurch motiviert, daß wir aus dem Nichtvorkommen von S_i in einer konkreten Regel R auf das Nichtvorkommen von S_i in den K^i_Ω-Subaussagen von R schliessen wollen, was durch Lemma 7.1 auch formuliert wird.
Das wird es ermöglichen, die Nichtkreativität von $\varepsilon_{S_1}, \dots, \varepsilon_{S_\ell}$ aus Sätzen über K^i_Ω-Subaussagen abzuleiten.

B ist <u>unmittelbare K^i_Ω-Subaussage eines Operats</u>, falls dieses die Gestalt $S_j(A_1,\dots,A_n)$ hat für $1 \leq j \leq i$ und B unmittelbare K_Ω-Subaussage davon ist.
B ist <u>K^i_Ω-Subaussage einer Aussage</u> A, falls B mit A identisch ist oder K^i_Ω-Subaussage einer unmittelbaren K^i_Ω-Subaussage von A ist.
B ist <u>K^i_Ω-Subaussage einer konkreten Regel</u> R, falls B K^i_Ω-Subaussage einer unmittelbaren Teilaussage von R ist.
B ist <u>K^i_Ω-Subaussage eines Systems von konkreten Regeln</u> Δ , falls B K^i_Ω-Subaussage eines Gliedes von Δ ist.

<u>Lemma 7.1</u> Sei Δ System konkreter Regeln, in dem S_i nicht vorkommt. Dann kommt S_i in keiner K^i_Ω-Subaussage von Δ vor.

<u>Beweis</u> Wir führen den Beweis nur für Aussagen A; die Behauptung für beliebige Regelsysteme ergibt sich dann sofort aus obigen Definitionen.

============

1) $\varepsilon(A)$ ist kleiner als ω^ℓ. Um die Fundiertheit der Relation "ist unmittelbare Subaussage von" für beliebige Kalküle K_Ω mit beliebig großem ℓ zeigen zu können, benötigen wir also das Prinzip der transfiniten Induktion bis ω^ω.

Sei B K_Ω^i-Subaussage von A, wobei S_i in A nicht vorkomme. Falls B mit A identisch ist, kann S_i auch in B nicht vorkommen. Falls B K_Ω^i-Subaussage einer unmittelbaren K_Ω^i-Subaussage C von A, können wir als Induktionsvoraussetzung annehmen, daß die Behauptung für C gilt. Wir müssen also nur noch zeigen, daß S_i in C nicht vorkommt. Da A die Gestalt $S_j(A_1,\dots,A_n)$ mit $1 \leq j \leq i$ hat (es gilt sogar $j \neq i$, weil S_i in A nicht vorkommt), können - da $\mathcal{E}_{S_1},\dots,\mathcal{E}_{S_\ell}$ für Ω methodisch zulässig ist - in unmittelbaren K_Ω-Subaussagen C von A außer $S_1,\dots,S_{j-1}$ nur solche Operatoren auftreten, die auch in $A_1,\dots,A_n$ vorkommen. Da S_i in A und damit in $A_1,\dots,A_n$ nicht vorkommt, ist die Behauptung bewiesen.

<u>QED</u>

Jetzt können wir den zentralen Satz dieses §en formulieren, aus dem sich sofort die Nichtkreativität ergibt.

<u>Satz 7.2 (Subaussagenprinzip)</u> Sei Π eine K_Ω^i-Ableitung von A aus Δ für beliebiges i $(1 \leq i \leq \ell)$. Dann läßt sich Π in eine K_Ω^i-Ableitung Π' von A aus Δ umformen, so daß jede in Π' vorkommende nichtatomare Aussage K_Ω^i-Subaussage von Δ oder A ist.

Den Beweis dieses Satzes stellen wir noch zurück und beweisen mit seiner Hilfe erst, daß die Folge $\mathcal{E}_{S_1},\dots,\mathcal{E}_{S_\ell}$ nichtkreativ ist. Der endgültige Beweis erfolgt, nach etlichen Vorbereitungen, auf S. 114-118.

<u>Satz 7.3</u> Sei R konkrete Regel, in der S_i nicht vorkommt. Falls $\vdash_{K_\Omega^i} R$, dann $\vdash_{K_\Omega^{i-1}} R$.

<u>Beweis</u> Nach Satz 7.2 gibt es eine K_Ω^i-Ableitung von R, in der außer atomaren Aussagen nur K_Ω^i-Subaussagen von R auftreten. In diesen kommt nach Lemma 7.1 S_i nicht vor. Wenn in einer K_Ω^i-Ableitung S_i nicht vorkommt, kann keine S_i-Grundregel angewendet worden sein. Also kann man sie auch als K_Ω^{i-1}-Ableitung auffassen.

<u>QED</u>

Als Korollar wollen wir noch vermerken:

Satz 7.4 Sei R konkrete atomare Regel. Falls $\vdash_{K_\Omega}$ R, dann $\vdash_{K}$ R.

Beweis Durch ℓ-fache Anwendung von Satz 7.3 folgt aus $\vdash_{K_\Omega}$ R: $\vdash_{K^o_\Omega}$ R. Nun hat K^o_Ω dieselben Grundregeln wie K. Also können in einer K^o_Ω-Ableitung nur dann nichtatomare Aussagen auftreten, wenn sie durch herangezogene Regeln zustandekommen. Da R atomar, können in einer K^o_Ω-Ableitung von R keine nichtatomaren Regeln herangezogen worden sein. Also kann man eine K^o_Ω-Ableitung von R auch als K-Ableitung auffassen.

QED

Satz 7.4 sichert die Konservativität von K_Ω bzgl. K: Die atomaren K_Ω-Ableitungsbeziehungen sind genau die K-Ableitungsbeziehungen.

Wesentliches Hilfsmittel zum Beweis des Subaussagenprinzips, dem wir uns jetzt zuwenden, ist der Normalisierungssatz (Satz 7.7). Wir gehen bei seiner Formulierung und seinem Beweis sowie auch beim anschließenden Beweis des Subaussagenprinzips von den Begriffsbildungen und Beweisen bei PRAWITZ 1965 aus und übertragen diese auf die bei uns vorliegende allgemeinere Situation (d.h. auf den allgemeineren Kalkülbegriff und das Vorkommen beliebig vieler Aussagenoperatoren).

Sei Π eine K_Ω-Ableitung. Ein Aussagenvorkommen A in Π heißt Hauptprämisse der Anwendung einer B-Regel, wenn A die rechteste Prämisse der Anwendung einer B-Regel ist (d.h. die Prämisse, die aus einem S-Operat besteht, wobei S derjenige Operator ist, der bei dieser Anwendung beseitigt wird). Alle anderen Prämissen dieser Anwendung einer B-Regel heißen Nebenprämissen dieser Anwendung.

Ein Segment ist ein Abschnitt $A_1, \ldots, A_n$ eines Fadens - wobei n=1 zugelassen wird; dann besteht das Segment nur aus A_1 -, so daß gilt:

1) A_1 ist nicht Konklusion der Anwendung einer B-Regel.

2) A_j ist Nebenprämisse der Anwendung einer B-Regel für $1 \leq j < n$.

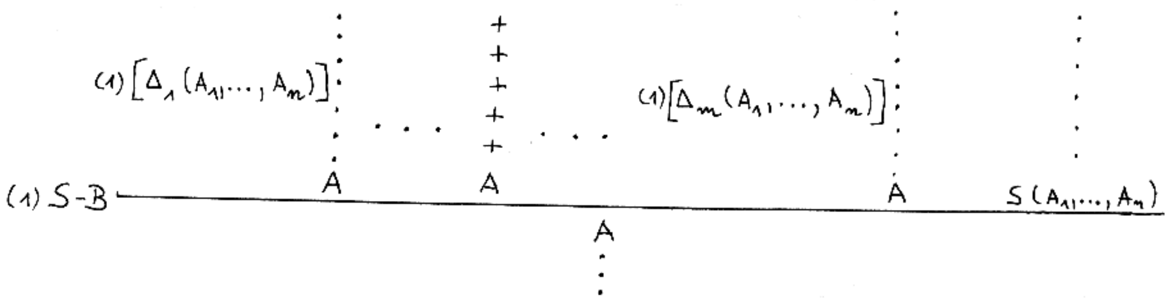
3) A_n ist nicht Nebenprämisse der Anwendung einer B-Regel.

Die Aussagenvorkommen $A_1, \ldots, A_n$ sind also allesamt Vorkommen derselben Aussage. Die Länge eines Segments ist die Zahl der Aussagenvorkommen, die es enthält. Der Rang eines Segments ist der Rang der Aussage, die in dem Segment (evtl. mehrfach) vorkommt. Ein Segment besteht also entweder nur aus einem einzelnen Aussagenvorkommen, das nicht Nebenprämisse der Anwendung einer B-Regel ist - wenn nämlich n=1, dann ist $1 < n$ falsch, Klausel 2) also für A_1 erfüllt -, oder ist ein maximales Stück eines Fadens, das aus aufeinanderfolgenden Nebenprämissen der Anwendungen von B-Regeln besteht, gefolgt von der Konklusion der Anwendung einer B-Regel, die nicht zugleich Nebenprämisse der Anwendung einer weiteren B-Regel ist. Als Mitteilungszeichen für Segmente benutzen wir $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$.

Eine Anwendung einer B-Regel heißt redundant, wenn die Ableitung einer Nebenprämisse dieser Anwendung von keiner Annahme abhängt, die bei dieser Anwendung der B-Regel gelöscht wird.

Lemma 7.5 Jede K^i_Ω-Ableitung einer konkreten Regel R läßt sich in eine solche K^i_Ω-Ableitung von R umformen, die keine redundanten Anwendungen von B-Regeln enthält.

Beweis Eine redundante Anwendung einer B-Regel sieht so aus:



Mit $\begin{matrix}+\\+\\+\\A\end{matrix}$ **ist dabei die Ableitung der j-ten Nebenprämisse A ($1 \leq j \leq m$) bezeichnet, in der bei Anwendung der S-B-Regel keine Annahme gelöscht wird.**
Offensichtlich kann man obige Ableitung einfach durch $\begin{matrix}+\\+\\+\\A\\\vdots\end{matrix}$ ersetzen, da in $\begin{matrix}+\\+\\+\\A\end{matrix}$ keine zusätzliche Annahme auftritt.

QED

Ein Segment heißt maximal, wenn es mit der Konklusion der Anwendung einer E-Regel beginnt und mit der Hauptprämisse der Anwendung einer B-Regel endet.

Lemma 7.6 **Jede K_{Ω}^{i}-Ableitung von A aus Δ läßt sich in eine solche K_{Ω}^{i}-Ableitung von A aus Δ umformen, die keine maximalen Segmente enthält.**

Beweis Π sei die betrachtete Ableitung. Wir führen den Beweis durch Paarinduktion über $\langle \varrho(\Pi), \lambda(\Pi) \rangle$. Dabei sei $\varrho(\Pi)$ der größte Rang eines in Π vorkommenden maximalen Segments, $\lambda(\Pi)$ die Summe der Längen der in Π vorkommenden maximalen Segmente vom Rang $\varrho(\Pi)$; $\varrho(\Pi)$ (und damit auch $\lambda(\Pi)$) sei 0, wenn Π kein maximales Segment enthält. Der Induktionsanfang ist also trivialerweise erfüllt.

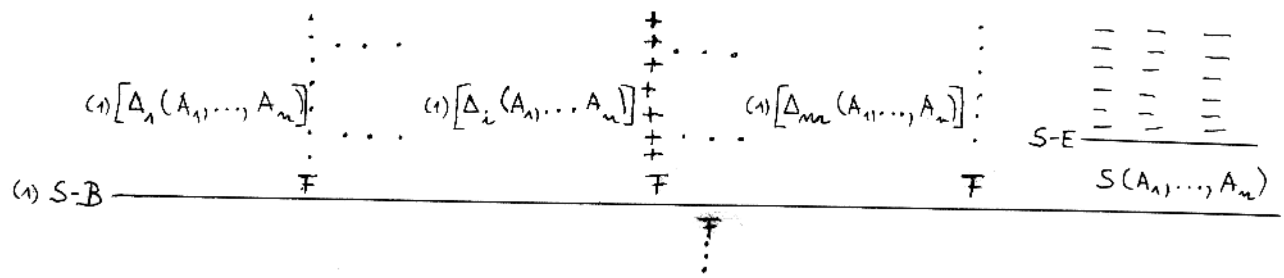
Sei $\rho(\Pi) > 0$. Wir wählen in Π ein solches maximales Segment σ vom Rang $\rho(\Pi)$

(i) über dem (d.h. über dessen erstem Aussagenvorkommen) in Π kein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ steht und

(ii) neben dessen unterstem Aussagenvorkommen in Π kein Aussagenvorkommen steht, über dem sich ein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ befindet oder das zu einem maximalen Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ gehört.

Ein solches Segment σ läßt sich immer finden: Geht man von einem beliebigen maximalen Segment σ_1 vom Rang $\rho(\Pi)$ aus, daß (i) erfüllt, jedoch nicht (ii), so gibt es ein Segment σ_2, das (i) erfüllt und dessen Vorhandensein die Bedingung (ii) für σ_1 falsch macht. Erfüllt auch σ_2 nicht die Bedingung (ii), dann gibt es ein σ_3, das (i) erfüllt und dessen Vorhandensein die Bedingung (ii) für σ_2 falsch macht usw. Man erhält so eine Folge $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ von maximalen Segmenten vom Rang $\rho(\Pi)$, die alle verschieden sind, da die obersten Aussagenvorkommen der Ableitungsfäden, zu denen das oberste Aussagenvorkommen von σ_{i+1} gehört, mehr links stehen[1] als die obersten Aussagenvorkommen der Ableitungsfäden, zu denen das oberste Aussagenvorkommen von σ_i gehört. Eine solche Folge muß endlich sein und endet mit einem Segment der gewünschten Art.

<u>Fall a)</u> σ hat Länge 1, besteht also nur aus einem einzigen Aussagenvorkommen. Dieses muß als Konklusion der Anwendung einer E-Regel die Gestalt $S(A_1,\ldots,A_n)$ haben. Sei $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$ diejenige E-Regel, durch deren Anwendung sich dieses Vorkommen von $S(A_1,\ldots,A_n)$ ergibt. $S(A_1,\ldots,A_n)$ tritt also so auf:



==============

1) "Links" hier im anschaulichen Sinne, bezogen auf die Notation eines Ableitungsbaumes, verstanden.

In den mit $\equiv\ \equiv\ \equiv$ markierten Ableitungen sind die Hinterformeln der Glieder von $\Delta_i(A_1,\dots,A_n)$ aus deren Vorderregeln abgeleitet. Durch(gegebenenfalls mehrfache) Anwendung von Satz 4.1 auf

$$\begin{array}{c}\Delta_i(A_1,\dots,A_n)\\ +\\ +\\ \vdots\\ +\\ F\end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc}\equiv & \equiv & \equiv\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \equiv & \equiv & \equiv\end{array} \qquad \text{erhält man}$$

eine Ableitung von F. Durch diese ersetze man obiges Ableitungsstück und erhält so eine neue Ableitung Π'. Bei dieser Umformung kann kein vorher nur einzeln vorkommendes maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ mehrfach verwendet werden, da nach Wahl von σ solche Segmente in

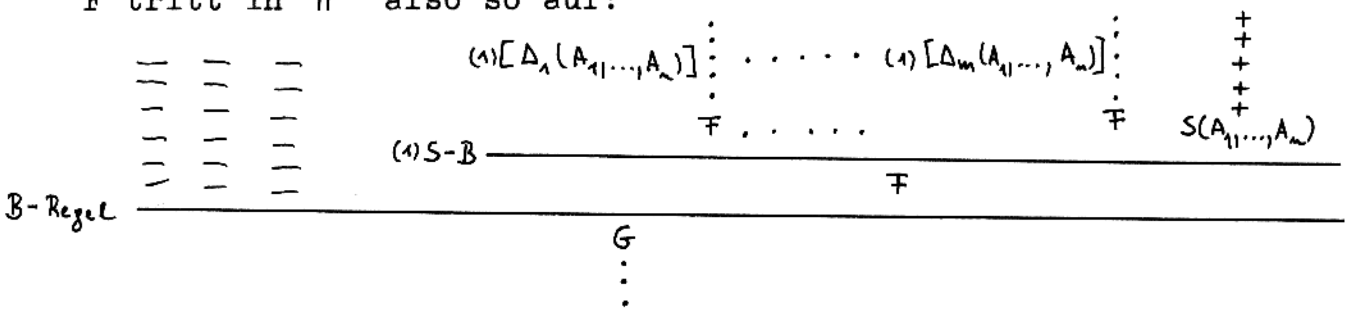
$$\begin{array}{c}\Delta_i(A_1,\dots,A_n)\\ +\\ +\\ \vdots\\ +\\ F\end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc}\equiv & \equiv & \equiv\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \equiv & \equiv & \equiv\end{array} \qquad \text{gar nicht}$$

auftreten. Ferner bestehen alle dabei evtl. neu entstehenden maximalen Segmente aus Vorkommen von unmittelbaren Teilaussagen von $\Delta_i(A_1,\dots,A_n)$, sind also von kleinerem Rang als $S(A_1,\dots,A_n)$. Dies sieht man durch Kontrolle der im Beweis von Satz 4.1 beschriebenen Konstruktion: Ein neues maximales Segment kann ja nur entstehen durch Zusammenfügen von Ableitungsstücken

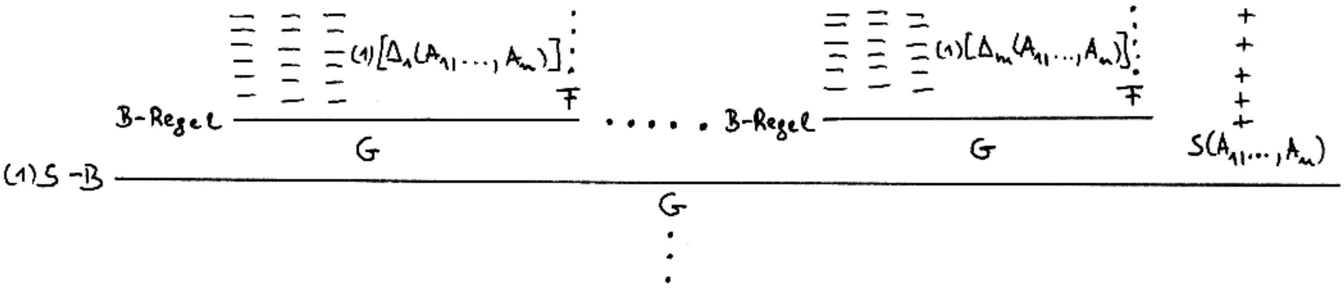
$$\begin{array}{c}\mid\\ \mid\\ \mid\\ \mathfrak{B}\end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c}\mathfrak{B}\\ \vdots\end{array} \qquad \text{zu} \qquad \begin{array}{c}\mid\\ \mid\\ \mathfrak{B}\\ \vdots\end{array}$$

. Eine solche Zusammenfügung wird dort nur für $B \equiv R$ (falls R Aussage) bzw. $B \equiv (R)_2$ erwähnt, wobei man dies - dem Induktionsbeweis entsprechend - auch auf alle Komponenten von R beziehen muß. Da in Π' das Segment σ nicht mehr auftritt, gilt entweder $\rho(\Pi') < \rho(\Pi)$ (wenn σ das einzige maximale Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ war) oder $\rho(\Pi') = \rho(\Pi)$ und $\lambda(\Pi') < \lambda(\Pi)$ (da ein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ weniger auftritt). In beiden Fällen folgt aus der Induktionsvoraussetzung die Behauptung.

Fall b) σ hat Länge >1, besteht also aus mehreren Vorkommen einer Aussage F. F muß am Schluß von σ als Konklusion der Anwendung einer B-Regel vorkommen, die zugleich Hauptprämisse der Anwendung einer weiteren B-Regel ist. F tritt in Π also so auf:



Dabei sind $\equiv\ \equiv\ \equiv$ die (mit G endenden) Ableitungen der Nebenprämissen der Anwendung der B-Regel, deren Hauptprämisse F ist. Dies formen wir so um:



Π' gehe aus Π durch Ersetzung dieser Ableitungsstücke hervor. Π' hängt dabei gegenüber Π von keinen neuen Annahmen ab. $\rho(\Pi')=\rho(\Pi)$ gilt, weil F weiterhin als Glied eines maximalen Segments vom Rang $\rho(\Pi)$ auftritt. Jedoch gilt: $\lambda(\Pi')<\lambda(\Pi)$, da σ gekürzt wird. Dabei beachte man, daß das mehrfache Auftreten von $\equiv\ \equiv\ \equiv$ $\lambda(\Pi)$ nicht vergrößert, da $\equiv\ \equiv\ \equiv$ nach Wahl von σ kein Aussagenvorkommen enthalten kann, das zu einem maximalen Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ gehört. Damit kann auch die (mit den untersten Aussagenvorkommen von $\equiv\ \equiv\ \equiv$ zu einem Segment gehörende) Konklusion G der

Anwendung einer B-Regel nicht zu einem maximalen Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ gehören; es ist also unwesentlich, daß das (bzw. die) Segment(e), zu dem G gehört, aufgespalten wird in Segmente, die um ein Glied länger sind. Mit Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung.

QED

Eine Ableitung heißt normal, wenn sie keine maximalen Segmente und keine redundanten Anwendungen von B-Regeln enthält.

Der Begriff der Normalität drückt aus, daß eine Ableitung keine 'überflüssigen' Regelanwendungen enthält, insbesondere keine 'Umwege' macht.

Satz 7.7 (Normalisierungssatz) Jede K_{Ω}^{i}-Ableitung von A aus Δ läßt sich in eine normale K_{Ω}^{i}-Ableitung von A aus Δ umformen.

Beweis Man wende zunächst die im Beweis von Lemma 7.6 angegebene Konstruktion zur Elimination maximaler Segmente und dann die im Beweis von Lemma 7.5 angegebene Konstruktion zur Elimination redundanter Anwendungen von B-Regeln an. Letztere erzeugt keine neuen maximalen Segmente.[1)]

QED

Ein Pfad[2)] in einer normalen Ableitung Π ist eine Folge $A_1,\ldots,A_n$ von Aussagenvorkommen aus Π , für die gilt:

============

1) Durch die Beweise der Lemmata 7.5 und 7.6 sind keine eindeutigen Umformungsverfahren gegeben, so daß die resultierende normale K_{Ω}^{i}-Ableitung nicht eindeutig bestimmt ist. POTTINGER 1976 gibt ein Beispiel für verschiedene sich nach dem Verfahren von PRAWITZ (1965) (an das wir uns oben angeschlossen haben) aus einer Ausgangsableitung ergebende normale Ableitungen und formuliert selbst eine Verschärfung des Normalisierungsverfahrens, die zu eindeutigen Resultaten führt. Für uns ist dies jedoch nicht wesentlich; wir benötigen nur das Ergebnis, daß sich überhaupt eine normale Ableitung effektiv konstruieren läßt.

2) Im Gegensatz zu PRAWITZ' (1965) Definition von "path" beschränken wir den Begriff "Pfad" auf normale Ableitungen.

1) A_1 ist ein oberstes Aussagenvorkommen in Π, das nicht durch Heranziehung einer Annahme zustandegekommen ist, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird.
2) Für alle i ($1 \leq i < n$) ist A_i nicht Prämisse einer Anwendung einer Annahmeregel, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird, und entweder
2a) A_i ist nicht Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel, und A_{i+1} ist das unmittelbar unter A_i stehende Aussagenvorkommen, oder
2b) A_i ist Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel und A_{i+1} eines der Aussagenvorkommen, die Konklusion einer Anwendung einer solchen Annahmeregel sind, die bei der vorliegenden Anwendung der B-Regel gelöscht wird. (Solche Aussagenvorkommen existieren bei normalen Ableitungen immer, da diese keine redundanten Anwendungen von B-Regeln enthalten.)
3) A_n ist Prämisse einer Anwendung einer Annahmeregel, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird, oder A_n ist das unterste Aussagenvorkommen von Π.

Ein Pfad beginnt also mit einem obersten Aussagenvorkommen von Π, falls dieses nicht durch Heranziehung einer Annahme zustandegekommen ist, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird, geht dann solange zum nächsttieferen Aussagenvorkommen über, bis dieses <u>entweder</u> Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel <u>oder</u> Prämisse einer Anwendung einer solchen Annahmeregel, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird, <u>oder</u> das unterste Aussagenvorkommen von Π ist. In den letzten beiden Fällen endet der Pfad. Im ersten Fall geht er über zur Konklusion einer Anwendung einer Annahmeregel, welche bei der vorliegenden Anwendung der B-Regel gelöscht wird.

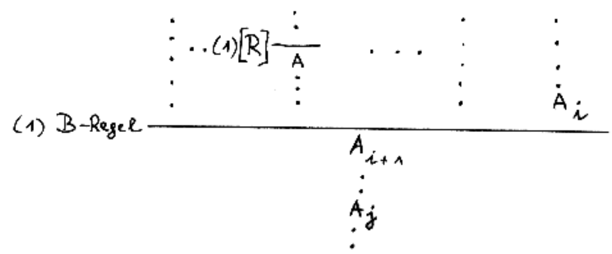
Ein <u>Hauptpfad</u> oder <u>Pfad 0. Ordnung</u> in einer normalen Ableitung Π ist ein Pfad, der mit dem untersten Aussagenvorkommen von Π endet. Ein <u>Pfad (n+1)-ter Ordnung</u> ist ein Pfad, dessen letztes Glied in Π unmittelbar über einem Aussagenvorkommen steht, das zu einem Pfad n-ter Ordnung gehört.

Lemma 7.8 Sei $A_1,\ldots,A_n$ ein Faden von Π . Für alle i,j mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt: A_j gehört zum selben Pfad wie A_i oder zu einem Pfad kleinerer Ordnung als A_i.

Beweis Da der Beweisbaum Π sich von unten nach oben verzweigt, ist jedem Faden $A_1,\ldots,A_n$ eineindeutig ein oberstes Aussagenvorkommen A_1 in Π zugeordnet. Diese obersten Aussagenvorkommen können wir von links nach rechts durchnummerieren, so daß jedes oberste Aussagenvorkommen A eine natürliche Zahl erhält. Diese Zahl bezeichnen wir als Index des Fadens $A_1,\ldots,A_n$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über diesem Index.

Ist er 1, dann ist $A_1,\ldots,A_n$ der "linkeste" Faden in Π , A_i kann also nicht Hauptprämisse der Anwendung einer B-Regel sein (weil es sonst noch links neben A_i stehende Nebenprämissen geben würde). Falls A_{i+1} also nicht zum selben Pfad gehört wie A_i, ist A_i das letzte Glied eines Pfades, A_{i+1} gehört also als das in Π unmittelbar unter A_i stehende Aussagenvorkommen zu einem Pfad kleinerer Ordnung. Durch (j-i)-fache Anwendung dieser Argumentation erhält man die Behauptung für A_j.

Ist der Index des Fadens >1 und gehört A_{i+1} nicht zum selben Pfad wie A_i, dann ist A_i entweder das letzte Glied eines Pfades und man argumentiert wie vorher. Oder A_i ist Hauptprämisse der Anwendung einer B-Regel, das im Pfad auf A_i folgende Glied A ist also Konklusion der Anwendung einer Annahmenregel, die bei Anwendung dieser B-Regel wieder gelöscht wird:



Dann gehört A zu einem Faden mit kleinerem Index (weil es ein "linkerer" Faden ist), der jedoch durch A_{i+1} und damit durch A_j geht. Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf A (das ja zum selben Pfad wie A_i gehört) und A_j ergibt die Behauptung. [Exakter müßte man beim ganzen Beweis Paarinduktion führen über $\langle s,k \rangle$, wobei s Index des Pfades und k=j-i.]

QED

Ein Abschnitt $A_1, \ldots, A_n$ eines Pfades π in Π heißt <u>Nebenabschnitt</u> (wobei n=1 sein darf, also eingliedrige Abschnitte zugelassen sind), wenn gilt:

1) A_1 ist nicht Konklusion einer Anwendung einer atomaren Grundregel oder einer Annahmeregel, es sei denn, die Stufe einer solchen Regel ist 0 (d.h. A_1 ist das erste Glied von π) oder eine solche Annahmeregel wird bei Anwendung einer B-Regel gelöscht.

2) A_n ist nicht Prämisse einer Anwendung einer atomaren Grundregel oder einer Annahmeregel, es sei denn, A_n ist das letzte Glied von π.

3) Falls $n > 1$, ist A_i für alle i mit $1 \leq i < n$ Prämisse einer Anwendung einer atomaren Grundregel oder einer Annahmeregel.

4) Falls n=1, ist A_1 ($\equiv A_n$) das erste oder letzte Glied von π.

Ein Abschnitt $A_1, \ldots, A_n$ eines Pfades π in Π heißt <u>Hauptabschnitt</u> (wobei hier n=1 <u>nicht</u> zugelassen ist), wenn A_1 letztes Glied einer Nebenabschnittes von π ist, A_n erstes Glied eines Nebenabschnittes von π und kein A_i $(1<i<n)$ zu einem Nebenabschnitt gehört.

Hauptabschnitte sind also maximale Abschnitte eines Pfades, auf dessen Aussagenvorkommen keine Regeln außer Operator-Grundregeln angewendet werden. Nebenabschnitte sind die zwischen den Hauptabschnitten liegenden Pfadstücke und umgekehrt, wobei der Endpunkt eines Nebenabschnittes zugleich Anfangspunkt eines Hauptabschnittes ist und der Endpunkt eines Hauptabschnittes zugleich Anfangspunkt eines Nebenabschnittes - mit zwei Ausnahmen: Das erste und letzte Glied des Pfades gehören <u>immer</u> zu einem Nebenabschnitt; zu einem Hauptabschnitt jedoch nur dann, wenn auch das zweite bzw. das vorletzte Glied ebenfalls zu diesem Hauptabschnitt gehört (denn wir haben einelementige Hauptabschnitte nicht zugelassen). Enthält ein Pfad also k Hauptabschnitte, dann enthält er k+1 Nebenabschnitte. Wir können einen Pfad so in Abschnitte aufteilen:

$$(1) \quad A_1, \ldots, A_{j_1}, \ldots, A_{j_1'}, \ldots, A_{j_2}, \ldots, A_{j_2'}, \ldots\ldots, A_{j_k}, \ldots, A_{j_k'}, \ldots, A_n \; .$$

Dabei ist H_i $(1 \leq i \leq k)$ der sich von A_{j_i} bis $A_{j_i'}$ erstreckende i-te Hauptabschnitt, N_i $(1 \leq i \leq k+1)$ der i-te Nebenabschnitt. Wie gesagt kann N_1 u. U. nur aus A_1 bestehen, also $A_1 \equiv A_{j_1}$ sein, ebenso kann u. U. $A_n \equiv A_{j'_k}$ sein.

Offensichtlich kann man einen Hauptabschnitt H eines Pfades aufteilen in aufeinanderfolgende Segmente $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Wenn wir im folgenden ein ganzes Segment als Prämisse der Anwendung einer Regel bezeichnen, meinen wir damit sein letztes Glied (d.h. sein unterstes Aussagenvorkommen), wenn wir es als Konklusion der Anwendung einer Regel bezeichnen, meinen wir sein erstes Glied (d.h. sein oberstes Aussagenvorkommen). Wenn wir ein Segment als Subaussage eines anderen Segments bezeichnen, meinen wir die Aussagen, aus deren (evtl. mehrfachem) Vorkommen die betreffenden Segmente bestehen.

Aus den Definitionen von "Pfad" und "Hauptabschnitt" ersieht man, daß man im Hauptabschnitt eines Pfades immer von Aussagen zu Subaussagen bzw. von Subaussagen zu Aussagen übergeht. So sind gerade diese Definitionen konstruiert worden. Genaueres dazu sagt das folgende Lemma:

<u>Lemma 7.9</u> Sei H Hauptabschnitt eines Pfades in einer normalen K^i_Ω-Ableitung Π. Sei $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die Folge der Segmente, aus denen H besteht. Dann gibt es ein "minimales" Segment σ_i $(1 \leq i \leq n)$, so daß gilt:
(i) Für jedes j $(1 \leq j < i)$ ist σ_j Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel und σ_{j+1} ist K^i_Ω-Subaussage von σ_j.
(ii) Für jedes j $(i \leq j < n)$ ist σ_j Prämisse einer Anwendung einer E-Regel und σ_j ist K^i_Ω-Subaussage von σ_{j+1}.
$\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ heißt auch <u>Beseitigungsteil</u>; $\sigma_i, \ldots, \sigma_n$ auch <u>Einführungsteil</u> von H.

<u>Beweis</u> Alle σ_j, die Hauptprämissen der Anwendung von B-Regeln sind, gehen in H allen σ_k, die Prämissen der Anwendung von E-Regeln sind, voran. Sonst gäbe es ein σ_j, so daß σ_j Prämisse der Anwendung einer E-Regel, σ_{j+1} jedoch Hauptprämisse der Anwendung einer B-Regel ist. (Man beachte dabei, daß in einem Hauptabschnitt eines Pfades keine

atomaren Grundregeln oder Annahmeregeln angewandt werden.) Ein solches σ_j wäre ein maximales Segment, im Widerspruch zur Normalität von Π . Die Aussagen über Subaussagen sind trivial.

QED

Sei Π eine Ableitung. Eine Anwendung einer Annahmeregel R <u>geht</u> in der Anwendung einer Annahmeregel R' <u>unmittelbar auf</u>, wenn diese Anwendung von R durch Anwendung von R' gelöscht wird. Eine Anwendung von R <u>geht</u> in einer Anwendung von R' <u>auf</u>, wenn es Anwendungen von Annahmeregeln $R_1, \ldots, R_n$ gibt, so daß die Anwendung von R in derjenigen von R_1, diejenige von R_1 in derjenigen von $R_2, \ldots$, diejenige von R_n in derjenigen von R' unmittelbar aufgeht.

<u>Lemma 7.10</u> Wenn eine Anwendung von R in einer Anwendung von R' aufgeht, so sind alle K_Ω^i-Subaussagen von R auch solche von R'.

<u>Beweis</u> trivial. (Man beachte, daß Annahmeregeln immer konkrete Regeln sind.)

QED

<u>Lemma 7.11</u> Wenn eine Annahmeregel R bei Anwendung einer (nicht notwendigerweise konkreten) Regel R' gelöscht wird, so gehört jede Prämisse der Anwendung von R jeweils mit der Konklusion der Anwendung von R und der Konklusion der Anwendung von R' zu demselben Faden.

<u>Beweis</u> trivial.

QED

Jetzt können wir das Subaussagenprinzip beweisen:

<u>Beweis von Satz 7.2</u> Wir behaupten, daß wir als Π' eine nach Satz 7.7 zu Π existierende normale Ableitung wählen können. Wir zeigen also: Sei Π' normale K_Ω^i-Ableitung von A aus Δ . Dann ist jede in Π' vorkommende nichtatomare Aussage eine K_Ω^i-Subaussage von Δ oder A. Da jede in Π' vorkommende Aussage in mindestens einem Pfad vorkommt, genügt es, die Behauptung für alle Pfade zu zeigen. Sei π ein Pfad der Gestalt (1):

$$\underbrace{A_1, \ldots,}_{N_1} \underbrace{A_{j_1}, \ldots, A_{j_1'}}_{H_1}, \underbrace{\ldots,}_{N_2} \underbrace{A_{j_2}, \ldots, A_{j_2'}}_{H_2}, \ldots\ldots, \underbrace{A_{j_k}, \ldots, A_{j_k'}}_{H_k}, \underbrace{\ldots, A_n}_{N_{k+1}}$$

(Vgl. auch die Bemerkungen dazu oben S. 112f.)

Nach Lemma 7.9 gilt: Alle in den H_s $(1 \leq s \leq k)$ vorkommenden Aussagen sind K^i_Ω-Subaussagen von A_{j_s} oder $A_{j_s'}$. Es genügt also zu zeigen:

(*) Alle in den N_s $(1 \leq s \leq k+1)$ vorkommenden Aussagen sind atomar oder K^i_Ω-Subaussagen von Δ oder A.

Falls N_{k+1} nur A_n enthält und π Hauptpfad ist, ist A_n mit A identisch, also A_n trivialerweise K^i_Ω-Subaussage von Δ oder A. In allen anderen Fällen sind die in N_s $(1 \leq s \leq k+1)$ vorkommenden nichtatomaren Aussagen Prämisse oder Konklusion der Anwendung von Annahmeregeln. Für Nebenabschnitte, die aus mehr als einem Aussagenvorkommen bestehen, folgt dies sofort aus der Definition von "Nebenabschnitt". Besteht N_1 nur aus A_1, wobei A_1 nicht atomar, kann A_1 nur durch Heranziehung von A_1 als Annahmeregel abgeleitet worden sein. Enthält N_{k+1} nur A_n und ist π kein Hauptpfad, so ist A_n Prämisse einer Anwendung einer Annahmeregel, da Pfade der Ordnung >0 nur so enden können.

Sei R eine Annahmeregel, deren Prämisse oder Konklusion einer bestimmten Anwendung in ein N_s $(1 \leq s \leq k+1)$ fällt. Wenn R schon Glied von Δ ist, dann ist für die Prämisse oder Konklusion der betrachteten Anwendung nichts mehr zu zeigen. Wenn die Anwendung von R in der Anwendung einer anderen Regel R' aufgeht, die Glied von Δ ist, ist wegen Lemma 7.10 nichts mehr zu zeigen. Einzig übrigbleibender Fall ist, daß die Anwendung von R oder die Anwendung einer Regel R', in der die Anwendung von R aufgeht, bei Anwendung einer E- oder B-Regel gelöscht wird. Wegen Lemma 7.10 ist es ausreichend, nur solche Regeln zu betrachten, die bei Anwendung einer E- oder B-Regel gelöscht werden, also zu zeigen:

(**) Sei R eine Annahmeregel, deren Prämisse oder Konklusion einer Anwendung in ein N_s ($1 \leq s \leq k+1$) fällt, wobei diese Anwendung von R bei Anwendung einer E- oder B-Regel gelöscht wird. Dann sind alle K_{Ω}^{i}-Subaussagen von R auch solche von Δ oder A.

Wir können uns nun weiterhin die Betrachtung solcher Annahmeregeln R sparen, die bei Anwendung einer B-Regel gelöscht werden und deren Konklusion $(R)_2$ zu π gehört. Denn dann gehören die Prämissen der Anwendung von R und damit auch die Prämissen oder Konklusionen von Regelanwendungen, die in der Anwendung von R aufgehen, nicht zu π, sind also für die Behauptung (*) nicht relevant. Da ferner in diesem Fall $(R)_2$ in π auf eine Hauptprämisse der Anwendung einer Beseitigungsregel folgt, also auf jeden Fall zu einem Hauptabschnitt gehört, kann $(R)_2$ nur dann auch zu einem Nebenabschnitt gehören, wenn $(R)_2$ Prämisse der Anwendung einer atomaren Grundregel oder einer weiteren Annahmeregel R' ist. Falls $(R)_2$ atomar ist, ist nichts zu zeigen; falls $(R)_2$ Prämisse der Anwendung von R' ist, ist für $(R)_2$ nichts mehr zu zeigen, falls man (**) für R' beweisen kann. An Anwendungen von Annahmeregeln R, die bei Anwendung einer B-Regel gelöscht werden, interessieren uns also nur die, deren Konklusion nicht zu π gehört, d.h. von denen eine Prämisse zu π gehört. Es reicht also aus zu beweisen:

(***) Sei R eine Annahmeregel, deren Prämisse oder Konklusion einer Anwendung in ein N_s ($1 \leq s \leq k+1$) fällt, wobei diese Anwendung von R bei Anwendung einer E-Regel gelöscht wird, oder deren Prämisse einer Anwendung in ein N_s ($1 \leq s \leq k+1$) fällt, wobei diese Anwendung von R bei Anwendung einer B-Regel gelöscht wird.

Wir beweisen (***) durch Induktion über der Ordnung von π.

Sei π Hauptpfad. Dann kommt nur der Fall in Frage, daß R bei Anwendung einer E-Regel gelöscht wird. Wir führen (innerhalb des Induktionsanfanges) eine Induktion über (k+1)-s, wobei s die Nummer des Nebenabschnittes N_s ist, in den die Prämisse oder Konklusion der Anwendung von R fällt. Der Fall (k+1)-s=0, d.h. s=k+1 kann gar nicht auftreten: Denn die Konklusion der Anwendung der E-Regel, bei der R gelöscht wird, müßte wegen Lemma 7.11 und Lemma 7.8 zu π gehören. Das kann aber nicht sein, da Konklusionen der Anwendung von E-Regeln nur in Haptabschnitten auftreten können, auf N_{k+1} jedoch kein Hauptabschnitt mehr folgt. Sei $(k+1)-s>0$: Wegen Lemma 7.11 und Lemma 7.8 muß in π die Konklusion $S(B_1,\dots,B_r)$ der Anwendung einer E-Regel vorkommen, bei der R gelöscht wird. $S(B_1,\dots,B_r)$ muß in einem Hauptabschnitt $H_{s'}$ vorkommen, der aus N_s folgt, also $s' \geq s$. Weiterhin gehört $S(B_1,\dots,B_r)$ zum Einführungsteil von $H_{s'}$, ist also K^i_Ω-Subaussage eines Aussagenvorkommens von $N_{s'+1}$, das Subaussage einer Annahmeregel ist, deren Prämissen oder Konklusion einer Anwendung in ein $N_{s''}$ mit $s''>s'$ $(\geqslant s)$ fallen.

Sei π Pfad der Ordnung $o>0$.

Fall a) R wird bei Anwendung einer E-Regel gelöscht. Falls die Konklusion $S(B_1,\dots,B_r)$ der Anwendung dieser E-Regel noch zu π gehört, dann argumentiert man wie vorhin. Falls sie nicht zu π gehört, dann gehört sie nach Lemma 7.8 zu einem Pfad π' kleinerer Ordnung, für den nach Induktionsvoraussetzung $S(B_1,\dots,B_r)$ schon K^i_Ω-Subaussage von Δ oder A ist.[1]

Fall b) R wird bei Anwendung einer B-Regel gelöscht. Dann gehört die Konklusion $(R)_2$ der Anwendung von R zu einem Pfad π' der Ordnung o-1. Nach Definition von "Pfad" muß

===========

1) Genauer müßte man sagen: $S(B_1,\dots,B_r)$ ist K^i_Ω-Subaussage einer konkreten Regel R', deren Prämissen oder Konklusion einer Anwendung zu π' gehören und deren K^i_Ω-Subaussagen daher nach Induktionsvoraussetzung K^i_Ω-Subaussagen von Δ oder A sind.

in π' dem Aussagenvorkommen $(R)_2$ die Hauptprämisse $S(B_1,\ldots,B_r)$ der B-Regel vorhergehen, aufgrund deren Anwendung R gelöscht wird. Nach Definition von "K_Ω^i-Subaussage" sind alle K_Ω^i-Subaussagen von R auch solche von $S(B_1,\ldots,B_r)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $S(B_1,\ldots,B_r)$ schon K_Ω^i-Subaussage von Δ oder A.[1)]

QED

Damit haben wir nachgewiesen, daß Folgen $\Sigma_{S_1},\ldots,\Sigma_{S_\ell}$ von Operator-Grundregelsystemen nichtkreativ sind. Der zweite Hauptpunkt dieses §en ist der Nachweis der Eindeutigkeit von Operator-Grundregelsystemen Σ_S. Dazu nutzen wir aus:

Satz 7.12 S und S' seien n-stellige Operatoren aus Ω. Die Vorderregeln der S-E-Regeln seien mit denen der S'-E-Regeln identisch (d.h. S und S' haben 'dieselben' Grundregelsysteme). Dann ist

$$S(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow S'(p_1,\ldots,p_n)$$

in K_Ω ableitbar.

Beweis Wenn die S-E-Regeln die Gestalt

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \Delta_1(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \\ \quad\vdots \\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \end{array}\right.$$

haben, dann muß die S'-B-Regel die Gestalt

$$(4)\quad \Delta_1(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow p;\ldots;\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow p;S'(p_1,\ldots,p_n)\stackrel{\cdot}{\Rightarrow} p$$

haben. Aus (3) und (4) ergibt sich, wenn man beliebige Aussagen $A_1,\ldots,A_n$ für $p_1,\ldots,p_n$ und $S(A_1,\ldots,A_n)$ für p einsetzt:

$$S'(A_1,\ldots,A_n)\vdash_{K_\Omega} S(A_1,\ldots,A_n) \quad ,$$

=============

1) Siehe Anm. S. 117.

d.h. die Ableitbarkeit von

$$S'(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$

in K_Ω. Die andere Richtung ergibt sich, wenn man von den S'-E-Regeln und der S-B-Regel ausgeht.

QED

Um daraus die Eindeutigkeit gewinnen zu können, benötigen wir noch zwei Ersetzungstheoreme, nachdem es in den Ersetzungstheoremen I und II nur um die Ersetzung von Regeln (bzw. Regelsystemen) in Regeln (bzw. Regelsystemen) und nicht von Teilaussagen in Aussagen ging.

Satz 7.13 (Ersetzungstheorem III) O[A] sei eine K_Ω-Aussage, in der an einer Stelle A als Teilaussage vorkommt. O[B] sei das Ergebnis der Ersetzung dieses Vorkommens von A in O[A] durch B. Dann gilt: Falls $A \dashv\vdash_{K_\Omega} B$, dann $O[A] \dashv\vdash_{K_\Omega} O[B]$.

Beweis Induktion über rg(O[A]).
Sei rg(O[A])=0. Dann ist O[A] atomar, also O[A] mit A identisch. Damit ist die Behauptung trivial.
Sei rg(O[A])>0. Dann ist $O[A] \equiv S(A_1,\ldots,O'[A],\ldots,A_n)$, wobei S zu Ω gehörender Operator und O'[A] Aussage, in der A an einer Stelle als Teilaussage vorkommt. (Diese Schreibweise soll auch den Fall einschließen, daß O'[A] an erster oder letzter Argumentstelle steht.) Da wegen der Fundiertheit der Relation "ist unmittelbare Subaussage von" (vgl. oben S. 100f.) aufgrund der Rangdefinition jede echte Teilaussage einer Aussage von kleinerem Rang ist als diese, gilt rg(O'[A])<rg(O[A]), und daraus nach Induktionsvoraussetzung:

(5) $O'[A] \dashv\vdash O'[B]$.

Es seien

$$(6)\begin{cases} \Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \\ \vdots \\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \\ \Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p;\ldots;\Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p; S(p_1,\ldots,p_n) \dot{\Rightarrow} p \end{cases}$$

die S-Grundregeln. Wir zeigen:

(7) $\Delta_i(A_1,\ldots,O'[A],\ldots,A_n) \dashv\vdash \Delta_i(A_1,\ldots,O'[B],\ldots,A_n)$

für alle i $(1 \leq i \leq m)$.

Daraus ergibt sich mit den S-Grundregeln (6) die Behauptung:

$$S(A_1,\ldots,O'[A],\ldots,A_n) \dashv\vdash S(A_1,\ldots,O'[B],\ldots,A_n) \ .$$

Beweis von (7):
Es ist zu beachten, daß $O'[A]$ in $\Delta_i(A_1,\ldots,O'[A],\ldots,A_n)$ mehrfach vorkommen kann, so daß man gegebenenfalls mehrfache Ersetzungen vornehmen muß.

Jedes Vorkommen von $O'[A]$ in $\Delta_i(A_1,\ldots,O'[A],\ldots A_n)$, das unmittelbare Teilaussage dieses Regelsystems ist, läßt sich wegen (5) nach dem Ersetzungstheorem II(Satz 4.5) durch $O'[B]$ ersetzen.
Falls S kein Junktor ist, braucht nicht jedes Vorkommen von $O'[A]$ in $\Delta_i(A_1,\ldots,O'[A],\ldots,A_n)$ unmittelbare Teilaussage von $\Delta_i(A_1,\ldots,O'[A],\ldots A_n)$ zu sein. Ein solches Vorkommen ist jedoch echte Teilaussage einer unmittelbaren Teilaussage C von $\Delta_i(A_1,\ldots,O'[A],\ldots A_n)$. C ist damit als Aussage, in der $O'[A]$ als echte Teilaussage vorkommt, selbst eine Aussage, in der A als echte Teilaussage vorkommt, wir können also C notieren als $O''[A]$. Da weiterhin gilt: $rg(O''[A]) < rg(O[A])$, erhält man mit Induktionsvoraussetzung: $O''[A] \dashv\vdash O''[B]$, kann also auch in diesem Fall das Ersetzungstheorem II (Satz 4.5) anwenden.

<u>QED</u>

Satz 7.14 (Ersetzungstheorem IV) R[A] sei eine konkrete K_Ω-Regel, in der an einer Stelle A als Teilaussage vorkommt. R[B] sei das Ergebnis der Ersetzung dieses Vorkommens von A in R[A] durch B. Dann gilt: Falls $A \dashv\vdash_{K_\Omega} B$, dann $R[A] \dashv\vdash_{K_\Omega} R[B]$.

Beweis Kommt A in R[A] als unmittelbare Teilaussage vor, dann folgt die Behauptung aus Satz 4.5. Kommt A in R[A] als echte Teilaussage einer unmittelbaren Teilaussage C vor, also $C \equiv O[A]$, dann ergibt sich aus Satz 7.13:

(8) $O[A] \dashv\vdash O[B]$.

Man wende nun Satz 4.5 unter Benutzung von (8) als Voraussetzung an.

QED

Damit läßt sich das zweite Hauptresultat dieses §en beweisen:

Satz 7.15 Seien S,S' Operatoren aus Ω. Die Vorderregeln der S-E-Regeln seien mit den Vorderregeln der S'-E-Regeln identisch. Sei R[S] eine konkrete K_Ω-Regel, in der an einer Stelle S vorkommt. R[S'] gehe aus R[S] durch Ersetzung dieses Vorkommens von S durch S' hervor. Dann gilt: $R[S] \dashv\vdash_{K_\Omega} R[S']$.

Beweis Der in R[S'] durch S' ersetzte Operator S kommt in R[S] so vor, daß S der zu einem Operat $S(A_1,\dots,A_n)$ gehörende Operator ist, wobei $S(A_1,\dots,A_n)$ Teilaussage von R[S] ist. An entsprechender Stelle kommt $S'(A_1,\dots,A_n)$ in R[S'] als Teilaussage vor. Man kann also R[S] als konkrete Regel auffassen, in der $S(A_1,\dots,A_n)$ als Teilaussage vorkommt, und R[S'] als diejenige konkrete Regel, in der dieses Vorkommen von $S(A_1,\dots,A_n)$ durch $S'(A_1,\dots,A_n)$ ersetzt worden ist. Da nach Satz 7.12 gilt: $S(A_1,\dots,A_n) \dashv\vdash_{K_\Omega} S'(A_1,\dots,A_n)$, folgt mit Satz 7.14 die Behauptung.

QED

Damit ist gezeigt, daß Folgen von Operator-Grundregelsystemen der in § 6 angegebenen Gestalt die in § 5 von uns geforderten beiden Adäquatheitsbedingungen erfüllen.

§ 8. Die Operatorenvollständigkeit des Systems $\wedge\vee\rightarrow$

Wir wollen nun zeigen, daß sich jeder Operator S, der durch die in § 6 entwickelten E- und B-Regeln gegeben ist, auf drei Standardjunktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$, deren Regelsysteme unten noch anzugeben sind, zurückführen läßt, und zwar in folgendem Sinne:

Satz 8.1 Sei Ω System von Operatoren $S_1 \ldots S_\ell$ und sei $\leq_{S_1}, \ldots, \leq_{S_\ell}$ methodisch zulässig für Ω. Dann gibt es zu jedem n-stelligen Operator S aus Ω eine $\wedge\vee\rightarrow$-Formel $F(p_1,\ldots,p_n)$, so daß gilt:

$$S(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow F(p_1,\ldots,p_n)$$

ist in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ ableitbar.

Beweis siehe unten S. 127f.

D.h.: Jeder Operator aus Ω ist in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ durch eine $\wedge\vee\rightarrow$-Formel explizit definierbar. Aufgrund von Ersetzungstheorem IV (Satz 7.14) kann man dann jeden von $\wedge, \vee, \rightarrow$ verschiedenen Operator in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ aus allen Ableitungsbeziehungen eliminieren. Das Resultat von Satz 8.1 bezeichnen wir auch als Operatorenvollständigkeit[1] des Operatorensystems $\wedge\vee\rightarrow$ im Unterschied zur semantischen Vollständigkeit eines formalen Logikkalküls (vgl. § 9).

In § 6 sprachen wir schon von der expliziten Definierbarkeit eines Operators S durch ein Regelsystem, wenn S als einzige E-Regel

$$\Delta(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$

hatte, wenn also die S-Grundregeln gleichwertig waren mit

$$S(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow \Delta(p_1,\ldots,p_n).$$

Im Unterschied dazu ist in Satz 8.1 von der Definierbarkeit aller von $\wedge, \vee, \rightarrow$ verschiedenen Operatoren durch Formeln $F(p_1,\ldots,p_n)$ und nicht nur durch Regelsysteme $\Delta(p_1,\ldots,p_n)$ die Rede, also eine stärkere Form der Definierbarkeit behauptet. Da jede Definierbarkeit durch Formeln zugleich eine durch Regelsysteme ist - denn jede

---

1) In Analogie zur Rede von der "funktionalen Vollständigkeit" in der klassischen Logik.- Es ist selbstverständlich nicht ausgeschlossen, daß es neben $\wedge\vee\rightarrow$ noch andere operatorenvollständige Systeme gibt.

Formel ist ein spezielles Regelsystem –, würde aus Satz 8.1 die explizite Definierbarkeit <u>aller</u> Operatoren durch Regelsysteme folgen, falls die Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ durch Regelsysteme explizit definierbar wären. Dies ist jedoch nicht der Fall. In § 15 (vgl. besonders Satz 15.7) werden wir zeigen, daß $\vee$ nicht durch ein Regelsystem explizit definierbar ist.

Wir geben nun die Regelsysteme für die Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ an. Dabei wollen wir eine Ausnahme von der bisherigen Schreibweise machen und $(p_1 \wedge p_2)$, $(p_1 \vee p_2)$, $(p_1 \rightarrow p_2)$ statt $\wedge(p_1, p_2)$, $\vee(p_1, p_2)$, $\rightarrow(p_1, p_2)$ schreiben. Die Grundregelsysteme sollen lauten:

$$\Sigma_\wedge \begin{cases} (\wedge\text{-E}) & p_1, p_2 \Rightarrow (p_1 \wedge p_2) \\ (\wedge\text{-B}) & p_1, p_2 \Rightarrow p; (p_1 \wedge p_2) \dot{\Rightarrow} p \end{cases}$$

$$\Sigma_\vee \begin{cases} (\vee\text{-E}) & \begin{cases} p_1 \Rightarrow (p_1 \vee p_2) \\ p_2 \Rightarrow (p_1 \vee p_2) \end{cases} \\ (\vee\text{-B}) & p_1 \Rightarrow p; p_2 \Rightarrow p; (p_1 \vee p_2) \dot{\Rightarrow} p \end{cases}$$

$$\Sigma_\rightarrow \begin{cases} (\rightarrow\text{-E}) & p_1 \Rightarrow p_2 \dot{\Rightarrow} (p_1 \rightarrow p_2) \\ (\rightarrow\text{-B}) & p_1 \Rightarrow p_2 \dot{\Rightarrow} p; (p_1 \rightarrow p_2) \ddot{\Rightarrow} p \end{cases} .$$

Da $\wedge$ und $\rightarrow$ nur einzeilige Systeme von E-Regeln besitzen, sind nach Satz 6.3 $\Sigma_\wedge$ und $\Sigma_\rightarrow$ gleichwertig mit

$$(p_1 \wedge p_2) \Leftrightarrow p_1, p_2$$

bzw.

$$(p_1 \rightarrow p_2) \dot{\Leftrightarrow} p_1 \Rightarrow p_2 \quad ,$$

was nach unseren Vereinbarungen aus § 4 dasselbe ist wie

$$(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_1$$

$$(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_2$$

$$p_1, p_2 \Rightarrow (p_1 \wedge p_2)$$

bzw.

$$(p_1 \to p_2), p_1 \Rightarrow p_2$$

$$p_1 \Rightarrow p_2 \ \dot{\Rightarrow} (p_1 \to p_2) \quad .$$

Mit $\wedge$-B und $\to$-B sind also gleichwertig die Beseitigungsregeln

$$(1) \begin{cases} (p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_1 \\ (p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_2 \end{cases}$$

und

$$(2) \qquad (p_1 \to p_2),\ p_1 \Rightarrow p_2 \quad ,$$

die man aus den üblichen Formalisierungen des natürlichen Schließens kennt. Deshalb werden wir stillschweigend (1) und (2) als $\wedge$-bzw. $\to$-Beseitigungsregeln benutzen, meinen also künftig (1) bzw. (2), wenn wir in Ableitungen $\wedge$-B bzw. $\to$-B notieren. (1) und (2) mit $\wedge$-B bzw. $\to$-B identifizierend, können wir auch sagen, daß $\Sigma_\wedge, \Sigma_\vee, \Sigma_\to$ Systeme von Regeln höchstens 2. Stufe sind.

$\wedge, \vee, \to$ heißen auch Konjunktor, Adjunktor, Subjunktor; Aussagen $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ auch Konjungat, Adjungat, Subjungat. Auf Klammern werden wir verzichten, wenn keine Mißverständnisse auftreten können. Ebenso werden wir bei mehrfachen Konjungaten und Adjungaten auf die Klammerung verzichten, schreiben also z.B. $(A_1 \vee A_2 \vee A_3) \to (A_4 \wedge A_5 \wedge A_6)$, da man für $\wedge$ und $\vee$ leicht die Assoziativitätsgesetze nachweist.

Als Vorbereitung zum Beweis von Satz 8.1 ordnen wir jedem nichtleeren System Δ von (nicht notwendigerweise konkreten) $K_{\wedge\vee\to\Omega}$-Regeln eine $K_{\wedge\vee\to\Omega}$-Formel Δ^* zu:

X^* sei mit X identisch für Formeln X,
$(R_1,\ldots,R_s \Rightarrow X)^*$ sei $((R_1{}^* \wedge \ldots \wedge R_s{}^*) \to X)$ für eine Regel $R_1,\ldots,R_s \Rightarrow X$,
$(R_1,\ldots,R_s)^*$ sei $(R_1{}^* \wedge \ldots \wedge R_s{}^*)$ für ein aus den Regeln $R_1,\ldots,R_s$ bestehendes Regelsystem.

Wie man sofort sieht, ist Δ^* eine $\wedge\vee\to\Omega$-Formel, falls Δ ein System von Ω-Regeln ist.

Lemma 8.2 Sei R eine $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$-Regel, β eine Belegung von R. Dann ist $R^{*\beta} \equiv R^{\beta *}$.

Beweis trivial.

QED

Lemma 8.3 Sei Δ nichtleeres System von konkreten K_{Ω}-Regeln. Dann gilt: $\Delta \underset{K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}}{\dashv\vdash} \Delta^*$

Beweis Induktion über dem Aufbau von Δ.
Ist Δ Aussage, dann ist Δ^* mit Δ identisch, die Behauptung also trivial.
Ist $\Delta \equiv R_1,\dots,R_s \Rightarrow A$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung:

(3) $R_i \dashv\vdash R_i^*$ für jedes i $(1 \leq i \leq s)$.

Daraus folgt:

$$R_1,\dots,R_s \dashv\vdash R_1^*,\dots,R_s^*$$

und daraus unter Verwendung der $\wedge$-Grundregeln:

(4) $R_1,\dots,R_s \dashv\vdash R_1^* \wedge\dots\wedge R_s^*$.

Daraus mit Satz 4.2 und Satz 4.3 (i):

$$R_1,\dots,R_s \Rightarrow A \dashv\vdash (R_1^* \wedge\dots\wedge R_s^*) \Rightarrow A$$

und daraus mit den $\rightarrow$-Grundregeln

$$R_1,\dots,R_s \Rightarrow A \dashv\vdash (R_1^* \wedge\dots\wedge R_s^*) \rightarrow A \text{ , d.h. } \Delta \dashv\vdash \Delta^*.$$

Ist $\Delta \equiv R_1,\dots,R_s$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung: (3), woraus wieder (4) folgt. (4) besagt jetzt gerade: $\Delta \dashv\vdash \Delta^*$.

QED

Im folgenden Satz beweisen wir die explizite Definierbarkeit von Junktoren durch $\wedge\vee\rightarrow$-Formeln. Dieses Resultat wird dann im Beweis von Satz 8.1 als Induktionsanfang dienen.

Satz 8.4 Zu jedem n-stelligen Junktor S aus Ω gibt es eine $\wedge\vee\rightarrow$-Formel, so daß

$$S(p_1,\dots,p_n) \Leftrightarrow F(p_1,\dots,p_n)$$

in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ ableitbar ist.

Beweis S habe die Grundregeln:

$$\Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$
$$\vdots$$
$$\Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$

$$\Delta_1(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow p;\ldots;\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow p; S(p_1,\ldots,p_n) \stackrel{\cdot}{\Rightarrow} p\ .$$

Wir behaupten, daß wir für $F(p_1,\ldots,p_n)$ die Formel

$$(\Delta_1(p_1,\ldots,p_n))^* \vee \ldots . \vee (\Delta_m(p_1,\ldots,p_n))^*$$

wählen können. Dies ist sicherlich eine $\wedge\vee\rightarrow$-Formel, da in einem System von Vorderregeln der E-Regeln eines Junktors kein Operator auftreten darf. Wir müssen nun zeigen, daß für alle $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$-Aussagen $A_1,\ldots,A_n$

$$S(A_1,\ldots,A_n) \Leftrightarrow (\Delta_1(A_1,\ldots,A_n))^* \vee \ldots \vee (\Delta_m(A_1,\ldots,A_n))^*$$

$K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$-ableitbar ist.

Wenn wir für feste $A_1,\ldots,A_n$ die Aussage $(\Delta_i(A_1,\ldots,A_n))^*$ mit Δ_i^* $(1 \leq i \leq m)$ abkürzen, müssen wir also zeigen:

(5) $\quad S(A_1,\ldots,A_n) \underset{K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}}{\dashv\vdash} \Delta_1^* \vee \ldots \vee \Delta_m^*$,

wobei der Nachweis von (5) unabhängig von der Wahl der $A_1,\ldots,A_n$ sein muß.

Beweis von (5)

Richtung $\vdash$: Aus den $\vee$-E-Regeln ergibt sich (verallgemeinert für mehrfache Adjungate):

(6) $\quad \Delta_i^* \vdash \Delta_1^* \vee \ldots \vee \Delta_m^*$ für jedes i $(1 \leq i \leq m)$.

Aus Lemma 8.3 ergibt sich:

(7) $\quad \Delta_i(A_1,\ldots,A_n) \vdash \Delta_i^*$ für jedes i $(1 \leq i \leq m)$.

Aus (6) und (7):

$\Delta_i(A_1,\ldots,A_n) \vdash \Delta_1^* \vee \ldots \vee \Delta_m^*$ für jedes i $(1 \leq i \leq m)$.

Daraus mit S-Beseitigung:

$$S(A_1,\ldots,A_n) \vdash \Delta_1^* \vee \ldots \vee \Delta_m^*\ .$$

Richtung $\dashv$: Aus Lemma 8.3 ergibt sich

$\Delta_i^* \vdash \Delta_i(A_1,\ldots,A_n)$ für jedes i $(1 \leq i \leq m)$.

Daraus mit S-Einführung:

(8) $\quad \Delta_i^* \vdash S(A_1,\dots,A_n)$ $\qquad$ für jedes i $\quad (1 \leq i \leq m)$.

Aus der $\vee$-B-Regel ergibt sich (verallgemeinert für mehrfache Adjungate):

(9) $\Delta_1^* \Rightarrow S(A_1,\dots,A_n);\dots;\Delta_m^* \Rightarrow S(A_1,\dots,A_n);\ \Delta_1^* \vee \dots \vee \Delta_m^* \vdash S(A_1,\dots,A_n)$.

Aus (8) und (9) folgt mit Satz 4.1:

$$\Delta_1^* \vee \dots \vee \Delta_m^* \vdash S(A_1,\dots,A_n).$$

Dieser Beweis ist offensichtlich unabhängig von der Wahl der $A_1,\dots,A_n$.

QED

Jetzt können wir Satz 8.1 beweisen:

Beweis von Satz 8.1

Wir führen Induktion über i, wobei S_i der i-te Operator aus Ω, d.h. wir zeigen für jedes i $(1 \leq i \leq \ell)$:
Wenn für jedes j $(1 \leq j < i)$ S_j durch eine $\wedge\vee\rightarrow$-Formel explizit definierbar ist, dann auch S_i.
Da S_1 ein Junktor ist, ist der Induktionsanfang mit Satz 8.4 nachgewiesen.
Wir nehmen also nun an, daß $i > 1$ ist. Wir müssen eine $\wedge\vee\rightarrow$-Formel $F_i(p_1,\dots,p_n)$ angeben, so daß

$$S_i(p_1,\dots,p_n) \Leftrightarrow F_i(p_1,\dots,p_n)$$

in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ ableitbar ist.
Σ_{S_i} habe wie üblich die Gestalt:

$$(10)\left\{\begin{array}{l} \Delta_1(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow S_i(p_1,\dots,p_n) \\ \qquad\vdots \\ \Delta_m(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow S_i(p_1,\dots,p_n) \\ \Delta_1(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow p;\dots;\Delta_m(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow p; S_i(p_1,\dots,p_n) \dot{\Rightarrow} p \end{array}\right. .$$

Da $\Sigma_{S_1},\dots,\Sigma_{S_\ell}$ für Ω methodisch zulässig ist, können in jedem Regelsystem $\Delta_s(p_1,\dots,p_n)$ $(1 \leq s \leq m)$ höchstens Operatoren S_j mit $j < i$ auftreten. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun für jedes solche S_j eine $\wedge\vee\rightarrow$-Formel $F_j(p_1,\dots,p_n)$, so daß

$$S_j(p_1,\dots,p_n) \Leftrightarrow F_j(p_1,\dots,p_n)$$

in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ ableitbar ist.
Unter sukzessiver Anwendung unserer Ersetzungstheoreme kann man also alle S_j $(1 \leq j < i)$ aus jedem $\Delta_s(p_1,\ldots,p_n)$ $(1 \leq s \leq m)$ eliminieren, also für jedes s $(1 \leq s \leq m)$ ein Regelsystem $\mathring{\Delta}_s(p_1,\ldots,p_n)$ angeben, in dem außer $\wedge, \vee, \rightarrow$ keine Operatoren vorkommen und für das

$$\mathring{\Delta}_s(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow \Delta_s(p_1,\ldots,p_n)$$

in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ ableitbar ist.
Aufgrund dessen ist (10) gleichwertig mit dem System

$$(11) \qquad \begin{array}{l} \mathring{\Delta}_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S_i(p_1,\ldots,p_n) \\ \vdots \\ \mathring{\Delta}_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S_i(p_1,\ldots,p_n) \end{array}$$

$$\mathring{\Delta}_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p;\ldots;\mathring{\Delta}_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p; S_i(p_1,\ldots,p_n) \dot{\Rightarrow} p \ ,$$

wobei jetzt $\mathring{\Delta}_s(p_1,\ldots,p_n)$ $(1 \leq s \leq m)$ nur $\wedge, \vee, \rightarrow$ an Operatoren enthält.
Analog zum Beweis von Satz 8.4 bilden wir jetzt die $\wedge\vee\rightarrow$-Formel

$$(\mathring{\Delta}_1(p_1,\ldots,p_n))^* \vee \ldots\ldots \vee (\mathring{\Delta}_m(p_1,\ldots,p_n))^*$$

und können wie im Beweis von Satz 8.4 zeigen, daß diese Formel die gewünschte Eigenschaft hat, daß also für alle $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$-Aussagen $A_1,\ldots,A_n$

$$S_i(A_1,\ldots,A_n) \Leftrightarrow (\mathring{\Delta}_1(A_1,\ldots,A_n))^* \vee \ldots \vee (\mathring{\Delta}_m(A_1,\ldots,A_n))^*$$

in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ ableitbar ist.

<u>QED</u>

Aufgrund der Operatorenvollständigkeit des Systems $\wedge\vee\rightarrow$ ergibt sich die Eliminierbarkeit aller von $\wedge, \vee, \rightarrow$ verschiedenen Operatoren in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$:

<u>Satz 8.5</u> Sei R konkrete $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$-Regel. Sei $\mathring{R}$ diejenige $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Regel, die aus R dadurch hervorgeht, daß man in R sukzessive jedes Vorkommen eines nicht mit $\wedge$, $\vee$ oder $\rightarrow$ beginnenden Operats $S(A_1,\ldots,A_n)$ durch die entsprechende nach Satz 8.1 existierende Aussage $F(A_1,\ldots,A_n)$ ersetzt, bis kein von $\wedge, \vee, \rightarrow$ verschiedener Operator mehr auftritt.
Dann gilt: $R \underset{K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}}{\dashv\vdash} \mathring{R}$.

Beweis Ergibt sich durch mehrfache Anwendung von Satz 8.4 und den Ersetzungstheoremen. Man muß sich vorher allerdings klar machen, daß die in der Formulierung des Satzes gegebene Kennzeichnung von $\mathring{R}$ eindeutig ist, daß es also auf die Reihenfolge der Ersetzungen nicht ankommt.

QED

Mithilfe von Satz 8.5 läßt sich die Einbettbarkeit von K_Ω in $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ beweisen. Umgekehrt läßt sich $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ einbetten.

Satz 8.6

(i) Seien $R_1,\ldots,R_n$ konkrete K_Ω-Regeln, A K_Ω-Aussage. $\mathring{R}_1,\ldots,\mathring{R}_n,\mathring{A}$ seien entsprechende $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Regeln wie in Satz 8.5. Dann gilt:

$$R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_\Omega} A \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1,\ldots,\mathring{R}_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow}} \mathring{A}$$

(Einbettung von K_Ω in $K_{\wedge\vee\rightarrow}$).

(ii) Seien $R_1,\ldots,R_n$ konkrete $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Regeln, A $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\ldots,Rn \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow}} A \quad \text{g.d.w.} \quad R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}} A$$

(Einbettung von $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$).

Beweis

(i) Zunächst gilt

(12) $R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_\Omega} A$ g.d.w. $R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_{\Omega\wedge\vee\rightarrow}} A$.

Die Richtung von links nach rechts ist trivial, die von rechts nach links folgt aus der Nichtkreativität von $\Sigma_{S_1},\ldots,\Sigma_{S_e},\Sigma_\wedge,\Sigma_\vee,\Sigma_\rightarrow$, da $\wedge,\vee,\rightarrow$ nicht in $R_1,\ldots,R_n,A$ vorkommen können, es sei denn, $\wedge$ oder $\vee$ oder $\rightarrow$ gehört schon zu Ω.

Aus (12) folgt trivialerweise

(13) $R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_\Omega} A$ g.d.w. $R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}} A$,

da es für die Deduktionsstärke eines Kalküls unwesentlich ist, in welcher Reihenfolge man seine Grundregeln formuliert. Da $\wedge,\vee,\rightarrow$ Junktoren sind, ist $\Sigma_\wedge,\Sigma_\vee,\Sigma_\rightarrow,\Sigma_{S_1},\ldots,\Sigma_{S_e}$ für $\wedge\vee\rightarrow\Omega$ methodisch zulässig, $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ also sinnvoll definiert. Mit Satz 8.5 folgt aus (13):

$$R_1, \ldots, R_n \vdash_{K_\Omega} A \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1, \ldots, \mathring{R}_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}} \mathring{A} .$$

Da $\mathring{R}_1, \ldots, \mathring{R}_n, \mathring{A}$ höchstens $\wedge, \vee, \rightarrow$ an Operatoren enthalten, folgt hieraus mit der Nichtkreativität von $\Sigma_\wedge, \Sigma_\vee, \Sigma_\rightarrow, \Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_l}$:

$$R_1, \ldots, R_n \vdash_{K_\Omega} A \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1, \ldots, \mathring{R}_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow}} \mathring{A} ,$$

d.h. die Behauptung.

(ii) Die Richtung von links nach rechts ist trivial, die von rechts nach links folgt aus der Nichtkreativität von $\Sigma_\wedge, \Sigma_\vee, \Sigma_\rightarrow, \Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_l}$, da $R_1, \ldots, R_n, A$ höchstens $\wedge, \vee, \rightarrow$ an Operatoren enthalten.

<u>QED</u>

$K_{\wedge\vee\rightarrow}$ ist nun ein Kalkül, dessen nichtatomare Grundregeln höchstens von 2. Stufe sind, wenn man beachtet, daß wir als $\wedge$-B-Regeln

$$p_1 \wedge p_2 \Rightarrow p_1$$

$$p_1 \wedge p_2 \Rightarrow p_2$$

und als $\rightarrow$-B-Regel

$$p_1 \rightarrow p_2, p_1 \Rightarrow p_2$$

benutzen (s.o. S. 124).

Damit ist $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ jedoch noch kein Kalkül im Sinne des in § 2 definierten GENTZENschen Kalkülbegriffs. Denn $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ kann erstens <u>atomare</u> Grundregeln von höherer als 2. Stufe enthalten, zweitens erlaubt der Deduktionsbegriff von $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ die Heranziehung und Löschung von Regeln beliebiger Stufe. Wir definieren nun einen Kalkül $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$, der ein Kalkül im GENTZENschen Sinne und mit $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ gleichwertig ist:

$K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ sei ein Kalkül im Sinne von § 2, der dasselbe Vokabular (d.h. Atome, Objektvariablen, Formeln, Aussagen) wie $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ hat. Die Grundregeln von $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ seien:

1. alle nichtatomaren Grundregeln von $K_{\wedge\vee\rightarrow}$,
2. alle Regeln der Form $(R)_1{}^* \Rightarrow (R)_2{}^*$, falls R atomare Grundregel von $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ (* ist dabei zu verstehen wie oben S. 124 definiert).

$K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ heiße auch Kalkül der positiven Logik über K.[1]
Die Gleichwertigkeit von $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ mit $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ wird in folgendem Satz formuliert:

Satz 8.7

(i) Für alle konkreten $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Regeln $R_1,\ldots,R_n$ und $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Aussagen A gilt:

$$R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow}} A \quad \text{g.d.w.} \quad R_1^*,\ldots,R_n^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\rightarrow}} A^*$$

(Einbettung von $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ in $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$).

(ii) Für alle $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ -Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ gilt:

$$A_1,\ldots,A_n \vdash_{K^*_{\wedge\vee\rightarrow}} A \quad \text{g.d.w.} \quad A_1,\ldots,A_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow}} A$$

(Einbettung von $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ in $K_{\wedge\vee\rightarrow}$).

Beweis Die Länge einer Ableitung sei die Anzahl der in ihr auftretenden Aussagenvorkommen.

(i) Richtung von links nach rechts:
Induktion über der Länge von $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Ableitungen Π.
a) Π hat Länge 1, also die Gestalt $\frac{R}{A}$, wobei R atomare Anfangsregel oder herangezogene Regel 0. Stufe. Da $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ und $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ dieselben Anfangsregeln haben bzw. für Regeln 0. Stufe gilt: $R^* \equiv R$, und ferner $A^* \equiv A$, gilt die Behauptung.
b) wendet im letzten Schritt eine Grundregel R der Stufe ≥ 1 an. $\{R_1,\ldots,R_n\}$ seien die Annahmen, von denen Π abhängt, A unterstes Aussagenvorkommen von Π . Falls R eine Operator-Grundregel ist, folgt die Behauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung, da alle nichtatomaren Grundregeln von $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ auch $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$-Grundregeln sind. (Prämissen und Konklusionen der Anwendung solcher Regeln sowie Annahmen, die dabei gelöscht werden, sind immer Aussagen B, für die gilt: $B \equiv B^*$.) Falls R eine atomare Grundregel ist, die mit Belegung β angewendet wurde, d.h. $R^\beta \equiv R^1,\ldots,R^m \Rightarrow A$,

=============

1) Genauer müßte man von "positiver intuitionistischer Logik" oder "positiver Minimallogik" sprechen, im Unterschied zur "positiven klassischen Logik", in welch letzterer z.B. die Peirce-sche Formel $((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$ ableitbar wäre. Die einfache Bezeichnung "positive Logik" erscheint jedoch dadurch gerechtfertigt, daß die klassische positive Logik eigentlich einen abgeleiteten Status hat, insofern sie ein Formalismus zur Ableitung der negationsfreien klassisch wahren Aussagen (bzw. klassisch allgemeingültigen Aussageformen) ist.

so muß schon

$R_1,\dots,R_n,(R^i)_1 \vdash_{K_{\wedge\vee\to}} (R^i)_2$ für alle i $(1 \leq i \leq m)$

gelten, wobei dafür eine kürzere Ableitung als Π vorliegt. (Zur Mitteilung der Vorderregeln von R^β wurden hochgestellte Indizes verwendet, da tiefgestellt Indizes schon verbraucht sind.) Mit Induktionsvoraussetzung ergibt sich daraus:

$R_1^*,\dots,R_n^*(R^i)_1^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\to}} (R^i)_2^*$ für alle i $(1 \leq i \leq m)$.

Daraus mit $\to$-E:

$$R_1^*,\dots,R_n^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\to}} (R^i)_1^* \to (R^i)_2^* \quad \text{für alle i} \quad (1 \leq i \leq m),$$

was dasselbe ist wie

$$R_1^*,\dots,R_n^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\to}} (R^i)^* \qquad \text{für alle } i \quad (1 \leq i \leq m).$$

Daraus mit $\wedge$-E:

$$R_1^*,\dots,R_n^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\to}} \underbrace{(R^1)^* \wedge \dots, \wedge (R^m)^*}_{\substack{\equiv \\ (R^\beta)_1^*}} .$$

Daraus ergibt sich durch Anwendung der zu R korrespondierenden Grundregel $(R)_1^* \Rightarrow (R)_2^*$ unter derselben Belegung β die Behauptung. (Man beachte $R^{*\beta} \equiv R^{\beta *}$, Lemma 8.2.)

c) Π zieht im letzten Schritt eine konkrete Regel R_j $(1 \leq j \leq n)$ der Stufe ≥ 1 als Annahme heran, wobei $\{R_1,\dots,R_n\}$ wieder die Menge der Annahmen sei, von denen Π abhängt und A das unterste Aussagenvorkommen von Π.
Sei $R_j \equiv R^1,\dots,R^m \Rightarrow A$. Dann muß schon gelten:

$$R_1,\dots,R_n(R^i)_1 \vdash_{K_{\wedge\vee\to}} (R^i)_2 \quad \text{für alle i} \quad (1 \leq i \leq m),$$

wobei dafür kürzere Ableitungen als Π vorliegen.
Daraus nach Induktionsvorraussetzung:

$$R_1^*,\dots,R_n^*,(R^i)_1^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\to}} (R^i)_2^* \quad \text{für alle i } (1 \leq i \leq m).$$

Daraus mit $\to$-E:

$$R_1^*,\dots,R_n^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\to}} (R^i)_1^* \to (R^i)_2^* \quad \text{für alle i } ,(1 \leq i \leq m),$$

was dasselbe ist wie

$R_1{}^*,\dots,R_n{}^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\Rightarrow}} (R^i)^*$ für alle i $(1 \leq i \leq m)$.

Daraus mit $\wedge$-E:

$R_1{}^*,\dots,R_n{}^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\Rightarrow}} (R_j)_1{}^*$.

Daraus mit der R_j zugeordneten Aussage $R_j{}^* \equiv (R_j)_1{}^* \rightarrow A^*$ und mit $\Rightarrow$-B:

$R_1{}^*,\dots,R_n{}^*, R_j{}^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\Rightarrow}} A^*$.

Dies ist die Behauptung, da $R_j{}^*$ in $R_1{}^*,\dots,R_n{}^*$ schon vorkommt.

Richtung von rechts nach links:

Induktion über der Länge von $K^*_{\wedge\vee\Rightarrow}$-Ableitungen Π.

a) Π hat Länge 1. Analog zu Fall a) der anderen Richtung zu behandeln.

b) Π wendet im letzten Schritt eine Grundregel der Stufe ≥ 1 an. $\{R_1{}^*,\dots,R_n{}^*\}$ seien die Annahmen, von denen Π abhängt, A^* unterstes Aussagenvorkommen von Π. Falls es sich um eine Operator-Grundregel handelt, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung, da alle Operator-Grundregeln von $K^*_{\wedge\vee\Rightarrow}$ auch $K_{\wedge\vee\Rightarrow}$-Grundregeln sind. Falls es sich um eine Grundregel der Gestalt $(R)_1{}^* \Rightarrow (R)_2{}^*$ handelt, die mit Belegung β angewendet wurde, so gilt schon

$R_1{}^*,\dots,R_n{}^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\Rightarrow}} (R)_1{}^{*\beta}$, wobei dafür eine kürzere Ableitung als Π vorliegt.

Daraus mit Induktionsvoraussetzung:

$R_1,\dots,R_n \vdash_{K_{\wedge\vee\Rightarrow}} (R)_1{}^{\beta *}$.

(Man beachte, daß $(R)_1{}^{*\beta} \equiv (R)_1{}^{\beta *}$ und $(R)_1{}^{\beta *} \equiv (R)_1{}^{\beta **}$).

Daraus mit Lemma 8.3:

$R_1,\dots,R_n \vdash_{K_{\wedge\vee\Rightarrow}} (R)_1{}^{\beta}$,

und daraus durch Anwendung der $K_{\wedge\vee\Rightarrow}$-Grundregel R:

$R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow}} (R)_2{}^{\beta}$,

was wegen $A \equiv A^* \equiv (R)_2{}^{*\beta} \equiv (R)_2{}^{\beta *} \equiv (R)_2{}^{\beta}$ zu beweisen war.

c) Konkrete Regeln der Stufe ≥ 1 können in $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$-Ableitungen nicht als Annahme herangezogen werden.

(ii)Die $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Aussagen sind mit den $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ -Aussagen identisch. Weiterhin gilt für $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Aussagen A: $A^* \equiv A$. Also folgt die Behauptung aus (i), wenn man $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$-Aussagen $A_1,\ldots,A_n$ für $R_1,\ldots,R_n$ einsetzt.

QED

Aus Satz 8.6 und Satz 8.7 erhält man:

Satz 8.8

(i) Seien $R_1,\ldots,R_n$ konkrete K_Ω-Regeln, A K_Ω-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\ldots,R_n \vdash_{K_\Omega} A \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1{}^*,\ldots,\mathring{R}_n{}^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\rightarrow}} \mathring{A}^*$$

(Einbettung von K_Ω in $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$, "$\mathring{R}_i{}^*$" dabei zu lesen als "$(\mathring{R}_i)^*$").

(ii) Seien $A_1,\ldots,A_n,A$ $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ -Aussagen. Dann gilt:

$$A_1,\ldots,A_n \vdash_{K^*_{\wedge\vee\rightarrow}} A \quad \text{g.d.w.} \quad A_1,\ldots,A_n \vdash_{K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}} A$$

(Einbettung von $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$).

QED

Satz 8.8 drückt die vorläufige Quintessenz unserer Bemühungen aus. Wir waren ausgegangen von einer Verallgemeinerung des GENTZENschen Kalkülbegriffs, indem wir nicht nur Regeln zweiter, sondern beliebig hoher Stufe betrachteten, indem wir also die Heranziehung und Löschung von Regeln und nicht nur von Aussagen zuließen. Mithilfe dieses verallgemeinerten Kalkülbegriffs haben wir ein Schema zur Bedeutungsfestlegung beliebiger Aussagenoperatoren über Grundkalkülen K angegeben. Satz 8.8 zeigt nun, daß sich ein Kalkül K_Ω, der atomare Grundregeln beliebiger Stufe und Operatoren eines beliebigen Systems Ω enthält, in den Kalkül $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ einbetten läßt, der Regeln höchstens 2. Stufe und nur die Standardjunktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ enthält. Satz 8.8 zeigt auch umgekehrt, daß sich der elementarere Kalkül $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ auch in K_Ω einbetten läßt, falls Ω die Operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ enthält, so daß K_Ω und $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ in diesem Falle gleichwertig sind.

Wir können jetzt die ganze Idee von Regeln beliebig hoher Stufe und von beliebigen Operatoren wieder vergessen, da wir alle Ableitungsbeziehungen von K_Ω auch in $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ ausdrücken können. Dies macht nicht unseren ganzen Ansatz nachträglich überflüssig. Denn die Einbettung von K_Ω in $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ nach Satz 8.8 zeigt gerade, daß die Behandlung der drei Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ in der üblichen (intuitionistischen) positiven Logik keine willkürliche Einschränkung auf drei spezielle Aussagenoperatoren darstellt, sondern alle Operatoren mitumfaßt, die sonst noch durch das in § 6 angegebene allgemeine Schema für Operator-Grundregelsysteme charakterisierbar wären. Wir haben also - im Rahmen unseres regellogischen Ansatzes - eine Begründung dafür geliefert, daß man sich in der positiven Logik auf die Standardjunktoren beschränken kann.

Zum Zwecke eines solchen Beweises der Operatorenvollständigkeit von $\wedge\vee\rightarrow$, dessen wichtigste Voraussetzung ja ein allgemeines Schema für Operator-Grundregeln ist, scheint keine andere Möglichkeit zu bestehen, als zu Kalkülen mit Regeln beliebig hoher Stufe überzugehen. Es ist das Verdienst VON KUTSCHERAs, diese These 1968 erstmals ausgearbeitet zu haben (vgl. dort S. 14-16). Obwohl sich VON KUTSCHERAs Arbeit in wesentlichen Punkten von der vorliegenden unterscheidet - so geht VON KUTSCHERA im Anschluß an LORENZEN von einer Schichtung von Metakalkülen aus, während wir den Grundkalkül um Regeln beliebiger Stufe erweitert haben -, haben wir uns beim Beweis der Operatorenvollständigkeit von $\wedge\vee\rightarrow$ eng an VON KUTSCHERA angeschlossen.

PRAWITZ hat 1979 einen Beweis dafür skizziert, daß $\wedge\vee\rightarrow\perp$ ein vollständiges Operatorensystem für die intuitionistische Junktorenlogik darstellt. ($\perp$ steht darin für "das Falsche"; wir schränken uns im folgenden auf den Teil der PRAWITZschen Ausführungen ein, der für die positive Logik von Relevanz ist.) Dabei glaubt PRAWITZ mit Regeln höchstens 2. Stufe, wie sie im Kalkül des natürlichen Schließens vorhanden sind, auszukommen. Ich stelle seinen Ansatz in unserer Symbolik dar: PRAWITZ geht wie wir von einem System von E-Regeln

$$(14)\qquad \begin{array}{c} \Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \\ \vdots \\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \end{array}$$

aus, wobei er für $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ nur Regeln höchstens 1. Stufe zuläßt, so daß die E-Regeln nicht über die 2. Stufe hinausgehen. (Vgl. PRAWITZ 1979, S. 34f.) Während unser Schema einer B-Regel

$$\Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p; \Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p; S(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p$$

um eine Stufe höher ist als die E-Regeln, gibt PRAWITZ als Schema für B-Regeln an (PRAWITZ 1979, S. 37):

$$(15)\quad (\Delta_1(p_1,\ldots,p_n))^+ \Rightarrow p; \ldots; (\Delta_m(p_1,\ldots,p_n))^+ \Rightarrow p; S(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p \quad .$$

Dabei sei $(\Delta_i(p_1,\ldots,p_n))^+ \equiv R_{i_1}^*,\ldots,R_{i_k}^*$, falls $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n) \equiv R_{i_1},\ldots,R_{i_k}$ $(1 \leq i \leq m)$. Das Schema (15) ist offensichtlich von höchstens 2. Stufe, da die $R_{i_j}^*$ $(1 \leq j \leq k)$ immer Formeln (d.h. von 0. Stufe) sind. (15) ist nun unter Bezugnahme auf die Operation $^+$ und $^+$ wieder unter Bezugnahme auf die Operation * definiert. * war jedoch mit Hilfe der Junktoren $\wedge, \rightarrow$ definiert worden (s. o. S. 124). Will man also Eigenschaften des aus (14) und (15) bestehenden Grundregelschemas nachweisen, so muß man Regeln für $\wedge$ und $\rightarrow$ schon voraussetzen. Insofern ist das aus (14) und (15) bestehende Schema nur dann ein Schema für <u>beliebige</u> Operatoren, wenn man $\wedge$, $\rightarrow$ nicht zu den Operatoren zählt, sondern anderswoher schon zur Verfügung hat.

Der Rückgriff auf $\wedge$ ist dabei allerdings nicht wesentlich. Denn man kann $\wedge$-Regeln aus dem Schema (14), (15) gewinnen, ohne $\wedge$-Regeln schon vorauszusetzen: Zu der $\wedge$-E-Regel $p,q \Rightarrow p \wedge q$ gehört nach (15) als $\wedge$-B-Regel:

(16) $(p,q)^+ \Rightarrow r; p \wedge q \dot{\Rightarrow} r$.

Nun ist $(p,q)^+$ gerade p^*,q^* , und dies ist wiederum p,q. Also ist (16) identisch mit der von uns angegebenen $\wedge$-B-Regel. Man braucht in diesem Falle eben von * nur zu wissen, daß für Variable p gilt: $p^* \equiv p$; der Teil der Definition von *, der auf $\wedge$ zurückgreift, spielt keine Rolle.

Anders ist dies bei $\rightarrow$. Versucht man, mit (15) aus der $\rightarrow$-E-Regel $p \Rightarrow q \dot{\Rightarrow} p \rightarrow q$ eine $\rightarrow$-B-Regel zu erhalten, so ergibt sich:

(17) $(p \Rightarrow q)^+ \Rightarrow r; p \rightarrow q \dot{\Rightarrow} r$.

$(p \Rightarrow q)^+$ ist gerade $(p \Rightarrow q)^*$. Die Definition von * greift nun in diesem letzten Fall effektiv auf $\rightarrow$ zurück; es ist $(p \Rightarrow q)^* \equiv p \rightarrow q$. Setzt man dies in (17) ein, so erhält man:

(18) $(p \rightarrow q) \Rightarrow r; p \rightarrow q \dot{\Rightarrow} r$.

Dies ist jedoch eine Regel, die nach Satz 4.3(ii) schon unabhängig von $\rightarrow$-Regeln ableitbar ist, die man also nicht als Bedeutungsregel für $\rightarrow$ ansprechen kann. Die $\rightarrow$-B-Regel $p, p \rightarrow q \Rightarrow q$ läßt sich aus (18) jedenfalls nicht gewinnen. Entgegen der Meinung von PRAWITZ 1979 ("The usual elimination rules ... for $\wedge$ and $\rightarrow$ have a slightly different form, which is easily seen to be deductively equivalent to the one given here" [S. 38oben]) ergeben sich die $\rightarrow$-Grundregeln nicht aus dem Schema (14), (15).

Da (15) auf $\rightarrow$ Bezug nimmt und außerdem die $\rightarrow$-Grundregeln im PRAWITZschen Vollständigkeitsbeweis schon benutzt werden, kann man den PRAWITZschen Beweis nur so verstehen: Unabhängig von irgendeinem allgemeinen Schema wird ein spezielles Regelsystem für $\rightarrow$ angesetzt. Anschliessend erweitert man dies um Regelsysteme für Operatoren, die dem allgemeinen Schema (14), (15) genügen. Von Operatoren, die durch diesem Schema gehorchende Regelsysteme charakterisiert werden, zeigt man dann, daß sie durch $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ definierbar sind. Die Beschränkung auf Regeln höchstens 2. Stufe wird also erkauft durch eine ausgezeichnete Stellung des Junktors $\rightarrow$. Bei uns ist die Situation allerdings in gewisser Weise ähnlich: Wir konnten zwar <u>alle</u> Operatorenregeln, einschließlich der Regeln für $\rightarrow$, als Fall eines allgemeinen Schemas auffassen, mußten dafür jedoch auf einen $\Rightarrow$-Begriff zurückgreifen, den man auch als Begriff einer linksiterierten (materialen) Implikation mit Einführungs- und Beseitigungsregeln beschreiben kann (s. o. S. 53f.). Das neue, das wir gegenüber dem Vollständigkeitsbeweis von PRAWITZ bieten, besteht also im wesentlichen in einem Explikationsvorschlag für diesen vorausgesetzten Implikationsbegriff.

§ 9. Formale positive Logik

Bis jetzt sind wir von einem Grundkalkül K ausgegangen und haben diesen durch Hinzufügung von Operator-Grundregeln zu einem Kalkül K_{Ω} erweitert. Von letzterem konnten wir in § 8 zeigen, daß er sich in einen Kalkül $K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$, den Kalkül der positiven Junktorenlogik über K, einbetten läßt. $K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ ist nun ebenso wie K_{Ω} ein <u>materialer</u> Logikkalkül, insofern er vom Vokabular und den Grundregeln eines willkürlich gewählten Grundkalkäls K ausgeht (wobei die Grundregeln $\Delta \Rightarrow X$ von K in $K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ die Form $\Delta^{*} \Rightarrow X^{*}$ annehmen) und diesen nur durch operatorenlogische Regeln erweitert. Aufgabe eines Kalküls der <u>formalen</u> Logik wäre es, die Herleitung genau derjenigen Ableitungsbeziehungen zu erlauben, die unabhängig von jeweils betrachteten Grundkalkülen K, also für jedes K in $K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ ableitbar sind. Nun ist es so, daß verschiedene Grundkalküle verschiedene Vokabulare haben können; zwei Grundkalküle, deren Aussagenmengen disjunkt sind, haben von vornherein keine Ableitungsbeziehung gemeinsam. Aufgabe eines Logikkalküls kann also nur sein, <u>schematische</u> Ableitungsbeziehungen herzuleiten, die erst dann, wenn man sie in gewisser Weise über einem Grundkalkül K <u>interpretiert</u>, zu Ableitungsbeziehungen von $K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ werden.

Dazu gehen wir aus von einem speziellen Grundkalkül, den wir L nennen wollen (da wir K weiter als Variable für beliebige Grundkalküle brauchen): L habe als Atom nur +, besitze keine Objektvariablen, und seine Aussagen sollen mit seinen Ausdrücken zusammenfallen. Grundregeln habe L keine. L-Aussagen, die die Gestalt $\underbrace{++\ldots++}_{n\ \text{mal}}$ haben, wollen wir auch <u>Schemabuchstaben</u> nennen. Wir bilden nun den Kalkül $L^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ der positiven Junktorenlogik über L und nennen $L^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ auch <u>Kalkül der positiven formalen Logik</u>. Statt $L^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ schreiben wir der Kürze halber P. Wie man sieht, ist P bis auf Notationsunterschiede identisch mit dem positiv-junktorenlogischen Teil des Kalküls des natürlichen Schließens NI von GENTZEN 1935.

Sei K ein beliebiger Grundkalkül. Eine Interpretation über K sei eine Funktion κ, die jedem Schemabuchstaben eine K-Aussage zuordnet. Sei A eine P-Aussage, κ eine Interpretation über K. Dann sei A^{κ} diejenige $K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ - Aussage, die man aus A erhält, wenn man jedes Vorkommen eines Schemabuchstabens B in A durch $\kappa(B)$ ersetzt. Eine P-Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ für P-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ heißt P-allgemeingültig, wenn für jedes K und für jede Interpretation κ über K gilt: $A_1^{\kappa},\ldots,A_n^{\kappa} \vdash_{K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}} A^{\kappa}$.

Die Rechtfertigung, P als Kalkül der positiven formalen Logik aufzufassen, liefert folgender Satz:

Satz 9.1 Für alle P-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ gilt $A_1,\ldots,A_n \vdash_P A$ genau dann, wenn die P-Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ P-allgemeingültig ist.

Beweis Die Richtung von rechts nach links ist trivial, da L selbst ein Grundkalkül ist. Man wähle für κ einfach die identische Abbildung.
Die Richtung von links nach rechts ist eine leichte Induktion über dem Aufbau einer P-Ableitung Π von A aus $A_1,\ldots,A_n$. Man beachte, daß alle P-Grundregeln auch $K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$ -Grundregeln für jedes K sind und daß alle in Π auftretenden Schemabuchstaben keine Veränderung erfahren können, da P keine atomaren Grundregeln enthält. Π geht also für jedes K durch Substitution von K-Aussagen für Schemabuchstaben in eine $K^{*}_{\wedge\vee\rightarrow}$-Ableitung Π' von A^{κ} aus $A_1^{\kappa},\ldots,A_n^{\kappa}$ über.

QED

Satz 9.1, den wir als "regellogischen Vollständigkeitssatz" bezeichnen, könnte man als Analogon zu üblichen semantischen Vollständigkeitssätzen ansehen: So wie dort auf Belegungen mit Wahrheitswerten, bezieht sich hier der Begriff der Allgemeingültigkeit auf Interpretationen über Grundkalkülen. Allerdings muß man sich dann darüber im klaren sein, daß der Begriff der Allgemeingültigkeit im üblichen semantischen Sinne vom Begriff der Ableitbarkeit grundverschieden ist, während bei uns die Allgemeingültigkeit selbst über einen Ableitbarkeitsbegriff definiert ist, also schon 'intensional' sehr eng mit der Ableitbarkeit zusammenhängt. Das spiegelt sich in der Trivialität des Beweises von Satz 9.1 wieder.

§ 10. Erweiterte positive Logik: Nullstellige Operatoren

In § 6 hatten wir Operatoren als Zeichen eingeführt, die es erlauben sollten, den gemeinsamen Gehalt von Regelsystemen $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ auszudrücken. Dabei haben wir bis jetzt noch die Einschränkung gemacht, daß diese Regelsysteme nicht leer sein sollten. Dementsprechend haben wir nur Operatoren der Stellenzahl ≥ 1 betrachtet, da in diesen Regelsystemen - weil es sich um Ω-Regeln handelt - mindestens eine Aussagenvariable vorkommen mußte. Von dieser Einschränkung wollen wir uns jetzt frei machen, indem wir zulassen, daß in $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ ein (oder mehrere oder alle) Systeme leer sind, und entsprechend 0-stellige Operatoren, die dann zugleich Aussagen sind, zulassen.

Wir erweitern zunächst das Vokabular von K_Ω: Ω darf nullstellige Operatoren enthalten. Weiterhin legen wir zusätzlich fest: nullstellige Operatoren sind K_Ω-Aussagen und auch K_Ω-Formeln. Ω-Regeln sind jetzt solche Regeln, die aus K_Ω-Formeln der Gestalt p oder $S(p_1,\ldots,p_n)$ für einen n-stelligen Operator S $(n \geq 1)$ oder S für einen 0-stelligen Operator S aufgebaut sind.

Bei dem S-Grundregelsystem, wonach S-Operate entsprechend § 6 den gemeinsamen Gehalt von - jetzt auch möglicherweise leeren - Systemen von Ω-Regeln $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ ausdrücken sollen, unterscheiden wir 3 (bzw. 5) Fälle:

<u>1. Kein Δ_i $(1 \leq i \leq m)$ ist leer.</u>

a) Falls dann $p_1,\ldots,p_n$ die insgesamt in $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ vorkommenden Variablen sind, lauten die S-Grundregeln wie in § 6 begründet:

$$(1)\begin{cases} \Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \\ \qquad\qquad\vdots \\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \\ \Delta_1(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p;\ldots;\Delta_m(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow p; S(p_1,\ldots,p_n) \dot{\Rightarrow} p. \end{cases}$$

b) Es kann aber auch der Fall eintreten, daß in $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ keine Variablen vorkommen, falls nämlich diese Systeme von Ω-Regeln nur aus 0-stelligen Operatoren zusammengesetzt sind. Dann kommt man analog zu (1) zum Regelsystem für einen 0-stelligen Operator S:

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \quad\Delta_1 \Rightarrow S \\ \qquad\vdots \\ \quad\Delta_m \Rightarrow S \\ \Delta_1 \Rightarrow p;\ \ldots;\ \Delta_m \Rightarrow p;\ S \mathrel{\dot{\Rightarrow}} p. \end{array}\right.$$

<u>2. Einige, aber nicht alle Δ_i $(1 \leq i \leq m)$ sind leer.</u>

a) $p_1, \ldots, p_n$ seien die insgesamt in $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ vorkommenden Variablen. Daß ein n-stelliger Operator gemäß § 6 den gemeinsamen Gehalt von $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ ausdrücken soll, bedeutet, daß

$\Delta_i(A_1, \ldots, A_n) \vdash R$ für alle i mit $1 \leq i \leq m$ g.d.w.
$S(A_1, \ldots, A_n) \vdash R$

für alle Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ und konkreten Regeln R. (Vgl. oben S. 87). Falls $\Delta_i(A_1, \ldots, A_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ leer ist, ist $\Delta_i(A_1, \ldots, A_n) \vdash R$ (d.h. $\vdash R$) offensichtlich gleichwertig mit $A_1 \Rightarrow A_1 \vdash R$, da $A_1 \Rightarrow A_1$ in K_Ω ableitbar ist. Wir ersetzen also einfach jedes leere Regelsystem durch $p_1 \Rightarrow p_1$ und haben damit den vorliegenden Fall auf Fall 1a) zurückgeführt.

b) Wenn in $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ keine Variablen vorkommen, dann kommt mindestens ein 0-stelliger Operator S' vor. Wir erhalten eine zu $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ gleichwertige Folge von Systemen, wenn wir jedes leere System Δ_i $(1 \leq i \leq m)$ durch $S' \Rightarrow S'$ ersetzen. Damit haben wir diesen Fall auf Fall 1b) zurückgeführt.

<u>3. Alle Δ_i $(1 \leq i \leq m)$ sind leer.</u> Der gemeinsame Gehalt von Δ_i kann dann nur von einem 0-stelligen Operator S ausgedrückt werden, für den gilt:

$\vdash R$ genau dann, wenn $S \vdash R$.

Dies ist offensichtlich dann erfüllt, wenn man für S als einzige Grundregel die Anfangsregel

(3) $\quad S$

annimmt. Wenn man will, kann man diese Regel als Spezialfall von (2) ansehen, indem man in (2) alle Vorderregeln der E-Regeln wegstreicht und beachtet, daß die entsprechende B-Regel $p;S \Rightarrow p$ in jedem Kalkül K_Ω ableitbar ist (falls S zu Ω gehört). Deshalb wollen wir die Regel (3) auch als S-E-Regel bezeichnen, zu der es allerdings keine S-B-Regel gibt.

Wir können also annehmen, daß die Grundregeln für einen Operator S entweder die Gestalt (1) mit nichtleeren $\Delta_i(p_1,\ldots,p_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ haben - falls S die Stellenzahl >0 hat - oder - falls S die Stellenzahl 0 hat - die Gestalt (2) mit nichtleeren Δ_i $(1 \leq i \leq m)$ oder die Gestalt (3) hat. Nur im Fall (3) ist ein 0-stelliger Operator S auch Junktor. Im Fall (2) müssen ja die nichtleeren Systeme Δ_i von Ω-Regeln, weil sie keine Variablen enthalten, von S verschiedene Operatoren S' enthalten.

Da im Fall (3) S keine unmittelbaren Subaussagen hat, ist für S kein Rang definiert. Wir setzen daher fest: 0-stellige Junktoren (die zugleich Aussagen sind) sollen Rang 1 haben.

Wir vereinbaren nun, daß die Notation (1) den Fall (2) einschließt, daß also insbesondere die Schreibweise $S(p_1,\ldots,p_n)$ den Fall, wo S 0-stellig ist, miteinbezieht. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß alle Resultate von § 7 richtig bleiben, wenn man alle derartigen Notationen in diesem Sinne deutet. Der Sonderfall 0-stelliger Junktoren spielt für den Normalisierungssatz und das sich daraus ergebende Subaussagenprinzip keine Rolle, da es für solche Junktoren gar keine B-Regel gibt.[1] Ebenso übertragen sich Satz 7.12 und die Ersetzungs-

==========

1) Beim Beweis des Subaussagenprinzips kann zwar jetzt der Fall eintreten, daß der erste Nebenabschnitt N_1 des betrachteten Pfades π nur aus einer Aussage S besteht, die

theoreme III und IV mit geringfügigen Modifikationen, so daß auch das Kriterium der Eindeutigkeit (Satz 7.15) im vorliegenden Fall erfüllt ist.

Die Resultate von § 8 übertragen sich, wenn wir einige Änderungen vornehmen. Das System der Standardjunktoren, auf die sich alle anderen Operatoren zurückführen lassen, muß jetzt um einen 0-stelligen Junktor $\curlyvee$ erweitert werden, ist also jetzt das System $\wedge\vee\rightarrow\curlyvee$. Das Regelsystem $\Sigma_\curlyvee$ für den 0-stelligen Junktor $\curlyvee$ soll aus der Anfangsregel

$\Sigma_\curlyvee$ ($\curlyvee$-E) $\curlyvee$

bestehen, eine B-Regel für $\curlyvee$ ist, wie oben angedeutet, überflüssig. In Analogie zu Satz 8.1 beweisen wir dann:

<u>Satz 10.1</u> Sei Ω System von Operatoren $S_1 \ldots S_\ell$; $\Sigma_{S_1}, \ldots, \Sigma_{S_\ell}$ sei methodisch zulässig für Ω . Dann gibt es zu jedem n-stelligen Operator S aus Ω $(n \geq 0)$ eine $\wedge\vee\rightarrow\curlyvee$-Formel $F(p_1,\ldots,p_n)$. so daß

$$S(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow F(p_1,\ldots,p_n)$$

in $K_{\wedge\vee\rightarrow\curlyvee\Omega}$ ableitbar ist. (Man beachte, daß im Fall n=0 dies als $S \Leftrightarrow F$ gelesen werden muß.)

<u>Beweis</u> Zunächst gilt das Analogon von Satz 8.4: Zu jedem n-stelligen <u>Junktor</u> S aus Ω $(n \geq 0)$ gibt es eine $\wedge\vee\rightarrow\curlyvee$-Formel $F(p_1,\ldots,p_n)$, so daß $S(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow F(p_1,\ldots,p_n)$ in $K_{\wedge\vee\rightarrow\curlyvee\Omega}$ ableitbar ist.
Denn falls S ein 0-stelliger Junktor ist, gilt offensichtlich $S \dashv\vdash \curlyvee$, wir können also $\curlyvee$ für F wählen. Falls S ein n-stelliger Junktor $(n \geq 1)$ ist, argumentieren wir wie im Beweis von Satz 8.4.
Dieses Resultat als Induktionsanfang benutzend, ergibt sich die Behauptung wie in § 8 (vgl. oben S. 127f.).

<u>QED</u>

==============

nicht durch Heranziehung einer Annahmeregel, sondern durch Anwendung der S-E-Regel (falls S 0-stelliger Junktor) gewonnen worden ist. Dies ist jedoch unproblematisch, da dann S als Konklusion der Anwendung einer E-Regel zugleich zum Einführungsteil des auf N_1 folgenden Hauptabschnittes H_1 gehört und damit Subaussage der ersten Aussage des darauf folgenden Nebenabschnittes N_2 ist.

Die übrigen Resultate aus § 8 übertragen sich ebenso auf den vorliegenden Fall. Sei $K^*_{\wedge\vee\to\curlyvee}$ erklärt wie $K^*_{\wedge\vee\to}$ auf S. 130f., nur daß jetzt noch die $\curlyvee$-Grundregel

$$\curlyvee$$

hinzukommt. $K^*_{\wedge\vee\to\curlyvee}$ heiße <u>Kalkül der erweiterten positiven Logik über K</u>. Sei $\mathring{R}$ wieder die zu einer konkreten K_Ω-Regel R existierende gleichwertige $K_{\wedge\vee\to\curlyvee}$-Regel, in der gemäß Satz 10.1 sukzessive jedes Vorkommen eines von $\wedge,\vee,\to,\curlyvee$ verschiedenen Operators eliminiert worden ist (vgl. dazu Satz 8.5). Dann gilt die Einbettbarkeit von K_Ω in $K^*_{\wedge\vee\to\curlyvee}$ und von $K^*_{\wedge\vee\to\curlyvee}$ in $K_{\wedge\vee\to\curlyvee\Omega}$ (vgl. Satz 8.8), wobei R* für Regeln R wie in § 8 (vgl. S. 124) zu verstehen sei:

<u>Satz 10.2</u>

(i) Seien $R_1,\dots,R_n$ konkrete K_Ω-Regeln, A K_Ω-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\dots,R_n \vdash_{K_\Omega} A \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1{}^*,\dots,\mathring{R}_n{}^* \vdash_{K^*_{\wedge\vee\to\curlyvee}} \mathring{A}^* \quad .$$

(ii) Seien $A_1,\dots,A_n,A$ $K^*_{\wedge\vee\to\curlyvee}$-Aussagen. Dann gilt:

$$A_1,\dots,A_n \vdash_{K^*_{\wedge\vee\to\curlyvee}} A \quad \text{g.d.w.} \quad A_1,\dots,A_n \vdash_{K_{\wedge\vee\to\curlyvee\Omega}} A \quad .$$

<u>QED</u>

Ein entsprechendes System der <u>formalen</u> Logik läßt sich ebenfalls angeben. EP unterscheide sich von P dadurch, daß es in seinem Vokabular den 0-stelligen Junktor $\curlyvee$ und unter seinen Grundregeln die Anfangsregel

$$\curlyvee$$

hat. EP heiße <u>Kalkül der formalen erweiterten positiven Logik</u>. Wie in § 9 der Begriff der P-Allgemeingültigkeit läßt sich der Begriff der EP-Allgemeingültigkeit definieren und beweisen:

<u>Satz 10.3</u> Für alle EP-Aussagen $A_1,\dots,A_n,A$ gilt $A_1,\dots,A_n \vdash_{EP} A$ genau dann, wenn die EP-Regel $A_1,\dots,A_n \Rightarrow A$ EP-allgemeingültig ist.

<u>QED</u>

Der Junktor $\curlyvee$ bietet keine wesentlichen neuen Ausdrucksmöglichkeiten. Deshalb läßt man ihn üblicherweise auch weg und beschränkt sich in der positiven formalen Logik auf das System P. Man könnte sogar meinen, schon $\wedge\vee\rightarrow$ sei ein vollständiges Operatorensystem für Kalküle K_{Ω}, wobei Ω 0-stellige Operatoren enthalten darf, denn jeder in Ω vorkommende 0-stellige Junktor S (und damit auch $\curlyvee$) sei durch $p\rightarrow p$ definierbar. Es gilt in diesem Fall ja:

(4) $S \Leftrightarrow p\rightarrow p$ ist für jedes K in $K_{\wedge\vee\rightarrow\Omega}$ ableitbar.

Damit würde allerdings die Behauptung von Satz 10.1 abgeschwächt, nach der

$S \Leftrightarrow F$

für eine Aussage F, <u>die keine Variablen enthält</u>, ableitbar ist. Wenn man diese Abschwächung hinnimmt, also S gemäß (4) durch $p\rightarrow p$ definiert ansieht, dann läßt sich Satz 10.2 (jetzt bezogen auf $K^*_{\wedge\vee\rightarrow}$ statt $K^*_{\wedge\vee\rightarrow\curlyvee}$) nicht mehr ohne weiteres formulieren. Denn es gibt nicht mehr unbedingt zu jeder konkreten K_{Ω}-Regel R eine gleichwertige $K_{\wedge\vee\rightarrow}$-Regel $\mathring{R}$. Sei z.B. S ein in Ω auftretender 0-stelliger Junktor, d.h. eine Aussage. Als $\mathring{S}$ müßte man gemäß (4) wählen: $A\rightarrow A$ für eine beliebige K-Aussage A. Das setzt voraus, daß eine solche Aussage existiert. Um also $\mathring{R}$ zu R definieren zu können, müßten wir voraussetzen, daß die Aussagenmenge eines Grundkalküls K nicht leer ist. Diese Voraussetzung haben wir bis jetzt nicht gemacht.

Man könnte einfach in Erwägung ziehen, eine solche Voraussetzung anzunehmen. Es gibt jedoch gute Gründe dafür, $\curlyvee$ als eigenständigen 0-stelligen Junktor in der positiven Logik zur Verfügung zu haben. Ein solcher Grund ist, daß sich für EP, jedoch nicht für P der CRAIGsche Interpolationssatz uneingeschränkt beweisen läßt. In P gibt es für $\vdash_P A\rightarrow A$ (wobei A beliebige P-Aussage) keine Interpolante, d.h. keine P-Aussage B mit $\vdash_P B$ und $B \vdash_P A\rightarrow A$, so daß alle in B vorkommenden Schemabuchstaben auch in der leeren Prämissenmenge und in $A\rightarrow A$ vorkommen. Denn es gibt keine P-Aussage, die keinen Schemabuchstaben enthält. In EP ist γ eine Interpolante zu $\vdash_{EP} A \rightarrow A$ (für eine EP-Aussage A), da sowohl $\vdash_{EP} \gamma$ als auch $\gamma \vdash_{EP} A \rightarrow A$ gilt und weiterhin γ eine Aussage ohne Schemabuchstaben ist.

Kapitel 3: Logiken mit Negation

§ 11. Kalküle mit Widerlegungsregeln

Gelegentlich findet sich in der Literatur der Versuch, die Negation $\neg$ zu definieren durch

$$\neg p \Leftrightarrow p \rightarrow \curlywedge \quad ,$$

wobei $\curlywedge$ als nullstelliger Operator behandelt wird, der keine E-Regel und die Regel

$$\curlywedge \Rightarrow p \qquad (\text{"ex falso quodlibet"})$$

als B-Regel hat (so z.B. bei PRAWITZ 1979, ZUCKER/ TRAGESSER 1978). Das ist in unserem, durch § 6 abgesteckten Rahmen nicht möglich. Ein Operat $S(A_1,\ldots,A_n)$ soll bei uns immer den Gehalt eines oder mehrer Regelsysteme ausdrücken. Wir hatten zwar in § 10 unseren Ansatz erweitert, indem wir leere Regelsysteme und 0-stellige Operatoren zuließen. Dabei konnten wir jedoch nur den Junktor $\curlyvee$ deuten, der eine E-Regel

$$\curlyvee$$

ohne Vorderregeln hat. Damit sind unsere Möglichkeiten erschöpft; einem Junktor ganz ohne E-Regeln können wir keine Deutung geben.

Man kommt zu obiger $\curlywedge$ -Grundregel und damit auch zur intuitionistischen Logik, wenn man in unserem Schema (7) aus § 6 die Einschränkung $m \geq 1$ wegläßt und dementsprechend in (8) aus § 6 auch ein Operator-Grundregelsystem ohne E-Regeln zuläßt. Das hieße, daß Operate nicht nur den gemeinsamen Gehalt <u>eines oder mehrerer</u>, sondern auch den von 0 Regelsystemen ausdrücken können. Der Begriff des gemeinsamen Gehaltes von 0 Regelsystemen läßt sich zwar technisch leicht als Grenzfall des Begriffs für beliebig viele Regelsysteme bilden, er entbehrt jedoch der philosophischen Plausibilität. Verbal müßte man vom "<u>Gehalt von keinem Regelsystem</u>" sprechen. "Gehalt" scheint jedoch ein sinnvoller philosophischer Begriff nur als "Gehalt von etwas" zu sein, und nur dem Grenzfall, wo dieses "etwas" ein leeres Regelsystem ist, kann man noch einige Plausibilität abgewinnen. Im Rahmen unseres philosophischen Ansatzes, der auf dem Begriff des Gehaltes aufbaut, müssen wir also darauf verzichten, die intuitionistische Logik als Grenzfall der positiven Logik zu behandeln.

Auch der Ansatz bei LORENZEN (1955) stößt auf Schwierigkeiten. LORENZEN definiert $\neg A$ durch $A \Rightarrow \curlywedge$. Nur versteht er hier $\curlywedge$ als Variable für $\curlywedge$-Aussagen, wobei eine atomare Aussage B eine $\curlywedge$-Aussage ist, falls für jedes atomare C die Regel $B \Rightarrow C$ zulässig ist. Das setzt voraus, daß LORENZEN nur solche Grundkalküle betrachtet, die mindestens eine $\curlywedge$-Aussage enthalten. Doch selbst wenn man dies zugesteht, ist $p \Rightarrow \curlywedge$ kein Regelsystem zur Bedeutungsfestlegung von $\neg$ in unserem Sinne, da es keine Ω-Regel ist, sondern mit $\curlywedge$ eine K-Objektvariable enthält.

Wenn wir Operatoren im Sinne von § 6 deuten wollen als Zeichen, die den Gehalt von (im Grenzfall leeren) Regelsystemen ausdrücken, dann müssen wir auch für die Negation $\neg$ eines oder mehrere Regelsysteme angeben, deren Gehalt durch $\neg$ ausgedrückt wird. Das scheint uns im Anschluß an VON KUTSCHERA (1969) nur so möglich zu sein, daß wir den Kalkülbegriff von Kapitel 1 derart erweitern, daß nicht nur das *Begründen*, sondern auch das *Widerlegen* von Aussagen umfaßt wird. Kalküle sollen also neben Regeln, mit denen man Aussagen begründen kann, auch Regeln enthalten, mit denen man Aussagen widerlegen kann. Die Begründung eines Negats $\neg A$ soll so auf die Widerlegung von A zurückgeführt werden.

Dabei steht die Annahme im Hintergrund, daß es zwei Arten von Urteilen gibt, nämlich *Behauptungen* und *Bestreitungen*, und daß das Begründen von Aussagen (das wir paradigmatisch als Ableiten in Kalkülen verstehen) ein Argumentieren für Behauptungen ist, dem ein Widerlegen von Aussagen als Argumentieren für Bestreitungen an die Seite gestellt werden soll. Um dies technisch zu handhaben, wollen wir neben Aussagen A Zeichen $\sim A$ behandeln, die als Prämissen und Konklusionen von Regelanwendungen auftreten können. $\sim A$ soll also in unseren Kalkülen die Bestreitung einer Aussage repräsentieren, so wie eine Aussage A die Behauptung von A repräsentiert, derart, daß eine Ableitung von $\sim A$ eine Widerlegung von A darstellt, so wie eine Ableitung von A eine Begründung von A darstellt. Dem grundsätzlichen Unterschied zwischen Behauptungen und Bestreitungen (den man auch als pragmatischen Unterschied bezeichnen könnte) entspricht in unserer Notation, daß $\sim$ nicht Bestandteil einer Aussage ist, sondern immer nur als äußerstes Zeichen auftreten kann. Insbesondere sind Iterationen wie $\sim\sim A$ sinnlos.[1]

Da die Verwendung des Zeichens "$\sim$" im Regel- und Kalkülbegriff es erlaubt, bestimmte Ableitungen als Widerlegungen zu lesen, sprechen wir oft lax auch von "$\sim$" als formalem Widerlegungsbegriff und bezeichnen für "$\sim$" charakteristische Regeln auch als "Eigenschaften" eines formalen Widerlegungsbegriffs. So nennen wir die im folgenden definierten Kalküle auch "Kalküle mit Widerlegungsbegriff". Exakter müßte man in jedem Fall zwischen Bestreitung einer Aussage und dem Argumentieren für Bestreitungen, d.h. Widerlegen unterscheiden, worauf wir jedoch verzichten.

Technisch gesehen unterscheiden wir A und $\sim A$ dadurch, daß das Zeichen "$\sim$" in den Regelbegriff, nicht jedoch in den Aussagenbegriff eingeht. Genauer fassen wir nicht nur jede Formel X, sondern mit X auch $\sim X$ als Regel 0. Stufe auf. "Konkrete Regel 0. Stufe" wird damit zum Oberbegriff für Aussagen und Zeichen der Gestalt $\sim A$, für die wir keine eigene Bezeichnung einführen.

Unsere um einen formalen Widerlegungsbegriff erweiterten Kalküle, die wir $\tilde{K}$ nennen wollen, sollen sich also im Formel- und Aussagenbegriff von den in § 3 betrachteten

============

1) Ein anderer Weg, der nicht von der Unterscheidung Behaupten/Bestreiten ausgeht, sondern den Begriff einer Absurdität als Ausgangspunkt nimmt, wird in § 18 skizziert.

Kalkülen nicht unterscheiden, jedoch folgenden Regelbegriff haben:

1) Jede Formel ist eine Regel 0. Stufe.
2) Für jede Formel X ist $\sim X$ eine Regel 0. Stufe.
3) Sind $R_1,\ldots,R_n$ Regeln höchstens m-ter Stufe, wobei mindestens ein R_i $(1 \leq i \leq n)$ von m-ter Stufe ist, und ist R Regel 0. Stufe, so ist $R_1 \overset{x}{,} \ldots \overset{x}{,} R_n \overset{x}{\Rightarrow} R$ eine Regel (m+1)-ter Stufe, wobei an den mit x markierten Stellen m Punkte stehen sollen. R heißt dann auch <u>Hinterregel</u> dieser Regel (m+1)-ter Stufe.

Den Ableitungsbegriff können wir von S. 50f. übernehmen, wenn wir in der dortigen Definition immer "Aussage" durch "konkrete Regel 0. Stufe" ersetzen. Abgeleitet werden künftig also immer konkrete Regeln 0. Stufe. Eine Ableitung von $\sim A$ aus konkreten Regeln $R_1,\ldots,R_n$ kann man als $\tilde{K}$-Widerlegung von A aus $R_1,\ldots,R_n$ ansehen, so wie man eine Ableitung von A aus $R_1,\ldots,R_n$ als $\tilde{K}$-Begründung von A aus $R_1,\ldots,R_n$ ansehen kann.

Wir wollen für konkrete Regeln 0. Stufe neue Buchstaben einführen, nämlich U,V,W, evtl. mit Indizes, im Unterschied zu solchen konkreten Regeln 0. Stufe, die zugleich Aussagen sind, und die wir weiter mit A, B, C,... bezeichnen.

Da der Ausdruck "konkrete Regel 0. Stufe" zu umständlich ist, führen wir im Anschluß an VON KUTSCHERA (1969) dafür "<u>R-Aussage</u>" als Abkürzung ein. R-Aussagen sind damit nach unseren Definitionen keine Aussagen, sondern Regeln. Diese Abkürzung wurde deshalb gewählt, weil R-Aussagen in Ableitungen die Rolle spielen, die vorher Aussagen spielten. Entsprechend reden wir auch von "R-Aussagenvorkommen", "K-R-Aussagen" etc. Inhaltlich entspricht "R-Aussage" dem Begriff des "Urteils" als Oberbegriff von "Behauptungen" und "Bestreitungen".

Für eine Regel 0. Stufe R sei $\bar{R}$ definiert durch
$\bar{R}$ sei $\sim R$, falls R Formel ist,
$\bar{R}$ sei X, falls R die Gestalt $\sim X$ für eine Formel X hat.

Als $\tilde{K}$-Grundregeln wollen wir nicht beliebige $\tilde{K}$-Regeln zulassen. Wir wollen vielmehr durch eine Adäquatheitsbedingung sichergestellt wissen, daß man eine $\tilde{K}$-Ableitung von $\sim A$ wirklich als "Widerlegung" von A in einem intuitiv befriedigenden Sinne ansehen kann. Ohne eine solche Bedingung könnte man neben $\sim$ weitere Sonderzeichen in den Regelbegriff mit hineinnehmen, ohne daß man sagen könnte, daß gerade $\sim$ in bevorzugter Weise einen Widerlegungsbegriff repräsentierte.

Als solche Adäquatheitsbedingung wollen wir fordern: Für alle $\tilde{K}$-Aussagen A, B soll das Prinzip der "reductio ad absurdum"

$$A \Rightarrow B; A \Rightarrow \sim B \dot{\Rightarrow} \sim A$$

in $\tilde{K}$ ableitbar sein. Die "reductio" scheint uns ein Prinzip zu sein, das man intuitiv von einem Widerlegungsbegriff verlangt und das auch in den meisten Logiksystemen - etwa in der Form als Aussagenschema $((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b)) \rightarrow \neg a$ - akzeptiert wird. Weitere Forderungen wie etwa das "ex contradictione quodlibet" und das "tertium non datur" wollen wir zunächst nicht stellen, da sie uns intuitiv bei weitem nicht so plausibel erscheinen wie die "reductio". Auf die "reductio" wollen wir jedoch nicht verzichten. In § 14, 16, 17 werden wir dann stärkere Anforderungen mit einbeziehen.[1)]

Mit der Ablehnung, die intuitionistische Logik als Grenzfall der positiven Logik zu behandeln, haben wir die Möglichkeit aufgegeben, mit rein semantischen Argumenten eine Logik (nämlich die intuitionistische) vor anderen auszuzeichnen. Mit der Wahl des Bestreitungszeichens $\sim$ als

===========

1) Wir unterscheiden uns also vom Ansatz bei VON KUTSCHERA (1969) dadurch, daß wir an den Widerlegungsbegriff mit der "reductio ad absurdum" eine Adäquatheitsbedingung stellen, während VON KUTSCHERA einen beliebigen Widerlegungsbegriff zuläßt. Ferner haben wir uns mit der Wahl der "reductio" von vornherein auf einen indirekten Widerlegungsbegriff festgelegt. Vgl. S. 159.

in den Regelbegriff eingehenden Grundzeichens haben wir die Frage nach der Auszeichnung der 'richtigen' Logik auf die Wahl der Regeln verschoben, die für $\sim$ charakteristisch sind. Welche Regeln nun das Widerlegen von Aussagen sinnvollerweise bestimmen, ist ein weiterführendes philosophisches Problem, das hier nicht mehr behandelt werden kann. Daher ist die exemplarische Behandlung bestimmter Widerlegungsregeln in den folgenden §en in gewisser Weise willkürlich und orientiert sich nur daran, daß sie den Negationsregeln bestimmter 'Standardlogiken', wie sie etwa PRAWITZ (1965) behandelt, entsprechen. Deshalb können wir auch nicht ausschließen, daß man einen Widerlegungsbegriff sinnvoll einführen kann, der noch schwächer als der durch die "reductio ad absurdum" charakterisierte ist.

Als Beispiel für einen Kalkül mit Widerlegungsbegriff führen wir an: $\tilde{K}_1$ enthalte +,o als Atome und a,b als Aussagenvariable, wobei alle $\tilde{K}_1$-Ausdrucksformen bzw. -Ausdrücke auch -Formeln bzw. -Aussagen seien. Die Grundregeln von $\tilde{K}_1$ seien:

R_1 $\quad o$

R_2 $\quad a \Rightarrow \sim ab \mathrel{\dot{\Rightarrow}} ao$

R_3 $\quad a \Rightarrow \sim ao$

R_4 $\quad a \Rightarrow b ; \sim b \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \sim a$

R_5 $\quad a \Rightarrow \sim a \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \sim a$.

Wir müssen zeigen, daß in $\tilde{K}_1$ die "reductio ad absurdum" gilt, also für beliebige $\tilde{K}_1$-Aussagen A, B gilt:

$$A \Rightarrow B ; A \Rightarrow \sim B \vdash_{\tilde{K}_1} \sim A \ .$$

Daß dies erfüllt ist, zeigt folgendes Ableitungsschema:

$$\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow B \quad \cfrac{\cfrac{{}^{(1)}[A]}{A}}{B} \qquad\qquad A \Rightarrow \sim B \quad \cfrac{\cfrac{{}^{(2)}[A]}{A}}{\sim B}}{\sim A}\,{}^{(1)}R_4}{\sim A}\,{}^{(2)}R_5$$

Als Beispiel für eine $\tilde{K}_1$-Ableitungsbeziehung beweisen wir: $\vdash_{\tilde{K}_1} \sim +$.

$$(2)R_5\,\dfrac{R_4\,\dfrac{(1)R_2\,\dfrac{R_3\,\dfrac{(1)[+]\,\dfrac{}{+}}{\sim+\circ}}{+\circ} \qquad R_3\,\dfrac{(2)[+]\,\dfrac{}{+}}{\sim+\circ}}{\sim+}}{\sim+}$$

Aus § 4 überträgt sich bis Satz 4.4 alles auf den vorliegenden Fall. Satz 4.5 können wir zunächst in folgender **Form** übernehmen:

<u>Satz 11.1</u> Sei U R-Aussage, Θ System konkreter Regeln. Sei $\Delta[U]$ System konkreter Regeln, in dem an einer Stelle U als Komponente oder Hinterregel einer Komponente irgendeines Grades vorkommt. Sei $\Delta[\Theta]$ das Resultat der Ersetzung dieses Vorkommens von U in $\Delta[U]$ durch Θ. Dann gilt: Wenn $U \dashv\vdash \Theta$, dann $\Delta[U] \dashv\vdash \Delta[\Theta]$.

<u>Beweis</u> Wie Beweis von Satz 4.5.

<u>QED</u>

Satz 11.1 erlaubt jedoch nur Ersetzungen ganzer R-Aussagen, die Komponente oder Hinterregel einer Komponente eines Regelsystems sind. Sie erlaubt z.B. in $\ulcorner \Rightarrow \sim C$ die Ersetzung von $\sim C$ durch Θ, falls $\sim C \dashv\vdash \Theta$, nicht jedoch die Ersetzung von C durch D, falls $C \dashv\vdash D$. Um auch eine solche Ersetzbarkeit formulieren zu können, definieren wir, was es jetzt heißt, unmittelbare Teilaussage einer konkreten $\tilde{K}$-Regel R zu sein:

A heißt unmittelbare Teilaussage von R, falls A oder $\sim A$ Komponente oder Hinterregel einer Komponente irgendeines Grades von R ist.

Mit dieser Definition ergibt sich:

Satz 11.2 Sei $\triangle[A]$ System konkreter Regeln, in dem an einer Stelle die Aussage A als unmittelbare Teilaussage vorkommt. Sei $\triangle[B]$ das Resultat der Ersetzung dieses Vorkommens von A in $\triangle[A]$ durch B. Dann gilt: Wenn $A \dashv\vdash B$, dann $\triangle[A] \dashv\vdash \triangle[B]$.

Beweis Wenn A selbst Komponente oder Hinterformel einer Komponente von $\triangle[A]$ ist, folgt die Behauptung aus Satz 11.1. Falls A als Teil einer R-Aussage $\sim A$ auftritt, benutzen wir, daß aus $A \dashv\vdash B$ und der Gültigkeit der "reductio ad absurdum" folgt: $\sim A \dashv\vdash \sim B$. Hieraus folgt durch Ersetzung von $\sim A$ durch $\sim B$ gemäß Satz 11.1 die Behauptung.

QED

Was wir allerdings im Gegensatz zu Satz 4.5 nicht können, ist die Ersetzung einer beliebigen unmittelbaren Teilaussage durch ein beliebiges Regelsystem, da wir einem Ausdruck $\sim\Theta$ keine sinnvolle Interpretation geben können außer in dem Fall, wo Θ eine Aussage ist.

§ 12. Operatorenlogische Erweiterung von $\tilde{K}$

Wir wollen nun wie in Kap. 2 unsere Kalküle $\tilde{K}$ operatorenlogisch erweitern. Wie in § 6 motiviert, soll ein n-stelliger Operator S dazu dienen, den gemeinsamen Gehalt von Regelsystemen $\Delta_1(p_1,\ldots,p_n),\ldots,\Delta_m(p_1,\ldots,p_n)$ auszudrücken, wobei dies jetzt natürlich Regelsysteme im erweiterten Sinne sind, also $\sim$ enthalten dürfen. Dabei wollen wir uns wie in § 5 - § 9 auf $\geq$1-stellige Operatoren beschränken. Die Erweiterung um 0-stellige Operatoren läßt sich dann leicht bewerkstelligen, wie wir in § 10 gesehen haben.

Es soll also in $\tilde{K}_\Omega$ für alle $\tilde{K}_\Omega$-Aussagen und alle konkreten $\tilde{K}_\Omega$-Regeln R gelten:

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \Delta_i(A_1,\ldots,A_n)\vdash R \quad \text{für alle i mit } 1\leq i\leq m \\ \qquad\qquad \text{g.d.w.} \quad S(A_1,\ldots,A_n)\vdash R \quad . \end{array}\right.$$

Dies ist offenbar genau dann erfüllt, wenn folgende Regeln ableitbar sind:

$$(2)\left\{\begin{array}{l} S\text{-}E\left\{\begin{array}{l} \Delta_1(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \\ \qquad\vdots \\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \end{array}\right. \\ S\text{-}B\left\{\begin{array}{l} \Delta_1(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow p;\ldots;\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow p;S(p_1,\ldots,p_n)\dot{\Rightarrow} p \\ \Delta_1(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow\sim p;\ldots;\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow\sim p;S(p_1,\ldots,p_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dot{\Rightarrow}\sim p \quad . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

D.h. es gilt das Analogon zu Satz 6.2. Im Unterschied zu (8) aus § 6 sind jetzt in (2) also <u>zwei</u> B-Regeln nötig, was daraus resultiert, daß die Hinterregel von R aus (1) die Gestalt $\sim A$ haben kann. (Man beachte, daß $\sim A$ nie für eine Aussagenvariable p eingesetzt werden darf.) Ein Grundregelsystem der Gestalt (2) bezeichnen wir auch mit $\tilde{\Sigma}_S$.

Weiterhin gilt analog zu Satz 6.3:

<u>Satz 12.1</u> $\tilde{K}_\Omega$ enthalte ein System $\tilde{\Sigma}_S$ von nichtatomaren Grundregeln der Gestalt

$$\begin{array}{l} \Delta(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n) \\ \Delta(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow p;S(p_1,\ldots,p_n)\dot{\Rightarrow} p \\ \Delta(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow\sim p;S(p_1,\ldots,p_n)\dot{\Rightarrow}\sim p \quad . \end{array}$$

$\tilde{K}_\Omega^-$ sei der Kalkül, der aus $\tilde{K}_\Omega$ durch Ersetzung von $\tilde{\xi}_S$ durch

$$S(p_1,\dots,p_n) \Leftrightarrow \Delta(p_1,\dots,p_n)$$

entsteht. Dann gilt:

(i) $S(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow \Delta(p_1,\dots,p_n)$ ist $\tilde{K}_\Omega^-$-ableitbar.

(ii) $\Delta(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow p; S(p_1,\dots,p_n) \dot{\Rightarrow} p$ und

$\Delta(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow \sim p; S(p_1,\dots,p_n) \dot{\Rightarrow} \sim p$ sind

$\tilde{K}_\Omega^-$-ableitbar.

Beweis Wie Beweis von Satz 6.3.

QED

Damit können wir wieder stillschweigend die Regeln

$$S(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow \Delta(p_1,\dots,p_n)$$

als S-B-Regeln benutzen, falls $\tilde{\xi}_S$ als einzige E-Regel

$$\Delta(p_1,\dots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\dots,p_n)$$

hat. Wobei es jedoch für metalogische Untersuchungen weiterhin zweckmäßig bleibt, von der allgemeinen Form (2) auszugehen.

Auch wenn die S-Grundregeln in diesem Falle durch

$$S(p_1,\dots,p_n) \Leftrightarrow \Delta(p_1,\dots,p_n)$$

wiedergegeben werden können, kann man nicht wie in § 6 ohne weiteres von "expliziter Definierbarkeit" von S sprechen, jedenfalls dann nicht, wenn man an explizite Definitionen die Forderung der Eliminierbarkeit stellt. Denn wie oben (S. 156) bemerkt, gilt in Kalkülen mit Widerlegungsbegriff nicht uneingeschränkt die Ersetzbarkeit von Aussagen durch Systeme konkreter Regeln, falls vor Aussagen ein Widerlegungszeichen $\sim$ steht: In $\sim S(A_1,\dots,A_n)$ läßt sich z.B. nicht ohne weiteres $S(A_1,\dots,A_n)$ durch das Regelsystem $\Delta(A_1,\dots,A_n)$ ersetzen. Diese Tatsache hängt auch davon ab, daß wir zunächst nur die "reductio ad absurdum" als Kennzeichen des Widerlegungsbegriffes haben. In der in § 14 eingeführten Verschärfung, in der auch das "ex contradictione quodlibet" zur Verfügung steht, ist $\sim S(A_1,\dots,A_n)$ gleichwertig mit dem System $S(A_1,\dots,A_n) \Rightarrow A_1,, S(A_1,\dots,A_n) \Rightarrow \sim A_1$ (das Doppelkomma trennt dabei die Komponenten des Systems), so daß wir auf diesem Umweg S dann doch eliminieren können. (Vgl. dazu Satz 15.1.)

Mit der Wahl von (2) zum Schema für Operator-Grundregelsysteme ist jedoch noch nicht garantiert, daß unsere Adäquatheitsbedingung für $\sim$, die Gültigkeit der "reductio ad absurdum", in um solche Grundregelsysteme erweiterten Kalkülen erfüllt ist. Deshalb wollen wir in $\tilde{K}_{\Omega}$ außer $\tilde{\Sigma}_{s_1}, \ldots, \tilde{\Sigma}_{s_e}$ noch die Ω-Regel

(RA) $\quad p \Rightarrow q ; p \Rightarrow \sim q \dot{\Rightarrow} \sim p$

als zusätzliche nichtatomare Grundregel hinzunehmen. Die Widerlegung auch einer komplexen Aussage soll also nur durch RA gegeben sein. Damit entscheiden wir uns für einen indirekten Widerlegungsbegriff, wonach eine Aussage schon dann als widerlegt zählt, wenn sich aus ihr irgendein Widerspruch ableiten läßt. Im Gegensatz dazu stünde ein direkter Widerlegungsbegriff, nach dem die Widerlegung einer nichtatomaren Aussage A von bestimmten Forderungen an die Begründbarkeit bzwl Widerlegbarkeit von Subaussagen von A abhängt.[1] Ein solcher Widerlegungsbegriff liegt z.B. den logischen Systemen von NELSON (1949), ACKERMANN (1950) oder FITCH (1952) [2] zugrunde. VON KUTSCHERA (1969) hat ein entsprechendes System von Widerlegungsregeln für beliebige n-stellige Operatoren angegeben. In unserem semantischen Rahmen, der auf dem Begriff des gemeinsamen Gehaltes von Regelsystemen aufbaut, lassen sich solche Widerlegungsregeln jedoch nicht interpretieren.

$\tilde{K}_{\Omega}$ hat also als nichtatomare Grundregeln: RA sowie $\tilde{\Sigma}_{s_1}, \ldots, \tilde{\Sigma}_{s_e}$. Damit hat auch $\tilde{K}_{\phi}$ sowie $\tilde{K}^{o}_{\Omega}$ eine nichtatomare Grundregel, nämlich RA.[3]

==============

1) Die Bezeichnungen "direkt" und "indirekt" in diesem Zusammenhang entnehme ich VON KUTSCHERA (1969).

2) Vgl. PRAWITZ (1965), S. 96f.

3) Mit RA meinen wir eine nichtatomare Grundregel. Wenn wir dagegen von der Gültigkeit von "reductio ad absurdum" sprechen, meinen wir die Gültigkeit von Ableitungsbeziehungen im <u>Grundkalkül</u> $\tilde{K}$, nämlich die Ableitbarkeit von

Wir müssen nun zeigen, daß die Kriterien von § 5, Nichtkreativität und Eindeutigkeit, auch für $\tilde{K}_{\Omega}$ erfüllt sind. Dazu sind einige Modifikationen gegenüber § 7 nötig, da wir es nicht mehr nur mit Operator-Grundregelsystemen, sondern zudem mit der Regel RA zu tun haben.

Die Definitionen vom Beginn des §en 7 nehmen jetzt folgende Gestalt an:
Wir übernehmen die Definitionen von "Teilaussage", "$\tilde{K}_{\Omega}$-Subaussage" und "$\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-Subaussage", wobei wir für "unmittelbare Teilaussage einer konkreten Regel R" den neuen, oben S. 155 definierten, Sinn zugrundelegen, sie ferner wie folgt für R-Aussagen erweitern:

Eine R-Aussage der Gestalt $\sim A$ heißt $\tilde{K}_{\Omega}$- bzw. $\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-Subaussage einer konkreten Regel R, falls A $\tilde{K}_{\Omega}$- bzw. $\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-Subaussage von R ist.

Offensichtlich ist für R-Aussagen U,V äquivalent:

U ist $\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-Subaussage von V
$\bar{U}$ ist $\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-Subaussage von V
U ist $\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-Subaussage von $\bar{V}$
$\bar{U}$ ist $\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-Subaussage von $\bar{V}$.

Damit fallen unter den Begriff von $\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-Subaussagen nicht nur Aussagen, sondern auch R-Aussagen. Wir sparen uns jedoch die umständliche Redeweise von "$\tilde{K}^{i}_{\Omega}$-$\underline{\underline{R}}$-Subaussagen". Für die Subaussagenbeziehung zwischen zwei R-Aussagen ist es also unwesentlich, ob man Widerlegungszeichen $\sim$ wegläßt oder hinzufügt. Das entspricht unserer Auffassung, daß $\sim$ kein konstituierender Bestandteil einer Aussage ist.

Während die Subaussagenbeziehung zwischen einer Aussage A und $\sim A$ symmetrisch ist, wollen wir sicherstellen, daß der Rang von $\sim A$ größer ist als der von A. Deshalb müssen wir die Rangdefinition etwas anders formulieren:

============

$A \Rightarrow B; A \Rightarrow \sim B \dot{\Rightarrow} \sim A$ für alle atomaren Aussagen A,B. Dabei ist die Gültigkeit von "reductio ad absurdum" im Grundkalkül $\tilde{K}$ gleichwertig mit der Ableitbarkeit von RA in $\tilde{K}_{\emptyset}$ (jedoch nicht gleichwertig mit der Ableitbarkeit von RA in $\tilde{K}_{\Omega}$, falls Ω nichtleer).

$rg(A)=0$ falls A atomare Aussage

$rg(\sim A)=rg(A)+1$ für beliebige Aussagen A

$rg(R_1,\ldots,R_s \Rightarrow U)=\max\{rg(R_1),\ldots,rg(R_s),rg(U)\}$

$rg(\Delta)=\max\{rg(R_1),\ldots,rg(R_k)\}$, falls Δ die Glieder $R_1,\ldots,R_k$ hat

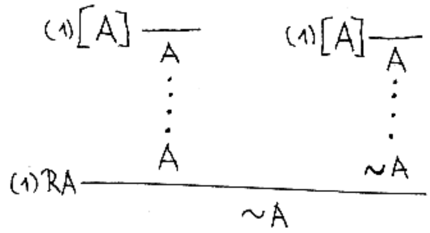
$rg(S(A_1,\ldots,A_n))=\max\{rg(\Delta_1(A_1,\ldots,A_n)),\ldots,rg(\Delta_m(A_1,\ldots,A_n)\}+1$,

falls die S-E-Regeln lauten:

$$\begin{array}{c}\Delta_1(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)\\ \vdots\\ \Delta_m(p_1,\ldots,p_n)\Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)\ .\end{array}$$

Um den Normalisierungssatz formulieren und mit dessen Hilfe ein Subaussagenprinzip beweisen zu können, brauchen wir wieder den Begriff des Segmentes. Diesen Begriff erweitern wir so, daß er sich nicht nur auf Nebenprämissen der Anwendung von B-Regeln bezieht, sondern auch auf rechte Prämissen solcher RA-Anwendungen, bei denen die rechte Prämisse mit der Konklusion gestaltgleich ist. Wir definieren also:

Eine RA-Anwendung der Form



heiße <u>identische RA-Anwendung</u> (genauer: RA-Anwendung, in der rechte Prämisse und Konklusion identische Gestalt haben).

Ein <u>Segment</u> ist ein Abschnitt $U_1,\ldots,U_n$ eines Fadens - wobei $n=1$ zugelassen wird; dann besteht das Segment nur aus U_1 -, so daß gilt:

1) U_1 ist nicht Konklusion der Anwendung einer B-Regel oder einer identischen RA-Anwendung.

2) Für jedes i mit $1\leq i<n$ ist U_i Nebenprämisse der Anwendung einer B-Regel oder rechte Prämisse einer identischen RA-Anwendung.

3) U_n ist nicht Nebenprämisse der Anwendung einer B-Regel und nicht rechte Prämisse einer identischen RA-Anwendung.[1)]

Ein Segment besteht jetzt natürlich aus Vorkommen einer R-Aussage, die nicht notwendigerweise eine Aussage sein muß.

Wir wollen ein Segment in folgenden beiden Fällen als <u>maximal</u> bezeichnen:
1. wenn es mit der Konklusion einer Anwendung einer E-Regel beginnt und mit der Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel endet;
2. wenn es mit der Konklusion einer Anwendung von RA beginnt und mit einer Prämisse einer Anwendung von RA endet.

Wenn wir zwischen beiden Fällen differenzieren wollen, sprechen wir von maximalen Segmenten der ersten oder zweiten Art. Maximale Segmente im Sinne von § 7 sind jetzt gerade die maximalen Segmente der ersten Art. Aufgrund der Definition von "Segment" ist sichergestellt, daß maximale Segmente 2. Art immer mit der Konklusion bzw. Prämisse einer <u>nichtidentischen</u> RA-Anwendung beginnen bzw. enden.

============

1)Diese Modifikation des Begriffs des Segmentes gegenüber PRAWITZ (1965) ist eine direkte Folge davon, daß wir den Begriff der Widerlegung und nicht den der Absurdität als Grundbegriff haben. Daraus werden sich im Beweis des Normalisierungssatzes weitere Komplikationen gegenüber PRAWITZ (1965) ergeben. Z.B. übersieht dies die Darstellung der PRAWITZschen Normalisierungsresultate bei DUMMETT (1977). DUMMETT benutzt einerseits $\neg$ statt ⅄ als Grundzeichen, übernimmt andererseits nur die PRAWITZschen Reduktionsverfahren, die auf ⅄ als Grundbegriff zugeschnitten sind. So wäre z.B.

$$\dfrac{\dfrac{A \quad \neg A}{C} \quad \neg C}{\neg D}$$

nach den bei DUMMETT angegebenen Definitionen eine nichtreduzierbare und damit normale Ableitung von $\neg D$ aus $C, A, \neg A$ in der Minimallogik. Andererseits gilt für sie nicht das Teilformelprinzip, obwohl DUMMETT dessen Gültigkeit annimmt (vgl. DUMMETT 1977, S. 161). - Auf die Notwendigkeit solcher Modifikationen gegenüber PRAWITZ (1965) haben mich zum Teil C. Grob und D. Bressler hingewiesen.

Lemma 12.2 Jede $\tilde{K}^i_\Omega$-Ableitung von U aus Δ läßt sich in eine $\tilde{K}^i_\Omega$-Ableitung von U aus Δ umformen, die keine maximalen Segmente enthält.

Beweis Π sei die betrachtete Ableitung. Wie im Beweis von Lemma 7.6 führen wir wieder Paarinduktion über $\langle\rho(\Pi), \lambda(\Pi)\rangle$ wobei $\rho(\Pi)$ der größte Rang eines in Π vorkommenden maximalen Segmentes und $\lambda(\Pi)$ die Summe der Längen der in Π vorkommenden maximalen Segmente vom Rang $\rho(\Pi)$ ist. $\rho(\Pi)$ sei 0, wenn Π kein maximales Segment enthält. Wenn $\rho(\Pi)=0$, enthält Π keine maximalen Segmente (da es keine maximalen Segmente vom Rang 0 gibt), so daß der Induktionsanfang erfüllt ist.
Sei $\rho(\Pi)>0$. Wir wählen in Π ein solches maximales Segment σ vom Rang $\rho(\Pi)$, für das gilt:
1. Das R-Aussagenvorkommen unmittelbar unter dem untersten R-Aussagenvorkommen von σ ist nicht das oberste R-Aussagenvorkommen eines weiteren maximalen Segments vom Rang $\rho(\Pi)$.
2. Für alle maximalen Segmente σ_1 vom Rang $\rho(\Pi)$ über σ gilt: Unmittelbar unter dem untersten R-Aussagenvorkommen von σ_1 steht das oberste R-Aussagenvorkommen eines weiteren maximalen Segments vom Rang $\rho(\Pi)$.
3. Neben dem untersten R-Aussagenvorkommen von σ steht kein R-Aussagenvorkommen, über dem sich ein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ befindet oder das zu einem maximalen Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ gehört.

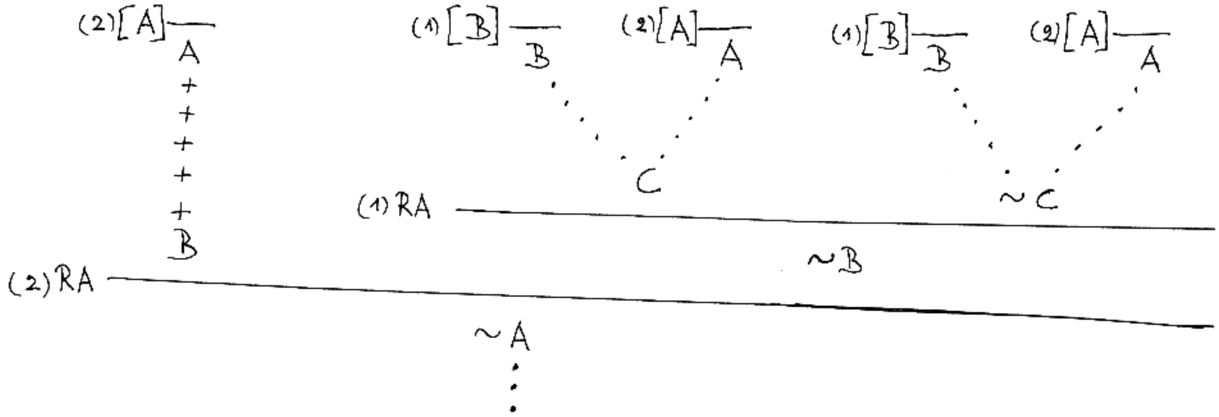
Ein solches Segment σ läßt sich immer finden. (Dies sieht man auf ähnliche Weise ein wie im Beweis von Lemma 7.6.)

Offensichtlich stimmen diese Bedingungen für die Wahl von σ mit denen im Beweis von Lemma 7.6 (S. 106) überein, falls σ ein maximales Segment erster Art ist, da Konklusionen der Anwendung von B-Regeln nie <u>oberste</u> Glieder eines Segments sein können und Prämissen der Anwendung von E-Regeln nie <u>unterste</u> Glieder eines Segments sein können.[1]

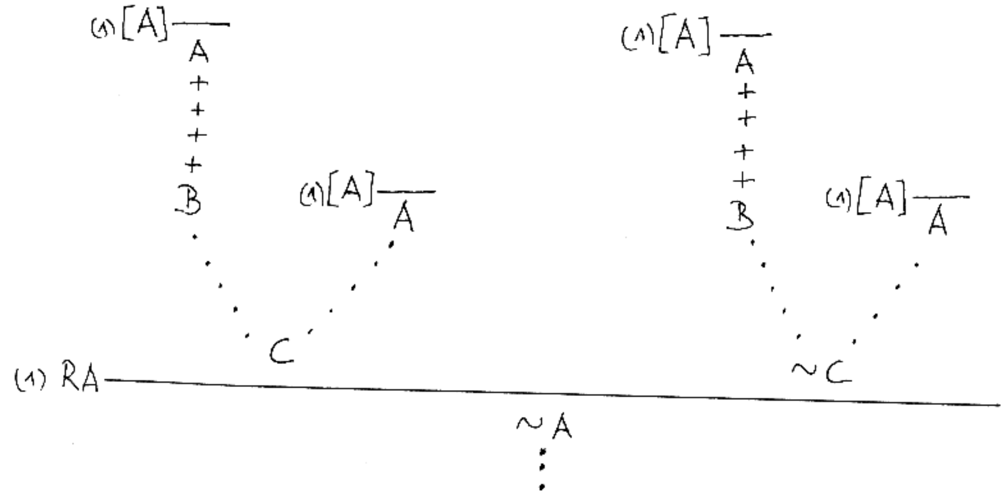
===========

1) Auch diese kompliziertere Wahl von σ ist eine Konsequenz davon, daß wir einen Widerlegungsbegriff statt der Absurdität zum Grundbegriff gewählt haben.

Fall a) σ hat Länge 1. Ist σ maximales Segment erster Art, können wir die Argumentation aus dem Beweis von Lemma 7.6 (S. 106f.) übernehmen. Ist σ maximales Segment 2. Art, dann hat σ die Gestalt $\sim B$ und tritt in folgender Form in Π auf:

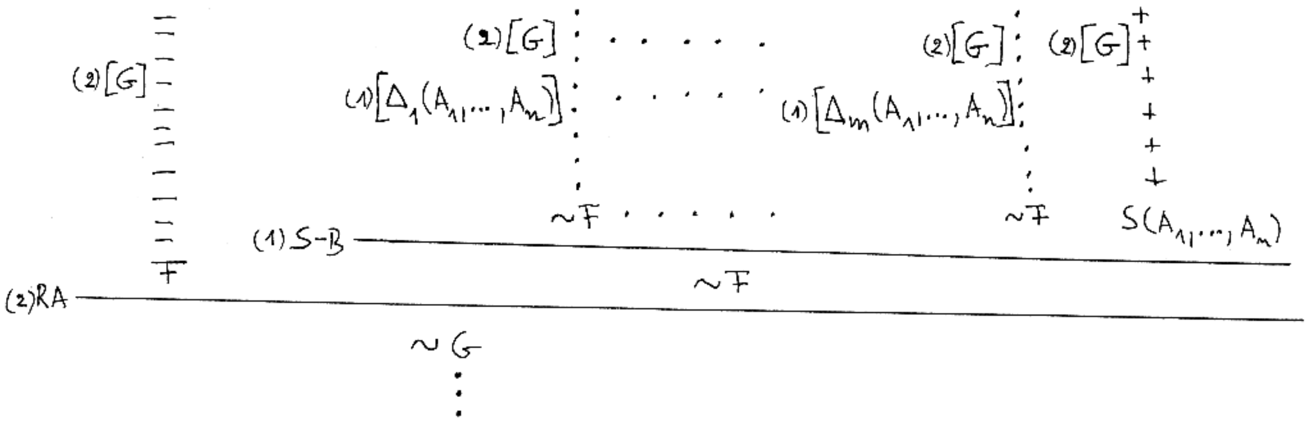


Dieses Ableitungsstück formen wir um zu:

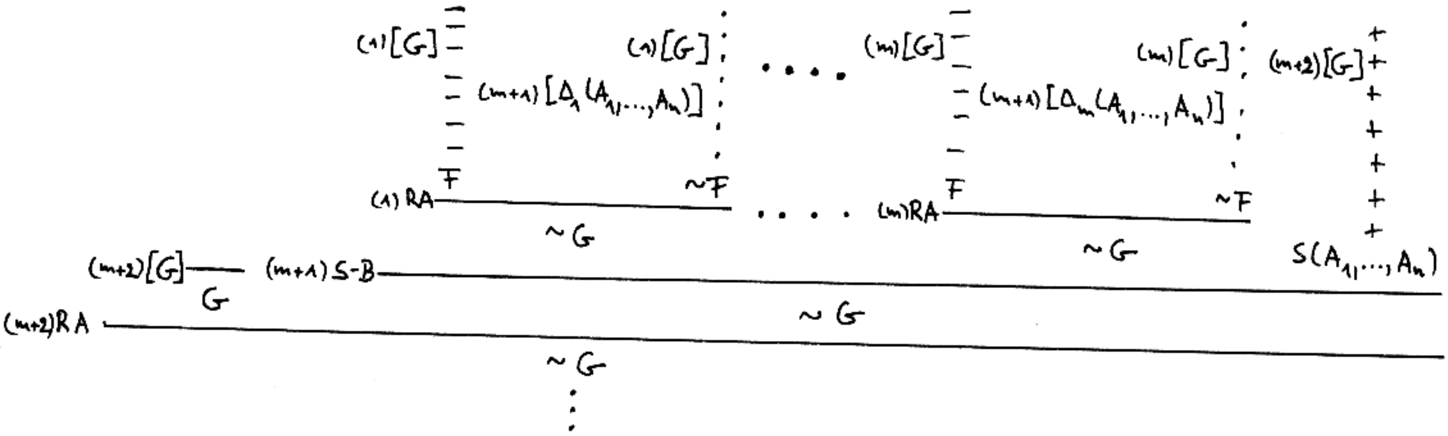


Durch diese Umformung verschwindet σ. Nach Wahl von σ kommt in der mit $+$ markierten Ableitung kein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ vor, ebenso kann jetzt B nicht zu einem maximalen Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ gehören, da $rg(B) < rg(\sim B)$. Ist Π' die umgeformte Ableitung, so gilt also: $\rho(\Pi') < \rho(\Pi)$ oder es gilt: $\rho(\Pi') = \rho(\Pi)$ und $\lambda(\Pi') < \lambda(\Pi)$. In beiden Fällen kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden.

<u>Fall b)</u> σ hat Länge >1. Ist σ maximales Segment erster Art, das mit der Konklusion der Anwendung einer B-Regel endet, argumentieren wir wie im Beweis von Lemma 7.6 (S. 108f.). Ist σ maximales Segment 2. Art, das mit der Konklusion der Anwendung einer B-Regel endet und das aus Vorkommen von $\sim F$ besteht, dann ist das letzte Vorkommen von $\sim F$ in σ zugleich rechte Prämisse einer Anwendung von RA. σ tritt in Π also so auf:



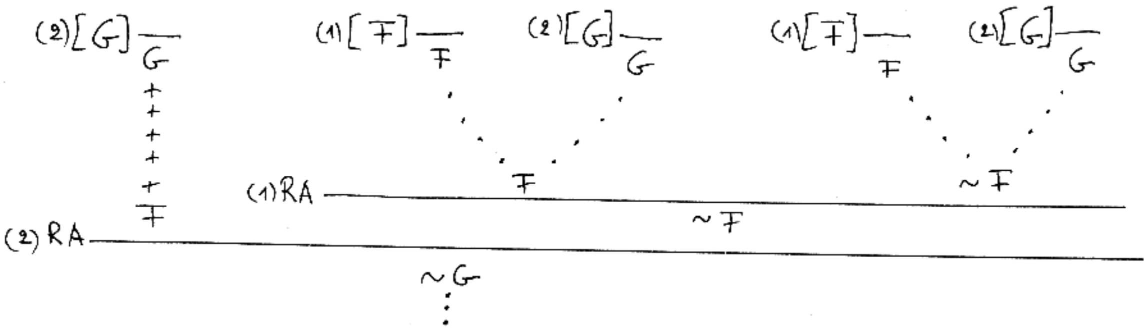
Dies formen wir so um:



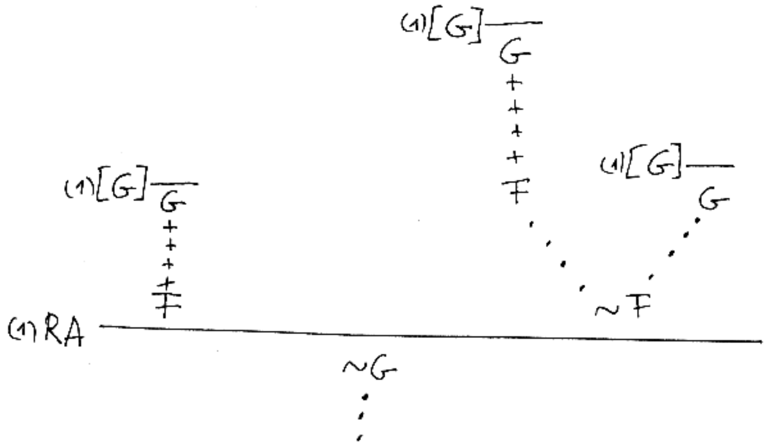
(Im Gegensatz zum Fall maximaler Segmente 1. Art ist die Reduktion etwas komplizierter, da in der mit $\begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix}$ bezeichneten Ableitung die Annahme G vorkommen kann, die in einer eigenen Anwendung von RA noch gelöscht werden muß.)
Nach Wahl von σ kann das unmittelbar unter dem letzten R-Aussagenvorkommen $\sim F$ von σ stehende R-Aussagenvorkommen $\sim G$ nicht zu einem maximalen Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ gehören, so daß es unwesentlich ist, daß das Segment, zu dem $\sim G$ gehört, aufgespalten wird in mehrere Segmente, die außerdem

jeweils um zwei Glieder länger sind. $\lambda(\Pi)$ sinkt durch diese Umformung, $\rho(\Pi)$ bleibt gleich, also ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar. (Hier wirkt sich die erweiterte Definition von "Segment" aus, wonach das unterste Vorkommen von $\sim G$ mit dem unmittelbar darüberstehenden Vorkommen von $\sim G$ zu demselben Segment gehört, da die unterste RA-Anwendung eine identische RA-Anwendung ist. Hätte man es bei der Definition von "Segment" aus § 7 belassen, würden durch die Umformung zwei **neue maximale** Segmente zweiter Art entstehen, die aus jeweils zwei Vorkommen von $\sim G$ bestehen und mit der rechten Prämisse der untersten RA-Anwendung enden. Dies würde die Induktionsvoraussetzung unanwendbar machen, falls $rg(\sim G) > \rho(\Pi)$, was nicht ausgeschlossen ist, wenn $\sim G$ in der ursprünglichen Ableitung zu keinem maximalen Segment gehörte.)

Falls σ mit der Konklusion einer identischen RA-Anwendung endet, besteht σ aus R-Aussagenvorkommen der Gestalt $\sim F$, kann also nur maximales Segment zweiter Art sein. σ tritt in Π demnach so auf:



Dieses Ableitungsstück formen wir um zu:



Durch diese Umformung wird σ verkürzt. Da nach Wahl von σ in der mit $\ddagger$ markierten Ableitung kein maximales Segment vom Rang $\rho(\pi)$ vorkommt, ferner wegen $rg(F) < rg(\sim F)$ F in der neuen Ableitung nicht zu einem maximalen Segment vom Rang $\rho(\pi)$ gehören kann, können wir wieder die Induktionsvoraussetzung anwenden.

<u>QED</u>

Eine $\tilde{K}^i_\Omega$-Ableitung heißt wieder <u>normal</u>, wenn sie keine maximalen Segmente und keine redundanten Anwendungen von B-Regeln enthält.

Unter diesen Begriff der Normalität fallen immer noch Ableitungen, die in dem Sinne "unschön" sind, als sie überflüssige Regelanwendungen enthalten. So ist z.B. folgende Ableitung normal:

$$\text{(3) RA}\;\dfrac{\text{(3)}[A]\dfrac{}{A} \qquad \text{(2) RA}\;\dfrac{\text{(2)}[A]\dfrac{}{A} \qquad \text{(1) RA}\;\dfrac{\text{(1)}[A]\dfrac{}{A} \qquad \sim A\dfrac{}{\sim A}}{\sim A}}{\sim A}}{\sim A}$$

obwohl doch offensichtlich alle RA-Anwendungen überflüssig sind, man die Ableitung also ersetzen kann durch

$$\sim A\dfrac{}{\sim A}\;.$$

Man könnte den Normalitätsbegriff verschärfen, indem man z.B. identische RA-Anwendungen nicht mehr zuläßt, deren rechte Prämisse von keiner Annahme abhängt, die bei dieser Anwendung gelöscht werden könnte. Wir verzichten jedoch auf solche und andere Verschärfungen, da bei uns der Normalisierungssatz ausschließlich dazu dient, das Subaussagenprinzip und damit die Nichtkreativität zu beweisen.[1])

==============

1) In anderen Kontexten sind solche Probleme natürlich sehr wichtig, z.B. bei der Frage nach der intensionalen Identität von Ableitungen.

<u>Satz 12.3</u> (Normalisierungssatz) Jede $\tilde{K}^i_\Omega$-Ableitung von U aus Δ läßt sich in eine normale $\tilde{K}^i_\Omega$-Ableitung von U aus Δ umformen.

<u>Beweis</u> Die im Beweis von Lemma 7.5 beschriebene Konstruktion erzeugt keine neuen maximalen Segmente. <u>QED</u>

Die Definition von "Pfad" (oben S. 109f.) ändern wir so ab, daß ein Pfad auch bei der linken Prämisse einer RA-Anwendung endet:

Ein <u>Pfad</u> in einer normalen Ableitung Π ist eine Folge $U_1,\ldots,U_n$ von R-Aussagenvorkommen aus Π, für die gilt:

1) U_1 ist ein oberstes R-Aussagenvorkommen in Π, das nicht durch Heranziehung einer Annahme zustandegekommen ist, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird.

2) Für alle i ($1 \leq i < n$) ist U_i nicht Prämisse einer Anwendung einer Annahmeregel, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird, und nicht linke Prämisse einer RA-Anwendung, und entweder

2a) U_i ist nicht Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel, und U_{i+1} ist das unmittelbar unter U_i stehende R-Aussagenvorkommen, oder

2b) U_i ist Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel, und U_{i+1} ist eines der R-Aussagenvorkommen, die Konklusion einer Anwendung einer solchen Annahmeregel sind, die bei der vorliegenden Anwendung der B-Regel gelöscht wird. (Solche R-Aussagenvorkommen existieren bei normalen Ableitungen immer, da diese keine redundanten Anwendungen von B-Regeln enthalten.)

3) U_n ist Prämisse der Anwendung einer Annahmeregel, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird, oder U_n ist linke Prämisse einer Anwendung von RA, oder U_n ist das unterste R-Aussagenvorkommen von Π.

Lemma 7.8 gilt dann auch in diesem Fall.

An der Definition von"Nebenabschnitt" und "Hauptabschnitt" (S. 112) ändern wir nichts (abgesehen davon, daß wir sie jetzt auf R-Aussagenvorkommen statt auf Aussagenvorkommen beziehen). Das bedeutet, daß in Hauptabschnitten auch Prämissen und Konklusionen von Anwendungen von RA und nicht nur von Operator-Grundregeln vorkommen können. Aus diesem Grunde können wir Lemma 7.9 nicht übernehmen, sondern formulieren stattdessen folgendes etwas modifiziertes Lemma:

Lemma 12.4 Sei H Hauptabschnitt eines Pfades in einer normalen $\tilde{K}^i_\Omega$-Ableitung. Sei $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die Folge der Segmente, aus denen H besteht. Dann gibt es ein "minimales Segment" σ_i $(1 \leq i \leq n)$, so daß gilt:
(i) Für jedes j mit $1 \leq j < i$ ist σ_j Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel und σ_{j+1} ist $\tilde{K}^i_\Omega$-Subaussage von σ_j und $rg(\sigma_{j+1}) < rg(\sigma_j)$.
(ii) Falls $i \neq n$, ist σ_i Prämisse einer Anwendung einer E-Regel oder Prämisse einer Anwendung von RA.
(iii) Für jedes j mit $i < j < n$ ist σ_j Prämisse einer Anwendung einer E-Regel und σ_j ist $\tilde{K}^i_\Omega$-Subaussage von σ_{j+1}.

$\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ heißt auch Beseitigungsteil, $\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n$ auch Einführungsteil von H.

Beweis Alle σ_j, die Hauptprämissen der Anwendung von B-Regeln sind, gehen in H allen σ_k, die Prämissen der Anwendung von E-Regeln oder von RA sind, voran. Denn sonst gäbe es ein σ_j $(1 \leq j < n)$, so daß σ_j Prämisse einer Anwendung einer E-Regel oder von RA ist, σ_{j+1} jedoch Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel ist. σ_{j+1} wäre dann (da σ_{j+1} als Operat nicht Konklusion einer RA-Anwendung sein kann) maximales Segment im Widerspruch zur Normalität der Ableitung.

σ_i sei das erste Segment in H, das nicht mehr Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel ist. σ_i erfüllt dann (ii). Sei nun $i < j < n$. Ist σ_j rechte Prämisse einer RA-Anwendung, ergibt sich ein Widerspruch: σ_j kann weder Konklusion einer RA-Anwendung (Normalität!) noch einer Anwendung einer E-Regel (da σ_j aus Gliedern der Gestalt $\sim$A besteht) sein. Schließlich kann σ_j wegen $i < j$ auch nicht Konklusion einer Anwendung einer Annahmeregel sein, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird, da dann σ_{j-1} Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel sein müßte. Da wegen $j < n$ nach Definition von "Pfad" σ_j nicht linke Prämisse einer RA-Anwendung sein kann, muß σ_j Prämisse einer Anwendung einer E-Regel sein. (Als Nebenprämissen von Anwendungen von B-Regeln kommen Segmente nicht in Frage, da sie nach Definition nicht mit solchen Nebenprämissen enden können.) - Die Behauptungen über Subaussagen und Ränge sind trivial.

<u>QED</u>

Mit Lemma 12.4 ist wie in Lemma 7.9 gesichert, daß jede R-Aussage eines Hauptabschnittes H Subaussage der ersten oder letzten R-Aussage von H ist. Nur daß bei Lemma 7.9 noch zusätzlich galt, daß das minimale Segment σ_i sowohl Subaussage der ersten als auch der letzten Aussage von H war. Damit läßt sich, da Lemma 7.10 und 7.11 weiter gültig bleiben, der Beweis des Subaussagenprinzips aus § 7 im wesentlichen auf den vorliegenden Fall übertragen.

<u>Satz 12.5</u> Sei Π eine $\tilde{K}^i_\Omega$-Ableitung von U aus Δ für beliebiges i ($1 \leq i \leq \ell$). Dann läßt sich Π in eine $\tilde{K}^i_\Omega$-Ableitung Π' von U aus Δ umformen, so daß jede in Π' vorkommende nichtatomare R-Aussage $\tilde{K}^i_\Omega$-Subaussage von Δ oder U ist.

<u>Beweis</u> Wie in § 7 kann man beweisen, daß eine nach Satz 12.3 zu Π existierende normale Ableitung Π' die Bedingung erfüllt. Wir geben nur die Stellen an, an denen der Beweis von Satz 7.2 (vgl. oben S. 114-118) wesentlich modifiziert werden muß.
Zu zeigen ist, daß alle in Nebenabschnitten vorkommenden nichtatomaren R-Aussagen $\tilde{K}^i_\Omega$-Subaussagen von Δ oder U sind. Gegenüber dem Beweis von Satz 7.2 ist dabei zu beachten, daß jetzt

1. eine zusätzliche Möglichkeit besteht, Annahmen zu löschen, nämlich bei RA-Anwendungen,
2. daß Pfade der Ordnung >0 mit Aussagenvorkommen enden können, die nicht Prämisse der Anwendung einer herangezogenen Regel sind, nämlich mit linken Prämissen von RA-Anwendungen.

Ad 1: Angenommen, das erste R-Aussagenvorkommen B des betrachteten Pfades π wird bei einer RA-Anwendung gelöscht, deren Konklusion $\sim B$ lautet. Falls B atomar, ist nichts zu zeigen. Falls B nichtatomar und Prämisse der Anwendung einer herangezogenen Regel, ist die Behauptung schon durch den Beweis von Satz 7.2 gesichert. Wir brauchen also nur noch den Fall zu betrachten, daß B das einzige R-Aussagenvorkommen des ersten Nebenabschnittes N_1 von π ist, also zugleich das erste R-Aussagenvorkommen des ersten Hauptabschnittes H_1 von π . Wegen $rg(\sim B) > rg(B)$ kann $\sim B$ nach Lemma 12.4 nicht **(etwa als Konklusion einer identischen** RA-Anwendung) zum Beseitigungsteil von H_1 gehören. Also kann $\sim B$ nur a) zum Einführungsteil von H_1 oder b) zu einem Hauptabschnitt H_t von π mit $t > 1$ oder c) zu einem Hauptabschnitt eines Pfades kleinerer Ordnung als π gehören. In den Fällen a), b) ist $\sim B$ und damit auch B Subaussage einer R-Aussage, die in einem Nebenabschnitt N_s von π mit $s > 1$ vorkommt, so daß man die Induktionsvoraussetzung bezüglich (k+1)-s [k+1: Zahl der Nebenabschnitte von π] anwenden kann. Im Fall c) ist $\sim B$ und damit B Subaussage einer R-Aussage eines Nebenabschnittes eines Pfades kleinerer Ordnung als π , so daß man die Induktionsvoraussetzung bezüglich der Pfadordnung anwenden kann.

(Hier zeigt sich, wie wichtig die Behauptung $rg(\sigma_{j+1}) < rg(\sigma_j)$ in Lemma 12.4 (i) ist. Sie wird noch nicht davon impliziert, daß σ_{j+1} Subaussage von σ_j ist, denn z.B. ist nach unseren Definitionen $\sim B$ Subaussage von B (vgl. S. 160).

Ad 2: Das letzte R-Aussagenvorkommen des betrachteten Pfades π sei die linke Prämisse C einer RA-Anwendung. Dann steht neben C die zu einem Pfad niedrigerer Ordnung gehörende

R-Aussage $\sim C$. Da C dieselben $\tilde{K}^i_\Omega$-Subaussagen wie $\sim C$ hat, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung bezüglich der Ordnung der Pfade.

QED

Daraus folgt analog zu Satz 7.3 die Nichtkreativität von Folgen von Operator-Grundregelsystemen:

Satz 12.6 Sei R konkrete Regel, in der S_i nicht vorkommt. Falls $\vdash_{\tilde{K}^i_\Omega} R$, dann $\vdash_{\tilde{K}^{i-1}_\Omega} R$.

QED

Satz 12.7 Sei R konkrete atomare Regel. Falls $\vdash_{\tilde{K}_\Omega} R$, dann $\vdash_{\tilde{K}} R$.

Beweis Durch ℓ-fache Anwendung von Satz 12.5 folgt aus $\vdash_{\tilde{K}_\Omega} R$: $\vdash_{\tilde{K}^0_\Omega} R$. Wir beweisen nun durch Induktion über der Länge von $\tilde{K}^0_\Omega$-Ableitungen Π, daß für beliebige atomare Regeln R gilt: Wenn $\vdash_{\tilde{K}^0_\Omega} R$, dann $\vdash_{\tilde{K}} R$.
Wendet Π im letzten Schritt eine atomare Grundregel oder atomare Annahmeregel oder RA mit atomaren Prämissen an, so ergibt sich die Behauptung sofort durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf die Ableitungen der Prämissen dieser Anwendung und daraus, daß "reductio ad absurdum" in $\tilde{K}$ gilt. Andere Fälle können nicht auftreten bzw. sind trivial: Würde Π im letzten Schritt eine nichtatomare Annahmeregel anwenden, wäre R nichtatomar. Würde Π im letzten Schritt RA mit nichtatomarer linker Prämisse $S(A_1,\dots,A_n)$ (S aus Ω) anwenden, ergäbe sich durch Betrachtung der Ableitung Π' dieser Prämisse folgender Widerspruch: Π' könnte im letzten Schritt weder eine atomare Grundregel noch eine atomare Annahmeregel (da $S(A_1,\dots,A_n)$ nichtatomar) noch eine nichtatomare Annahmeregel (da R sonst nichtatomar wäre) noch RA anwenden (da Konklusionen von RA-Anwendungen immer mit $\sim$ beginnen).

QED

Damit können wir das Kriterium der Nichtkreativität für $\tilde{K}_\Omega$ als erfüllt ansehen.

Für das Kriterium der Eindeutigkeit sind keine aufwendigen neuen Beweise zu führen. Wie man nämlich leicht nachprüft, gelten Satz 7.12 bis 7.15 auch im vorliegenden Fall. Denn die Beweise dieser Sätze benutzen das Ersetzungstheorem II (Satz 4.5) nur soweit, als es sich auf die Ersetzung von Aussagen durch Aussagen bezieht. Diese ist nach Satz 11.2 auch in Kalkülen mit Widerlegungsbegriff möglich.

§ 13. Operatorenvollständigkeit des Systems $\wedge\vee\rightarrow\neg$. Minimallogik.

So wie sich in § 8 die Operatorenvollständigkeit des Systems $\wedge\vee\rightarrow$ für die dort betrachteten Kalküle K_Ω zeigen ließ, können wir jetzt die Operatorenvollständigkeit von $\wedge\vee\rightarrow\neg$ für Kalküle $\tilde{K}_\Omega$ beweisen. Die Regelsysteme $\tilde{\Sigma}_\wedge, \tilde{\Sigma}_\vee, \tilde{\Sigma}_\rightarrow, \tilde{\Sigma}_\neg$ für $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ sind jetzt gegeben durch:

$$\tilde{\Sigma}_\wedge \begin{cases} (\wedge\text{-E}) & p_1, p_2 \Rightarrow (p_1 \wedge p_2) \\ (\wedge\text{-B}) & \begin{cases} p_1, p_2 \Rightarrow p; (p_1 \wedge p_2) \dot{\Rightarrow} p \\ p_1, p_2 \Rightarrow \sim p; (p_1 \wedge p_2) \dot{\Rightarrow} \sim p \end{cases} \end{cases}$$

$$\tilde{\Sigma}_\vee \begin{cases} (\vee\text{-E}) & \begin{cases} p_1 \Rightarrow (p_1 \vee p_2) \\ p_2 \Rightarrow (p_1 \vee p_2) \end{cases} \\ (\vee\text{-B}) & \begin{cases} p_1 \Rightarrow p; p_2 \Rightarrow p; (p_1 \vee p_2) \dot{\Rightarrow} p \\ p_1 \Rightarrow \sim p; p_2 \Rightarrow \sim p; (p_1 \vee p_2) \dot{\Rightarrow} \sim p \end{cases} \end{cases}$$

$$\tilde{\Sigma}_\rightarrow \begin{cases} (\rightarrow\text{-E}) & p_1 \Rightarrow p_2 \dot{\Rightarrow} (p_1 \rightarrow p_2) \\ (\rightarrow\text{-B}) & \begin{cases} p_1 \Rightarrow p_2 \dot{\Rightarrow} p; (p_1 \rightarrow p_2) \ddot{\Rightarrow} p \\ p_1 \Rightarrow p_2 \dot{\Rightarrow} \sim p; (p_1 \rightarrow p_2) \ddot{\Rightarrow} \sim p \end{cases} \end{cases}$$

$$\tilde{\Sigma}_\neg \begin{cases} (\neg\text{-E}) & \sim p_1 \Rightarrow (\neg p_1) \\ (\neg\text{-B}) & \begin{cases} \sim p_1 \Rightarrow p; (\neg p_1) \dot{\Rightarrow} p \\ \sim p_1 \Rightarrow \sim p; (\neg p_1) \dot{\Rightarrow} \sim p \end{cases} \end{cases} .$$

$\tilde{\Sigma}_\wedge, \tilde{\Sigma}_\vee, \tilde{\Sigma}_\rightarrow$ unterscheiden sich von $\Sigma_\wedge, \Sigma_\vee, \Sigma_\rightarrow$ aus § 8 nur durch die zusätzliche B-Regel. Für die Klammerung der Junktoren vereinbaren wir dasselbe wie in § 8 (vgl. oben S. 124). Außerdem soll gelten, daß $\neg$ stärker bindet als die anderen Junktoren. Wegen Satz 12.1 können wir $\wedge$-B, $\rightarrow$-B, $\neg$-B ersetzen durch:

$$(\wedge\text{-B}) \begin{cases} (p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_1 \\ (p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_2 \end{cases}$$

$$(\rightarrow\text{-B}) \quad (p_1 \rightarrow p_2), p_1 \Rightarrow p_2$$

$$(\neg\text{-B}) \quad (\neg p_1) \Rightarrow \sim p_1 \quad .$$

Wenn wir von $\wedge$-B, $\rightarrow$-B, $\neg$-B reden, meinen wir also fortan stillschweigend diese vereinfachten Regeln. Da wir im folgenden Kalküle betrachten, in denen alle 4 Regelsysteme $\tilde{\Sigma}_\wedge, \tilde{\Sigma}_\vee, \tilde{\Sigma}_\rightarrow, \tilde{\Sigma}_\neg$ vorkommen, können wir auf die zusätzliche $\vee$-B-Regel

$$p_1 \Rightarrow \sim p; p_2 \Rightarrow \sim p; (p_1 \vee p_2) \dot{\Rightarrow} \sim p$$

verzichten, denn diese Regel ist aus der anderen $\vee$-B-Regel

$$p_1 \Rightarrow p; p_2 \Rightarrow p; (p_1 \vee p_2) \Rightarrow p$$

zusammen mit den $\neg$-Regeln

$$\sim p_1 \Rightarrow \neg p_1$$

$$\neg p_1 \Rightarrow \sim p_1$$

ableitbar. Damit nehmen die $\wedge$-, $\vee$-, $\rightarrow$-Grundregeln dieselbe Form wie in § 8 an. Wenn wir von $\tilde{\Sigma}_\wedge, \tilde{\Sigma}_\vee, \tilde{\Sigma}_\rightarrow, \tilde{\Sigma}_\neg$ reden, meinen wir von jetzt an also (verkürzt notiert):

$$\tilde{\Sigma}_\wedge \quad p_1, p_2 \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2$$

$$\tilde{\Sigma}_\vee \quad \begin{cases} p_1 \Rightarrow p_1 \vee p_2 \\ p_2 \Rightarrow p_1 \vee p_2 \\ p_1 \Rightarrow p; p_2 \Rightarrow p; p_1 \vee p_2 \dot{\Rightarrow} p \end{cases}$$

$$\tilde{\Sigma}_\rightarrow \quad p_1 \Rightarrow p_2 \dot{\Leftrightarrow} p_1 \rightarrow p_2$$

$$\tilde{\Sigma}_\neg \quad \sim p_1 \Leftrightarrow \neg p_1 \quad .$$

Zum Beweis der Operatorenvollständigkeit ordnen wir wie in § 8 jedem nichtleeren System Δ von $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg\Omega}$-Regeln eine $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg\Omega}$-Formel Δ^* durch folgende Bestimmungen zu:

X^* sei mit X identisch für Formeln X

$(\sim X)^*$ sei $\neg X$ für Formeln X

$(R_1,\ldots,R_s \Rightarrow R)^*$ sei $((R_1^* \wedge \ldots \wedge R_s^*) \rightarrow R^*)$ für eine Regel $R_1,\ldots,R_s \Rightarrow R$

$(R_1,\ldots,R_s)^*$ sei $(R_1^* \wedge \ldots \wedge R_s^*)$ für ein aus den Regeln $R_1,\ldots,R_s$ bestehendes Regelsystem .

Lemma 8.2 gilt natürlich auch im vorliegenden Fall. Im Beweis von Lemma 8.3 muß zusätzlich nur noch der Fall berücksichtigt werden, daß Λ die Gestalt $\sim A$ hat. In diesem Fall gilt mit den $\neg$-Grundregeln sofort die Behauptung $\sim A \dashv\vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg\Omega}} \neg A$. Der Beweis von Satz 8.4 kann sofort übernommen werden und damit auch der von Satz 8.1:

<u>Satz 13.1</u> Sei Ω System von Operatoren $S_1, \dots, S_\ell$ und $\tilde{\Sigma}_{S_1}, \dots, \tilde{\Sigma}_{S_\ell}$ methodisch zulässig für Ω. Dann gibt es zu jedem n-stelligen Operator S aus Ω eine $\wedge\vee\to\neg$-Formel $F(p_1,\dots,p_n)$, so daß gilt:

$$S(p_1,\dots,p_n) \Leftrightarrow F(p_1,\dots,p_n)$$

ist in $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg\Omega}$ ableitbar.

<u>QED</u>

Sei nun $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$ wieder als Kalkül im Sinne von § 2 (allerdings jetzt mit Widerlegungsbegriff) verstanden, der dasselbe Vokabular und dieselben nichtatomaren Grundregeln wie $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}$ hat, und statt atomarer Grundregeln R von $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}$ Regeln $(R)_1{}^* \Rrightarrow (R)_2{}^*$ (vgl. oben S. 130). $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$ erlaubt also nur die Heranziehung und Löschung von R-Aussagen, nicht von konkreten Regeln höherer Stufe. $\mathring{R}$ sei wieder die konkrete $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}$-Regel, die aus einer konkreten $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg\Omega}$-Regel dadurch hervorgeht, daß man jedes Vorkommen eines nicht mit $\wedge, \vee, \to, \neg$ beginnenden Operats $S(A_1,\dots,A_n)$ durch die entsprechende nach Satz 13.1 existierende Aussage $F(A_1,\dots,A_n)$ ersetzt, bis kein von $\wedge, \vee, \to, \neg$ verschiedener Operator mehr auftritt. Dann gilt analog zu Satz 8.6 bis Satz 8.8:

<u>Satz 13.2</u>

(i) Seien $R_1,\dots,R_n$ konkrete $\tilde{K}_\Omega$-Regeln, U $\tilde{K}_\Omega$-R-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\dots,R_n \vdash_{\tilde{K}_\Omega} U \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1,\dots,\mathring{R}_n \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}} \mathring{U} \quad .$$

(ii) Seien $R_1,\dots,R_n$ konkrete $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}$-Regeln, U $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}$-R-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\dots,R_n \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}} U \quad \text{g.d.w.} \quad R_1,\dots,R_n \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg\Omega}} U \quad .$$

Beweis wie der von Satz 8.6.

QED

Satz 13.3

(i) Für alle konkreten $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Regeln $R_1,\dots,R_n$ und $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-R-Aussagen U gilt:

$$R_1,\dots,R_n \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} U \quad \text{g.d.w.} \quad R_1{}^*,\dots,R_n{}^* \vdash_{\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} U^* \quad .$$

(ii) Für alle $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-R-Aussagen $U_1,\dots,U_n,U$ gilt:

$$U_1,\dots,U_n \vdash_{\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} U \quad \text{g.d.w.} \quad U_1,\dots,U_n \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} U \quad .$$

Beweis

(i) Zusätzlich zu den im Beweis von Satz 8.7 behandelten Fällen müssen noch die $\neg$-Grundregeln und RA berücksichtigt werden, außerdem ist die Anwendung von Regeln 0. Stufe neu zu behandeln.

Richtung von links nach rechts: Bei der Anwendung einer Regel 0. Stufe ist zu beachten, daß aus $R \equiv U$ bzw. $R^\beta \equiv U$ folgt: $R^* \equiv U^*$ bzw. $R^{*\beta} \equiv U^*$. Falls die betrachtete $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitung Π von U aus $R_1,\dots,R_n$ im letzten Schritt $\neg$-E anwendet, hat U die Gestalt $\neg A$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitung von $(\sim A)^*$ aus $R_1{}^*,\dots,R_n{}^*$. Da $U^* \equiv (\neg A)^* \equiv \neg A \equiv (\sim A)^*$, ist dies gerade die gesuchte Ableitung. Falls Π im letzten Schritt $\neg$-B anwendet, hat U die Gestalt $\sim A$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitung von $(\neg A)^*$ aus $R_1{}^*,\dots,R_n{}^*$. Da $U^* \equiv$ $\equiv (\sim A)^* \equiv \neg A \equiv (\neg A)^*$, ist dies gerade die gesuchte Ableitung. Falls Π im letzten Schritt RA anwendet, hat U die Gestalt $\sim A$, und es gibt nach Induktionsvoraussetzung $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitungen von C^* und von $(\sim C)^*$ aus $R_1{}^*,\dots,R_n{}^*,A^*$ für eine $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Aussage C. Nach Anwendung von $\neg$-B auf die Konklusion $\neg C$ $(\equiv (\sim C)^*)$ der letzteren Ableitung erhält man $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitungen von C und $\sim C$ aus $R_1{}^*,\dots,R_n{}^*, A^*$ und daraus mit RA eine $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitung von $\sim A$ aus $R_1{}^*,\dots,$ $R_n{}^*$. Daraus mit $\neg$-E die gesuchte $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitung von $\neg A$ $(\equiv U^*)$ aus $R_1{}^*,\dots,R_n{}^*$.

Richtung von rechts nach links: Wir zeigen: Wenn

$R_1^*,\ldots,R_n^* \vdash_{\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}} U$, dann

$R_1,\ldots,R_n \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}} U$,

durch Induktion über der Länge von $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$-Ableitungen Π. Daraus folgt mit $U^* \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}} U$ die Behauptung.

Wendet eine betrachtete $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$-Ableitung Π von U aus $R_1^*,\ldots,R_n^*$ im letzten Schritt eine Regel 0. Stufe an, so ist $U \equiv R_i^*$ bzw. $U \equiv R^{*\beta}$ (für atomare $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$-Anfangsregel R^*, wobei R atomare $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}$-Anfangsregel). Dann ist $R_i \equiv U$ oder $\neg\overline{R_i} \equiv U$ bzw. $R^\beta \equiv U$ oder $\neg\overline{R}^\beta \equiv U$. Durch Anwendung von R_i bzw. R in $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}$ und evtl. Anwendung von $\neg$-E ergibt sich die Behauptung. Wendet Π im letzten Schritt eine $\neg$-Grundregel oder RA an, so folgt die Behauptung sofort durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung. Wenn Π im letzten Schritt eine sonstige Regel anwendet, ist U Aussage; man argumentiert wie im Beweis von Satz 8.7.

(ii) folgt aus (i) wie bei Satz 8.7.

QED

Satz 13.4

(i) Seien $R_1,\ldots,R_n$ konkrete $\tilde{K}_\Omega$-Regeln, U $\tilde{K}_\Omega$-R-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\ldots,R_n \vdash_{\tilde{K}_\Omega} U \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1^*,\ldots,\mathring{R}_n^* \vdash_{\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}} \mathring{U}^* .$$

(ii) Seien $U_1,\ldots,U_n,U$ $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$-R-Aussagen. Dann gilt:

$$U_1,\ldots,U_n \vdash_{\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}} U \quad \text{g.d.w.} \quad U_1,\ldots,U_n \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg\Omega}} U .$$

Beweis Satz 13.2 und Satz 13.3.

QED

Dieses Resultat läßt sich noch etwas verschärfen. Zunächst können wir die zu $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$ gehörende Regel RA ersetzen durch

(RA$\neg$) $\qquad p \Rightarrow q ; p \Rightarrow \neg q \stackrel{\cdot}{\Rightarrow} \neg p$,

wie sich sofort unter Verwendung der $\neg$-Regeln ergibt. Weiterhin läßt sich sogar völlig auf den in § 11 eingeführten formalen Widerlegungsbegriff und damit insbesondere auf die $\neg$-Grundregeln verzichten: Sei $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}$ der Kalkül, der sich von $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$ folgendermaßen unterscheidet:

1. $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}$ hat zwar in seinem Vokabular den Junktor $\neg$, jedoch kein Operator-Grundregelsystem für $\neg$.
2. $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}$ enthält RA$\neg$ statt RA als Grundregel.
3. $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}$ hat keinen formalen Widerlegungsbegriff. D.h. in $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}$ -Regeln kann kein "$\sim$" vorkommen, $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}$ hat einen **Regel- und Ableitungsbegriff wie in § 2 definiert.**

(Man beachte, daß atomare Grundregeln $\Delta \Rightarrow X$ von $\tilde{K}_{\wedge\vee\to\neg}$ schon in $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$ die Gestalt $\Delta^* \Rightarrow X^*$ annahmen, aus ihnen also "$\sim$" eliminiert wurde.)

Daß der Junktor "$\neg$" innerhalb von $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}$ die Rolle, die "$\sim$" in $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$ hatte, mitübernehmen kann, zeigt folgender Satz:

<u>Satz 13.5</u> Seien $U_1,\ldots,U_n,U$ $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}$-R-Aussagen. Dann gilt:

$$U_1,\ldots,U_n \vdash_{\tilde{K}^*_{\wedge\vee\to\neg}} U \quad \text{g.d.w.} \quad U_1{}^*,\ldots,U_n{}^* \vdash_{\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}} U^* \quad .$$

<u>Beweis</u> <u>Richtung von rechts nach links:</u> Sei Π eine $K^{**}_{\wedge\vee\to}$-Ableitung von U^* aus $U_1{}^*,\ldots,U_n{}^*$. Indem wir in Π jede Anwendung von RA$\neg$:

$$\begin{array}{lcc}
 & {}^{(1)}[A]\overline{} & {}^{(1)}[A]\overline{} \\
 & A & A \\
 & \vdots & \vdots \\
 & B & \neg B \\
\hline
{}^{(1)}\text{RA}_\neg & \multicolumn{2}{c}{\neg A} \\
 & \multicolumn{2}{c}{\vdots}
\end{array}$$

ersetzen durch

$$\text{¬-E}\ \cfrac{\text{(1) RA}\ \cfrac{\begin{matrix}\text{(1)}[A]\ \cfrac{}{A}\\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\text{(1)}[A]\ \cfrac{}{A}\\ \vdots \\ \text{¬-B}\ \cfrac{\neg B}{\sim B}\end{matrix}}{\sim A}}{\begin{matrix}\neg A\\ \vdots\end{matrix}}$$

,

erhalten wir eine $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitung von U* aus $U_1^*,\dots,U_n^*$.
Da ferner für beliebige Aussagen A gilt: $\sim A \dashv\vdash_{\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} \neg A$,
d.h. $\sim A \dashv\vdash_{\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} (\sim A)^*$, folgt die Behauptung.
Für die Richtung von links nach rechts führen wir eine

Induktion über der Länge von $\tilde{K}^*_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Ableitungen Π .

Hat Π Länge 1, zieht also im letzten Schritt eine Annahme U_i heran, hat Π die Gestalt:

$$U_i\ \cfrac{}{U_i}$$

Dem entspricht eine $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$-Ableitung

$$U_i^*\ \cfrac{}{U_i^*} \quad .$$

Falls Π im letzten Schritt eine $\wedge$-, $\vee$-, $\rightarrow$-Grundregel anwendet, wenden wir die Induktionsvoraussetzung einfach auf die Ableitungen der Prämissen dieser Regelanwendungen an, da die $\wedge$-, $\vee$-, $\rightarrow$-Grundregeln in beiden Kalkülen identisch sind. Dasselbe gilt für Anwendungen von Regeln $\Delta^* \Rightarrow X^*$, falls $\Delta \Rightarrow X$ Grundregel von $\tilde{K}$ ist, da diese Regeln ebenfalls in beiden Kalkülen vorkommen.
Zu behandeln ist also nur noch der Fall, daß Π im letzten Schritt eine $\neg$-Grundregel oder RA anwendet. Falls Π die $\neg$-B-Regel anwendet:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\text{-B}\ \dfrac{\neg A}{\sim A} \end{array}$$,

ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung, bezogen auf die Ableitung der Prämisse dieser Anwendung von $\neg$-B, sofort die Behauptung, da $(\neg A)^* \equiv \neg A \equiv (\sim A)^*$.
Ist im letzten Schritt die $\neg$-E-Regel verwendet:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\text{-E}\ \dfrac{\sim A}{\neg A} \end{array}$$

ergibt sich analog die Behauptung.

Benutzt Π im letzten Schritt RA:

$$(1)\text{RA}\ \dfrac{\begin{array}{c} (1)[A]\,\overline{} \\ A \\ \vdots \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} (1)[A]\,\overline{} \\ A \\ \vdots \\ \sim B \end{array}}{\sim A}$$

dann erhält man nach Induktionsvoraussetzung, bezogen auf die Ableitungen der Prämissen B und $\neg$B, $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$-Ableitungen von B und $\neg$B und damit eine $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$-Ableitung:

$$(1)\ \text{RA}_{\neg}\ \dfrac{\begin{array}{c} (1)[A]\,\overline{} \\ A \\ \vdots \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} (1)[A]\,\overline{} \\ A \\ \vdots \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

.

<u>QED</u>

Zusammen mit Satz 13.4 folgt dann:

Satz 13.6

(i) Seien $R_1,\ldots,R_n$ konkrete $\tilde{K}_\Omega$-Regeln, U $\tilde{K}_\Omega$-R-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\ldots,R_n \vdash_{\tilde{K}_\Omega} U \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1{}^*,\ldots,\mathring{R}_n{}^* \vdash_{\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}} \mathring{U}^* \; .$$

(ii) Seien $A_1,\ldots,A_n,A$ $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$-Aussagen. Dann gilt:

$$A_1,\ldots,A_n \vdash_{\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}} A \quad \text{g.d.w.} \quad A_1,\ldots,A_n \vdash_{\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg\Omega}} A \; .$$

QED

$\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$ wollen wir im Anschluß an die Bezeichnung von I. JOHANSSON als Kalkül der Minimallogik über $\tilde{K}$ bezeichnen. Satz 13.6 besagt, daß dieser Kalkül gleichwertig mit einer beliebigen operatorenlogischen Erweiterung $\tilde{K}_\Omega$ von $\tilde{K}$ ist, falls Ω die Operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ enthält. Dies ist insofern bemerkenswert, als $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$ gar keinen formalen Widerlegungsbegriff mehr enthält. Der in $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ mittels eines formalen Widerlegungsbegriffes definierte Junktor $\neg$ kann die Funktion des Widerlegungsbegriffs selbst übernehmen.

Entsprechend § 9 können wir wieder einen formalen Kalkül angeben, der die Aussageschemata ableitbar macht, die durch Interpretation in einem beliebigen $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$ ableitbar sind. Wir gehen dazu von einem Kalkül $\tilde{L}$ aus, der sich von dem in § 9 angegebenen Kalkül L dadurch unterscheidet, daß er

1. a und b als $\tilde{L}$-Aussagevariablen hat,
2. einen formalen Widerlegungsbegriff hat,
3. $a \Rightarrow b; a \Rightarrow \sim b \doteq\!\!> \sim a$ als Grundregel hat.

$\tilde{L}$ ist damit ein Kalkül im Sinne von § 11. Wir bilden nun $\tilde{L}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$. Diesen Kalkül kürzen wir mit M ab und nennen ihn Kalkül der formalen Minimallogik. M ist mit dem von JOHANSSON angegebenen Kalkül der Minimallogik gleichwertig. Außer den Grundregeln für $\wedge, \vee, \rightarrow$ enthält er nur die Regel $RA_\neg$. (Eigentlich tritt in M noch die Regel $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b) \Rightarrow \neg a$ auf, die von der $\tilde{L}$-Grundregel $a \Rightarrow b; a \Rightarrow \sim b \doteq\!\!> \sim a$ herrührt.

Da sie jedoch mit RA$\neg$ ableitbar ist, können wir sie weglassen.) Wählt man die übliche Notation für Regeln, wie sie von GENTZEN 1935 und PRAWITZ 1965 her geläufig ist, dann hat M also die Regeln:

$$\frac{p \quad q}{p \wedge q} \qquad \frac{p \wedge q}{p} \qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

$$\frac{p}{p \vee q} \qquad \frac{q}{p \vee q} \qquad \frac{\begin{array}{cc}[p] & [q] \\ r & r\end{array} \quad p \vee q}{r}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[p] \\ q\end{array}}{p \rightarrow q} \qquad \frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

$$\frac{\begin{array}{cc}[p] & [p] \\ q & \neg q\end{array}}{\neg p}$$

Wie in § 9 definieren wir eine Interpretation über $\tilde{K}$ als Funktion $\varkappa$, die jedem Schemabuchstaben (d.h. jeder $\tilde{L}$-Aussage) eine $\tilde{K}$-Aussage zuordnet. $R^{\varkappa}$ für eine konkrete M-Regel R ist also die $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\Rightarrow}$-Regel, die aus R durch Ersetzen jedes Schemabuchstabens A durch $\varkappa(A)$ entsteht. Eine konkrete M-Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ für M-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ heißt M-allgemeingültig, wenn für jedes $\tilde{K}$ und jede Interpretation $\varkappa$ über $\tilde{K}$ gilt:

$$A_1^{\varkappa},\ldots,A_n^{\varkappa} \vdash_{\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\Rightarrow}} A^{\varkappa} \;.$$

Wie in § 9 ist M in folgendem Sinne regellogisch vollständig:

<u>Satz 13.7</u> Für alle M-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ gilt $A_1,\ldots,A_n \vdash_{M} A$ genau dann, wenn die Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ M-allgemeingültig ist.

<u>QED</u>

In unserer regellogischen Deutung der Minimallogik zeigt sich übrigens ganz klar, daß RA$\neg$ keine $\neg$-Grundregel, insbesondere also keine $\neg$-E-Regel ist. RA$\neg$ drückt vielmehr als Ersatz von RA eine Eigenschaft unseres formalen Widerlegungsbegriffes aus. $\neg$-Grundregeln treten in der Minimallogik gar nicht auf. Für unsere Deutung ist es also nicht verwunderlich, daß RA$\neg$ aus dem Schema von E- und B-Regeln herausfällt - was an Kalkülen des natürlichen Schließens bisweilen bemängelt wird. Das Analoge wird im folgenden §en über das "ex contradictione quodlibet" der intuitionistischen Logik zu sagen sein.

§ 14. "Ex contradictione quodlibet" und intuitionistische Logik

In § 11 hatten wir Kalküle $\tilde{K}$ mit formalem Widerlegungsbegriff definiert. Um diesen Widerlegungsbegriff nicht der Willkür zu überlassen, d.h. um die Rede von einem Widerlegungsbegriff zu rechtfertigen, hatten wir als Adäquatheitsbedingung verlangt: In $\tilde{K}$ soll das Prinzip der "reductio ad absurdum" gelten, d.h. für alle $\tilde{K}$-Aussagen A, B soll in $\tilde{K}$ ableitbar sein: $A \Rightarrow B; A \Rightarrow \sim B \dot{\Rightarrow} \sim A$. Dementsprechend hatten wir bei der operatorenlogischen Erweiterung von $\tilde{K}$ zu $\tilde{K}_{\Omega}$ die Regel

(RA) $\quad p \Rightarrow q; p \Rightarrow \sim q \dot{\Rightarrow} \sim p$

als Grundregel angesetzt. In diesem §en wollen wir untersuchen, was sich ergibt, wenn man nicht nur die "reductio ad absurdum", sondern auch das "ex contradictione quodlibet" als Adäquatheitsbedingung für einen formalen Widerlegungsbegriff ansieht. Dieser Standpunkt soll als der intuitionistische bezeichnet werden, weil die meisten Intuitionisten das "ex contradictione quodlibet" als wesentliches Gesetz der intuitionistischen Logik ansehen.[1)]

Wir betrachten also in diesem §en Grundkalküle mit formalem Widerlegungsbegriff, in denen für alle Aussagen A, B die Regeln

$$A \Rightarrow B; A \Rightarrow \sim B \dot{\Rightarrow} \sim A$$
$$A, \sim A \Rightarrow B$$

ableitbar sind. Wir sagen auch: Im Grundkalkül gilt "reduc-

==============

1)Ganz einig ist man sich allerdings nicht darin, wie sehr das "ex contradictione quodlibet" für die intuitionistische Logik wesentlich ist. JOHANSSON bezeichnet z.B. die Minimallogik als einen - wenn auch "reduzierten" - "intuitionistischen Formalismus" (Titel der Arbeit von 1937). Ebenso gesteht HEYTING (1956, S. 106) dem Minimalkalkül das Recht zu, sich "intuitionistisch" zu nennen, obwohl er selbst seinerzeit erstmals "die formalen Regeln der intuitionistischen Logik"(HEYTING 1930) einschließlich des "ex contradictione quodlibet" aufgestellt hatte (vgl. auch GUPTA 1979, S. 143).

tio ad absurdum" und "ex contradictione quodlibet".[1] Grundkalküle, in denen dies erfüllt ist, wollen wir mit $\overset{\approx}{K}$ bezeichnen.

Die Operator-Grundregelsysteme, um die wir $\overset{\approx}{K}$ zu $\overset{\approx}{K}_{\Omega}$ erweitern, sind dieselben wie in § 12. Jedoch werden wir, um die Gültigkeit des "ex contradictione quodlibet" auch für die operatorenlogisch erweiterten Kalküle zu sichern, als weitere nichtatomare Grundregel zu $\overset{\approx}{K}_{\Omega}$ hinzunehmen:

(ECQ) $\quad p, \sim p \Rightarrow q \quad .$

$\overset{\approx}{K}_{\Omega}$ hat also an nichtatomaren Grundregeln die Operator-Grundregelsysteme aus § 12, ferner RA und ECQ. Da $\overset{\approx}{K}_{\Omega}$ gegenüber $\tilde{K}_{\Omega}$ mit ECQ eine zusätzliche nichtatomare Grundregel hat, muß nachgewiesen werden, daß auch jetzt die in § 5 genannten Adäquatheitskriterien (Nichtkreativität und Eindeutigkeit) erfüllt sind. Wie in § 12 müssen wir überprüfen, ob und wie die Sätze aus § 7 in diesem Fall festgehalten werden können. Wir beweisen zunächst:

<u>Lemma 14.1</u> Jede $\overset{\approx}{K}{}^{i}_{\Omega}$-Ableitung Π von U aus Γ läßt sich in eine solche Ableitung von U aus Γ umformen, in der alle Konklusionen von Anwendungen von ECQ atomar sind.

<u>Beweis</u> Unter dem <u>Rang einer ECQ-Anwendung</u> in Π verstehen wir den Rang der Konklusion dieser ECQ-Anwendung. Wir führen nun Paarinduktion über $\langle \gamma, \delta \rangle$, wobei γ der maximale Rang von ECQ-Anwendungen in Π ist und δ die Zahl der ECQ-Anwendungen dieses maximalen Ranges in Π . Falls $\gamma = 0$, ist die Behauptung erfüllt. Falls $\gamma > 0$, wählen wir in Π eine solche ECQ-Anwendung vom Rang γ ,so daß über dieser ECQ-Anwendung keine weitere ECQ-Anwendung vom Rang γ sich befindet. (Eine solche ECQ-Anwendung läßt sich immer finden.) Sie muß folgende Gestalt haben:

============

1)Neben der Ableitbarkeit von $A, \sim A \Rightarrow B$ auch noch die von $A, \sim A \Rightarrow \sim B$ eigens zu fordern, ist nicht notwendig, da sie sich aus der Gültigkeit der "reductio ad absurdum" ergibt.

$$\begin{array}{c} \vdots \qquad \vdots \\ \mathrm{ECQ}\,\dfrac{\mathcal{B} \qquad \sim\mathcal{B}}{S(A_1,\dots,A_n)} \\ \vdots \end{array}$$

wobei der Rang von $S(A_1,\dots,A_n)$ gerade γ ist. Sei nun $R(p_1,\dots,p_n)$ eine der S-E-Regeln. $R(p_1,\dots,p_n)$ besitze ν Vorderregeln. Dann ersetzen wir obiges Ableitungsstück durch:

$$\begin{array}{c} \mathrm{S\text{-}E}\,\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \qquad \vdots \\ \text{ECQ bzw. RA}\,\dfrac{\mathcal{B} \qquad \sim\mathcal{B}}{(R(A_1,\dots,A_n))_{1,1,2}}\end{array} \quad \dots\dots \quad \begin{array}{c}\vdots \qquad \vdots \\ \text{ECQ bzw. RA}\,\dfrac{\mathcal{B} \qquad \sim\mathcal{B}}{(R(A_1,\dots,A_n))_{1,\nu,2}}\end{array}}{S(A_1,\dots,A_n)} \\ \vdots \end{array}$$

"ECQ bzw. RA" soll dabei bedeuten: "Es werde ECQ bzw. RA angewandt, je nachdem $(R(A_1,\dots,A_n))_{1,i,2}$ $(1 \le i \le \nu)$ eine Aussage ist oder die Gestalt $\sim F$ für eine Aussage F hat."

Die Anwendungen von ECQ sind jetzt alle von kleinerem Rang als vorhin. War die betrachtete ECQ-Anwendung die einzige ECQ-Anwendung maximalen Ranges, dann sinkt γ durch die Umformung. War sie nicht die einzige, so tritt nach der Umformung eine ECQ-Anwendung maximalen Ranges weniger auf, da nach Wahl der ECQ-Anwendung in den (jetzt mehrfach auftretenden) Ableitungen von B und $\sim$B keine ECQ-Anwendung maximalen Ranges vorkommt. Es bleibt dann also γ gleich, während δ sinkt. In beiden Fällen können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden.

QED

Statt von ECQ-Anwendungen mit atomarer Konklusion sprechen wir auch von atomaren ECQ-Anwendungen.

Die erweiterte Definition von "Segment" übernehmen wir aus § 12 (s.o. S. 161f.).

In die Definition von "maximal" (vgl. oben S. 162) beziehen wir jetzt ECQ-Anwendungen mit ein:

Ein Segment heißt in folgenden Fällen maximal:
1. Es beginnt mit der Konklusion einer Anwendung einer E-Regel oder der Konklusion einer Anwendung von ECQ, und es endet mit der Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel.
2. Es beginnt mit der Konklusion einer Anwendung von RA und endet mit einer Prämisse einer Anwendung von RA oder ECQ.[1)]

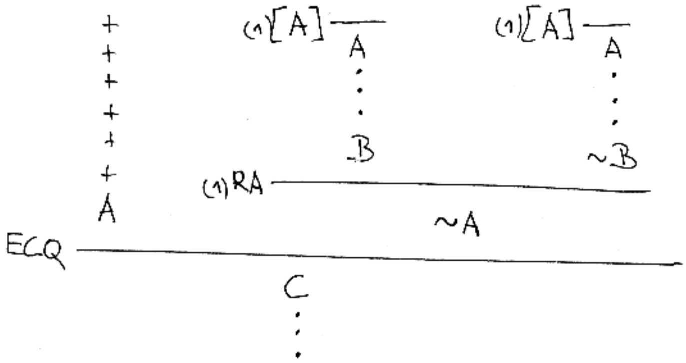
Wir sprechen auch hier von maximalen Segmenten der ersten und der zweiten Art.

Lemma 14.2 Jede $\tilde{\tilde{K}}^{i}_{\Omega}$-Ableitung von U aus Δ läßt sich in eine $\tilde{\tilde{K}}^{i}_{\Omega}$-Ableitung von U aus Δ umformen, die keine maximalen Segmente enthält.

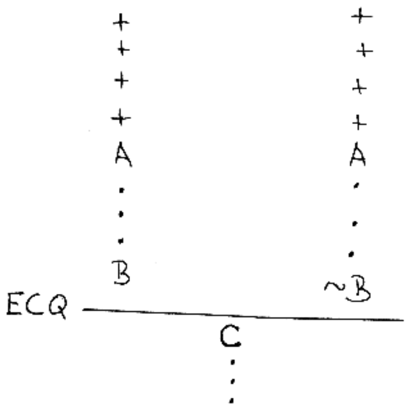
Beweis Wegen Lemma 14.1 können wir voraussetzen, daß eine $\tilde{\tilde{K}}^{i}_{\Omega}$-Ableitung Π nur atomare ECQ-Anwendungen enthält. Daher enthält Π keine maximalen Segmente erster Art, die mit Konklusionen von ECQ-Anwendungen beginnen. In Π treten also an maximalen Segmenten erster Art nur solche im Sinne von § 12 (und § 7) auf.
Wir führen den Beweis wie den von Lemma 12.2, müssen jetzt nur die zusätzlichen Fälle berücksichtigen, in denen ECQ-Anwendungen bei maximalen Segmenten zweiter Art ins Spiel kommen.
Zu Fall a) Zu behandeln ist noch: Das im Beweis von Lemma 12.2 gewählte maximale Segment σ hat Länge 1 und ist ein maximales Segment zweiter Art, das mit der Konklusion einer RA-Anwendung beginnt und einer Prämisse einer ECQ-Anwendung endet. σ tritt dann in folgender Form in Π auf, wobei σ gerade aus der R-Aussage $\sim A$ besteht:

=============

1) Man kann den folgenden Normalisierungssatz auch dann beweisen, wenn man außerdem solche Segmente als maximal ansieht, die mit der Konklusion einer ECQ-Anwendung beginnen und einer Prämisse einer Anwendung von RA oder ECQ enden. Für den Beweis des Subaussagenprinzips, um den es uns in dieser Arbeit alleine geht, ist die Ausweitung des Normalisierungssatzes auf diesen Fall jedoch nicht nötig, weshalb wir sie unterlassen. (Vgl. oben S. 167)



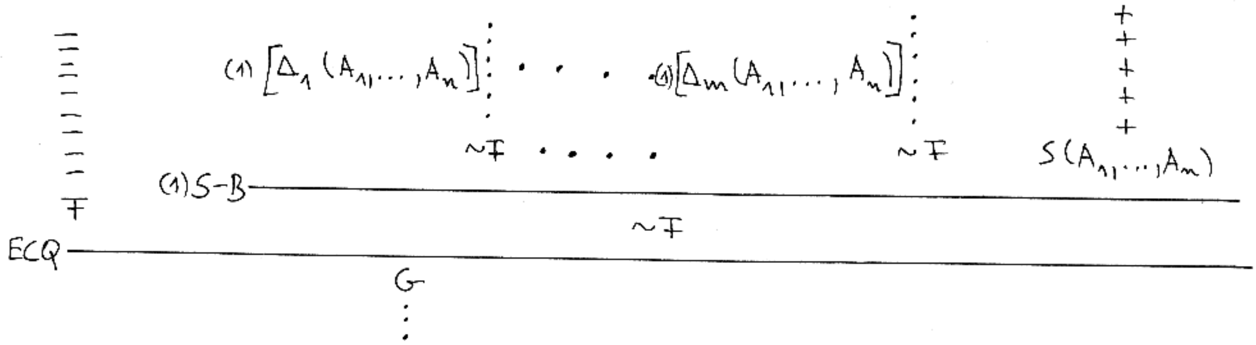
Dieses Ableitungsstück formen wir um zu:



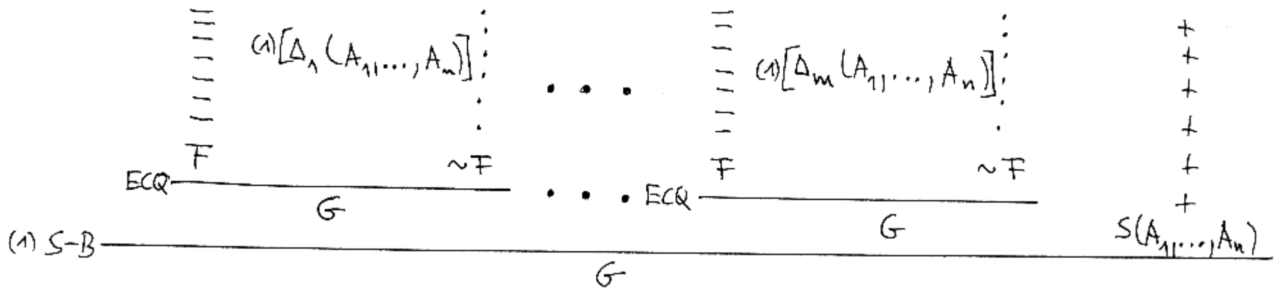
σ verschwindet durch die Umformung. Da $rg(A) < rg(\sim A)$ ist, kann durch die Umformung mit A kein neues maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ entstehen. Außerdem kann nach Wahl von σ in dem mit $\begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix}$ bezeichneten Ableitungsstück kein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ vorkommen, so daß ein mehrfaches Auftreten von $\begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix}$ die Zahl der maximalen Segmente vom Rang $\rho(\Pi)$ nicht vergrößert. Die Zahl der maximalen Segmente vom Rang $\rho(\Pi)$ verringert sich also, so daß wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können.

<u>Zu Fall b)</u> Hier ist noch zu behandeln, daß σ maximales Segment zweiter Art der Länge >1 ist, das mit der Konklusion einer (nichtidentischen) RA-Anwendung beginnt und der rechten Prämisse einer ECQ-Anwendung endet. σ kann dabei b1) mit der Konklusion der Anwendung einer B-Regel enden, oder b2) mit der Konklusion einer identischen RA-Anwendung enden.

Ad b1) σ tritt in folgender Form auf, wobei σ aus Vorkommen von $\sim F$ besteht:

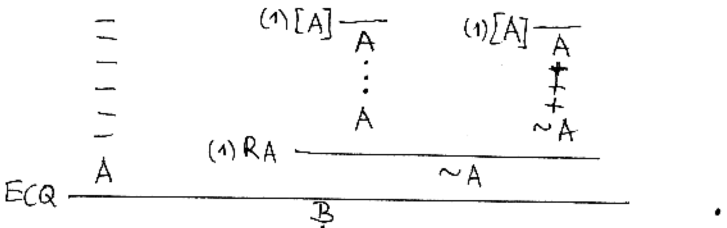


Wir nehmen folgende Umformung vor:

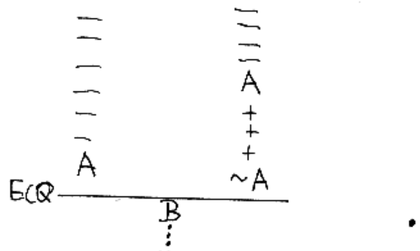


Dadurch wird σ gekürzt. Da G als atomar angenommen werden kann, kann G als Konklusion einer ECQ-Anwendung zu keinem maximalen Segment gehören, so daß die Verlängerung des Segments, zu dem G gehört, nicht schadet. Daher ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar.

Ad b2) σ tritt in folgender Form auf, wobei σ aus Vorkommen von $\sim A$ besteht:



Dies formen wir um zu:



Da dadurch σ gekürzt wird, ferner nach Wahl von σ in der mit $\equiv$ markierten Ableitung kein maximales Segment vom

Rang $\varrho(\Pi)$ auftreten kann, weiterhin $rg(A) < rg(\sim A)$ ist, kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden.

QED

Wir nennen eine Ableitung normal, wenn sie keine maximalen Segmente, keine redundanten Anwendungen von B-Regeln und keine nichtatomaren ECQ-Anwendungen enthält.

Satz 14.3 (Normalisierungssatz) Jede $\overset{\approx}{K}{}^{i}_{\Omega}$-Ableitung Π von U aus Δ läßt sich in eine normale Ableitung von U aus Δ umformen.

Beweis Die im Beweis von Lemma 14.2 angegebene Konstruktion erzeugt keine nichtatomaren ECQ-Anwendungen, die im Beweis von Lemma 7.5 angegebene Konstruktion keine maximalen Segmente. Also kann man die Beweiskonstruktionen der Lemmata 14.1, 14.2, 7.5 in dieser Reihenfolge anwenden.

QED

Für einen späteren Zweck (vgl. § 15) beweisen wir noch:

Satz 14.4 Sei Π eine normale $\overset{\approx}{K}_{\Omega}$-Ableitung eines Operats $S(A_1,\ldots,A_n)$ (ohne Annahmen). Dann wendet Π im letzten Schritt eine S-E-Regel an.

Beweis Induktion über dem Aufbau von Π.
In Π haben alle ECQ-Anwendungen atomare Konklusion. Operate kommen also als Konklusionen von ECQ-Anwendungen nicht in Frage. Da Operate auch nicht Konklusionen von RA-Anwendungen sein können, kann im letzten Schritt von Π nur eine Operator-Grundregel angewendet worden sein.
Falls es sich dabei um eine B-Regel handelt, ist die Ableitung Π' der Hauptprämisse C dieser Anwendung der B-Regel eine normale Ableitung eines Operats, die von keinen Annahmen abhängt (weil sonst auch Π von Annahmen abhängen würde). Nach Induktionsvoraussetzung gilt also, daß Π' im letzten Schritt eine E-Regel anwendet. Daraus ergibt sich ein Widerspruch zur Normalität von Π, weil die Aussage C Konklusion der Anwendung einer E-Regel und Hauptprämisse der Anwendung einer B-Regel wäre, also ein maximales Segment erster Art bilden würde. In Π kann also im letzten Schritt keine B-Regel angewendet worden sein. Also kommt nur eine E-Regel in Frage.

QED

So wie wir in § 12 die Definition von "Pfad" so verändert hatten, daß ein Pfad immer bei der linken Prämisse einer Anwendung von RA endete, so wollen wir jetzt außerdem verlangen, daß ein Pfad auch bei der linken Prämisse einer Anwendung von ECQ endet. "Pfad" soll also jetzt die Definition haben, die sich aus der von S. 168 ergibt, wenn wir dort überall "RA" durch "RA oder ECQ" ersetzen. An der Definition von "Haupt-" und "Nebenabschnitt" ändern wir wie in § 12 nichts.
Anstelle von Lemma 12.4 ergibt sich, indem man "RA" durch "RA oder ECQ" ersetzt:

Lemma 14.5 Sei H Hauptabschnitt eines Pfades in einer normalen $\tilde{\tilde{K}}^{i}_{\Omega}$-Ableitung. Sei $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die Folge der Segmente, aus denen H besteht. Dann gibt es ein "minimales Segment" σ_i $(1 \leq i \leq n)$, so daß gilt:
(i) Für jedes j mit $1 \leq j < i$ ist σ_j Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel und σ_{j+1} ist $\tilde{\tilde{K}}^{i}_{\Omega}$-Subaussage von σ_j, ferner ist $rg(\sigma_{j+1}) < rg(\sigma_j)$.
(ii) Falls $i \neq n$, ist σ_i Prämisse einer Anwendung einer E-Regel oder Prämisse einer Anwendung von RA oder ECQ.
(iii) Für jedes j mit $i < j < n$ ist σ_j Prämisse einer Anwendung einer E-Regel und σ_j ist $\tilde{\tilde{K}}^{i}_{\Omega}$-Subaussage von σ_{j+1}.
$\sigma_1, \dots, \sigma_i$ heißt auch Beseitigungsteil, $\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n$ auch Einführungsteil von H.

Beweis (entspricht fast wörtlich dem Beweis von Lemma 12.4)
Alle σ_j, die Hauptprämissen der Anwendung von B-Regeln sind, gehen in H allen σ_k, die Prämissen der Anwendung von E-Regeln oder Prämissen der Anwendung von RA oder ECQ sind, voran. Denn sonst gäbe es ein σ_j, so daß σ_j Prämisse einer Anwendung einer E-Regel oder Prämisse einer Anwendung von RA oder ECQ ist, σ_{j+1} jedoch Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel ist. σ_{j+1} wäre dann (da σ_{j+1} als Operat nicht Konklusion einer RA-Anwendung sein kann) maximales Segment im Widerspruch zur Normalität der Ableitung.
σ_i sei das erste Segment in H, das nicht mehr Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel ist. σ_i erfüllt dann die Klausel (ii).

Sei nun $i < j < n$. Ist σ_j rechte Prämisse einer RA- oder ECQ-Anwendung, ergibt sich ein Widerspruch: σ_j kann weder Konklusion einer RA-Anwendung sein (Normalität!) noch von ECQ oder einer E-Regel (da σ_j aus Gliedern der Gestalt $\sim A$ besteht) sein. Schließlich kann σ_j wegen $i < j$ auch nicht Konklusion einer Anwendung einer Annahmeregel sein, die später bei Anwendung einer B-Regel wieder gelöscht wird, da dann σ_{j-1} Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel sein müßte.
Da wegen $j < n$ nach Definition von "Pfad" σ_j nicht linke Prämisse einer ECQ- oder RA-Anwendung sein kann, muß σ_j Prämisse einer Anwendung einer E-Regel sein.
Die Behauptungen über Subaussagen und Ränge sind trivial.

QED

Daraus ergibt sich wie in § 12 das Subaussagenprinzip:

Satz 14.6 Sei Π eine $\tilde{\tilde{K}}^i_\Omega$-Ableitung von U aus Δ für beliebiges i ($1 \leq i \leq \ell$). Dann läßt sich Π in eine $\tilde{\tilde{K}}^i_\Omega$-Ableitung Π' von U aus Δ umformen, so daß jede in Π' vorkommende nichtatomare R-Aussage $\tilde{\tilde{K}}^i_\Omega$-Subaussage von Δ oder U ist.

Beweis Zusätzlich zum Beweis von Satz 12.5 ist nur der Fall zu berücksichtigen, daß ein Pfad mit der linken Prämisse C einer Anwendung von ECQ endet. Dann steht neben C die R-Aussage $\sim C$, die zu einem Pfad niedrigerer Ordnung gehört. Da C dieselben $\tilde{\tilde{K}}^i_\Omega$-Subaussagen wie $\sim C$ hat, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung bezüglich der Ordnung der Pfade. 1)

QED

================

1) Es sei noch angemerkt, daß sich in dem Fall, wo Π keine Anwendungen atomarer Grundregeln enthält, das Subaussagenprinzip so verschärfen läßt, daß nicht nur jede nichtatomare, sondern überhaupt jede R-Aussage in Π' $\tilde{\tilde{K}}^i_\Omega$-Subaussage von Δ oder U ist.

Damit ergibt sich die Nichtkreativität:

Satz 14.7 Sei R konkrete $\tilde{\tilde{K}}^{i}_{\Omega}$-Regel, in der S_i nicht vorkommt. Falls $\vdash_{\tilde{\tilde{K}}^{i}_{\Omega}} R$, dann $\vdash_{\tilde{\tilde{K}}^{i-1}_{\Omega}} R$.

QED

Satz 14.8 Sei R konkrete atomare $\tilde{\tilde{K}}_{\Omega}$-Regel. Falls $\vdash_{\tilde{\tilde{K}}_{\Omega}} R$, dann $\vdash_{\tilde{\tilde{K}}} R$.

Beweis Zusätzlich zum Beweis von Satz 12.7 ist zu berücksichtigen, daß in einer $\tilde{\tilde{K}}^{o}_{\Omega}$-Ableitung Π von R alle ECQ-Anwendungen als atomar angenommen werden dürfen, also eine nichtatomare linke Prämisse einer ECQ-Anwendung selbst nicht Konklusion einer ECQ-Anwendung sein kann.

QED

Für den Nachweis des Kriteriums der Eindeutigkeit ist wie in § 12 nichts neues zu beweisen.

Die Resultate von § 13 lassen sich sofort auf den vorliegenden Fall übertragen, was nicht mehr im einzelnen durchgegangen werden soll. Man erhält einen Kalkül $\tilde{\tilde{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$, der definiert ist wie $\tilde{K}^{**}_{\wedge\vee\to}$, außerdem jedoch noch die Grundregel

$(ECQ_{\neg})$ $\qquad p,\neg p \Rightarrow q$

hat. Er heiße auch Kalkül der intuitionistischen Logik über $\tilde{\tilde{K}}$. Er ist, falls $\wedge, \vee, \to, \neg$ in Ω vorkommen, gleichstark mit $\tilde{\tilde{K}}_{\Omega}$ (vgl. Satz 13.6):

Satz 14.9

(i) Seien $R_1,\ldots,R_n$ konkrete $\tilde{\tilde{K}}_{\Omega}$-Regeln, U $\tilde{\tilde{K}}_{\Omega}$-R-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\ldots,R_n \vdash_{\tilde{\tilde{K}}_{\Omega}} U \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1{}^*,\ldots,\mathring{R}_n{}^* \vdash_{\tilde{\tilde{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} \mathring{U}^* \quad .$$

(ii) Seien $A_1,\ldots,A_n,A$ $\tilde{\tilde{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$-Aussagen. Dann gilt:

$$A_1,\ldots,A_n \vdash_{\tilde{\tilde{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} A \quad \text{g.d.w.} \quad A_1,\ldots,A_n \vdash_{\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\to\neg\Omega}} A \ .$$

QED

Einen Kalkül der formalen intuitionistischen Logik erhalten wir wie folgt: $\tilde{\tilde{L}}$ sei der Kalkül $\tilde{L}$ aus § 13, erweitert um die zusätzliche Grundregel

(1) $a, \sim a \Rightarrow b$

mit $\tilde{\tilde{L}}$-Aussagenvariablen a,b. $\tilde{\tilde{L}}$ ist damit ein Grundkalkül, in dem "reductio ad absurdum" und "ex contradictione quodlibet" gelten, wie wir es verlangt haben. Den Kalkül $\tilde{\tilde{L}}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$ bezeichnen wir als <u>Kalkül der formalen intuitionistischen Logik</u> und kürzen ihn mit I ab. Da in I $ECQ_{\neg}$ als Grundregel vorkommt, lassen wir die von (1) herrührende und mit $ECQ_{\neg}$ ableitbare Grundregel $a \wedge \neg a \Rightarrow b$ weg. Damit hat I die übliche Gestalt eines Kalküls des natürlichen Schließens für die intuitionistische Junktorenlogik. In GENTZENscher Notation hat I die auf S. 183 angegebenen Regeln, erweitert um:

$$\frac{p \quad \neg p}{q} \quad .$$

Interpretationen über $\tilde{\tilde{K}}$ und die I-Allgemeingültigkeit von konkreten I-Regeln definieren wir wie in § 13, indem wir dort I statt M und $\tilde{\tilde{K}}$ statt $\tilde{K}$ schreiben. Dann gilt:

<u>Satz 14.10</u> Für I-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ gilt $A_1,\ldots,A_n \vdash_I A$ genau dann, wenn die Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ I-allgemeingültig ist.

<u>QED</u>

Wie schon oben (S. 184) bemerkt, findet die gelegentlich konstatierte Unplausibilität, die die Regeln $RA_{\neg}$ und $ECQ_{\neg}$ haben, wenn man sie als E- und B-Regeln für $\neg$ auffaßt, im Rahmen unseres Ansatzes eine Erklärung. I hat wie M gar keine E- und B-Regeln für $\neg$, in Satz 13.5 wurde vielmehr gezeigt, daß diese überflüssig sind. Die Regeln $RA_{\neg}$ und $ECQ_{\neg}$ drücken Adäquatheitsbedingungen aus, die man an den formalen Widerlegungsbegriff stellt, haben also eine andere Funktion als E- und B-Regeln. Das sieht man jedoch nur deshalb ein, weil zunächst streng zwischen formalem Widerlegungsbegriff $\sim$ und dem Junktor $\neg$ unterschieden und erst nachträglich gezeigt wurde, daß man auch $\neg$ die Rolle von $\sim$ zuweisen kann. Ich sehe nicht, wie man die Negationsregeln von I direkt - d.h. ohne Umweg über einen formalen Widerlegungsbegriff - verständlich machen könnte.

§ 15. v ist nicht explizit definierbar

Gilt in einem Kalkül K_Ω ohne Widerlegungsbegriff für einen Operator S aus Ω für Aussagen $A_1,\ldots,A_n$

(1) $S(A_1,\ldots,A_n) \dashv\vdash \Delta(A_1,\ldots,A_n)$,

so gilt aufgrund von Satz 4.5 auch

$$\Gamma[S(A_1,\ldots,A_n)] \dashv\vdash \Gamma[\Delta(A_1,\ldots,A_n)]$$

für ein System konkreter K_Ω-Regeln $\Gamma[S(A_1,\ldots,A_n)]$, in dem an einer Stelle $S(A_1,\ldots,A_n)$ als unmittelbare Teilaussage vorkommt.Dies erlaubt es, falls für alle Operatoren S aus Ω und für alle $A_1,\ldots,A_n$ eine Behauptung der Gestalt (1) gilt, aus K_Ω-Regeln sukzessive alle Operatoren zu <u>eliminieren</u>. Deshalb ist es berechtigt, Operatoren S mit nur einer E-Regel

$$\Delta(p_1,\ldots,p_n) \Rightarrow S(p_1,\ldots,p_n)$$

als <u>explizit definierbar</u> zu bezeichnen, da in diesem Fall das System der S-Grundregeln wiedergegeben werden kann durch

(2) $S(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow \Delta(p_1,\ldots,p_n)$,

wodurch die Erfüllung von (1) garantiert ist.

Ein gleichwertiges Analogon zu Satz 4.5 haben wir in Kalkülen mit Widerlegungsbegriff nicht, da hier z.B. A in $\sim A$ als unmittelbare Teilaussage vorkommt, die Ersetzung von A in $\sim A$ durch ein Regelsystem jedoch keinen Sinn macht. Mithilfe des folgenden Satzes läßt sich trotzdem ein Eliminierbarkeitsresultat erzielen.

<u>Satz 15.1</u> Sei $\tilde{\tilde{K}}_\Omega$ Kalkül im Sinne von § 14. Sei $\Gamma[\sim S(A_1,\ldots,A_n)]$ ein System konkreter $\tilde{\tilde{K}}_\Omega$-Regeln, in dem $\sim S(A_1,\ldots,A_n)$ als Komponente oder Hinterregel einer Komponente irgendeines Grades vorkommt. Dann gilt

$$\Gamma[\sim S(A_1,\ldots,A_n)] \underset{\tilde{\tilde{K}}_\Omega}{\dashv\vdash} \Gamma[S(A_1,\ldots,A_n) \Rightarrow A_1,, S(A_1,\ldots,A_n) \Rightarrow \sim A_1].$$

(Dabei trenne das Doppelkomma die beiden Glieder des aus den Regeln $S(A_1,\ldots,A_n) \Rightarrow A_1$ und $S(A_1,\ldots,A_n) \Rightarrow \sim A_1$ bestehenden Regelsystems.)

<u>Beweis</u> Mit RA und ECQ läßt sich ableiten:

$$\sim S(A_1,\ldots,A_n) \dashv\vdash S(A_1,\ldots,A_n) \Rightarrow A_1,, S(A_1,\ldots,A_n) \Rightarrow \sim A_1.$$

Daraus mit Satz 11.1 die Behauptung.

<u>QED</u>

Damit läßt sich eine Aussage $S(A_1,\ldots,A_n)$, für die (1) gilt, und die in $\Gamma[S(A_1,\ldots,A_n)]$ als unmittelbare Teilaussage vorkommt, an dieser Stelle durch $\Delta(A_1,\ldots,A_n)$ eliminieren: Falls vor $S(A_1,\ldots,A_n)$ kein $\sim$ steht, wende man sofort Satz 11.1 an; falls vor $S(A_1,\ldots,A_n)$ ein $\sim$ steht, ersetze man zunächst $\sim S(A_1,\ldots,A_n)$ durch $S(A_1,\ldots,A_n) \Rightarrow A_1,, S(A_1,\ldots,A_n) \Rightarrow \sim A_1$ gemäß Satz 15.1 und dann mit Satz 11.1 diese beiden Vorkommen von $S(A_1,\ldots,A_n)$ durch $\Delta(A_1,\ldots,A_n)$. Damit gilt auch hier, daß aus einem $\hat{\hat{K}}_{\Omega}$-Regelsystem alle Operatoren eliminierbar sind, falls alle Grundregelsysteme für Operatoren aus Ω auf die Form (2) gebracht werden können. Es ist also berechtigt, in diesem Falle (2) als "Explizitdefinition" zu bezeichnen und von der expliziten Definierbarkeit von Operatoren zu reden. Allerdings gilt dies noch nicht für die in § 11 - § 13 behandelten Systeme, in denen nur RA als Widerlegungsregel zur Verfügung steht. Denn der Beweis von Satz 15.1 benutzt wesentlich ECQ.

In § 8 wurde gezeigt, daß sich alle Operatoren zurückführen lassen auf die Standardjunktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$. In § 13 wurde nach Hinzunahme eines formalen Widerlegungsbegriffs die Zurückführbarkeit auf $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ gezeigt. Da in $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ableitbar ist:

$$(3)\left\{\begin{array}{l} p \wedge q \Leftrightarrow p,q \\ p \rightarrow q \Leftrightarrow p \Rightarrow q \\ \quad \neg p \Leftrightarrow \sim p \end{array}\right. ,$$

sind $\wedge, \rightarrow, \neg$ jeweils durch ein Regelsystem explizit definierbar. Könnte man etwas Analoges auch von $\vee$ zeigen, dann wären letzlich <u>alle</u> Operatoren durch Regelsysteme explizit definierbar, mehrzeilige Systeme von E-Regeln also über-

flüssig. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt unten Satz 15.5. Dieses für die intuitionistische Logik formulierte Resultat gilt entsprechend auch für die schwächeren Systeme der Minimallogik und der positiven Logik.
Wir beweisen dabei mit unseren Hilfsmitteln noch einmal etwas, was seit WAJSBERG 1938 und McKINSEY 1939 längst bekannt ist.

Ein Kalkül $\overset{\approx}{K}$ heiße *formal entscheidbar*, wenn für jede $\overset{\approx}{K}$-Aussage A gilt: $\vdash_{\overset{\approx}{K}} A$ oder $\vdash_{\overset{\approx}{K}} \sim A$.

Es ist dabei nicht gesagt, daß *entweder* $\vdash_{\overset{\approx}{K}} A$ oder $\vdash_{\overset{\approx}{K}} \sim A$ gilt. Wir lassen also zu, daß $\vdash_{\overset{\approx}{K}} A$ *und* $\vdash_{\overset{\approx}{K}} \sim A$ gilt, also $\overset{\approx}{K}$ inkonsistent ist.

Der Begriff der formalen Entscheidbarkeit wird in § 17 im Rahmen einer Deutung der klassischen Logik noch eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 15.2 Es gibt kein System von ϕ-Regeln $\Delta(p)$, so daß für jedes $\overset{\approx}{K}$ gilt: $\Delta(p)$ ist in $\overset{\approx}{K}_{\phi}$ genau dann ableitbar, wenn $\overset{\approx}{K}$ formal entscheidbar ist.

(Zum Begriff der ϕ-Regel: Siehe S. 71f.)

Beweis **Angenommen, es gäbe ein solches Regelsystem $\Delta(p)$.** Sei $\overset{\approx}{L}$ der in § 14 betrachtete Grundkalkül. $\overset{\approx}{L}'$ gehe aus $\overset{\approx}{L}$ dadurch hervor, daß man $\Delta(a)$ (d.h. das aus $\Delta(p)$ durch Substitution der $\overset{\approx}{L}$-Aussagenvariablen a für die $\overset{\approx}{L}_{\phi}$-Aussagenvariable p entstehende Regelsystem) als Grundregeln zu $\overset{\approx}{L}$ hinzufügt. Dann wäre $\Delta(p)$ in $\overset{\approx}{L}'_{\phi}$ ableitbar, also $\overset{\approx}{L}'$ nach Voraussetzung formal entscheidbar. Sei nun A beliebige $\overset{\approx}{L}'$-Aussage. Dann müßte $\vdash_{\overset{\approx}{L}'} A$ oder $\vdash_{\overset{\approx}{L}'} \sim A$ gelten.
Sei Π eine $\overset{\approx}{L}'$-Ableitung von A. Daraus erhält man eine $\overset{\approx}{K}$-Ableitung einer beliebigen $\overset{\approx}{K}$-Aussage, falls $\overset{\approx}{K}$ Kalkül ist, für den $\Delta(p)$ in $\overset{\approx}{K}_{\phi}$ ableitbar ist: Denn alle $\overset{\approx}{L}'$-Grundregeln sind dann in $\overset{\approx}{K}$ ableitbar, so daß man nur $\overset{\approx}{L}'$-**Aussagen durch $\overset{\approx}{K}$-Aussagen interpretieren muß. Analog er-**

hält man aus einer $\overset{\approx}{L}$'-Ableitung von $\sim A$ eine $\overset{\approx}{K}$-Ableitung von $\sim B$ für beliebige $\overset{\approx}{K}$-Aussagen B, falls $\overset{\approx}{K}$ Kalkül ist, für den $\Delta(p)$ in $\overset{\approx}{K}_{\phi}$ ableitbar ist. Wir hätten also: Für jedes $\overset{\approx}{K}$, für das $\Delta(p)$ in $\overset{\approx}{K}_{\phi}$ ableitbar ist, und für alle $\overset{\approx}{K}$-Aussagen B gilt $\vdash_{\overset{\approx}{K}} B$, oder für alle solchen $\overset{\approx}{K}$ und $\overset{\approx}{K}$-Aussagen B gilt: $\vdash_{\overset{\approx}{K}} \sim B$.

Nach Voraussetzung würde also für alle formal entscheidbaren $\overset{\approx}{K}$ und für alle $\overset{\approx}{K}$-Aussagen B gelten: $\vdash_{\overset{\approx}{K}} B$, oder für alle solchen $\overset{\approx}{K}$ und $\overset{\approx}{K}$-Aussagen B: $\vdash_{\overset{\approx}{K}} \sim B$. Kalküle $\overset{\approx}{K}$ könnten also nur in dem trivialen Sinne formal entscheidbar sein, daß für alle Aussagen A gilt $\vdash_{\overset{\approx}{K}} A$, oder für alle Aussagen A gilt $\vdash_{\overset{\approx}{K}} \sim A$.

Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch, wenn wir z.B. den Kalkül $\overset{\approx}{K}_1$ betrachten mit +,++ als einzigen Aussagen, a,b als Aussagenvariablen und den Grundregeln:

$$+$$

$$\sim ++$$

$$a \Rightarrow b; a \Rightarrow \sim b \overset{\cdot}{\Rrightarrow} \sim a$$

$$a, \sim a \Rightarrow b \quad .$$

$\overset{\approx}{K}_1$ ist offensichtlich formal entscheidbar, jedoch ist weder ++ noch $\sim +$ in $\overset{\approx}{K}_1$ ableitbar.

<u>QED</u>

<u>Lemma 15.3</u> Die Regel $p \vee \neg p$ ist genau dann $\overset{\approx}{K}_{\wedge\vee\to\neg}$-ableitbar, wenn $\overset{\approx}{K}_{\wedge\vee\to\neg}$ formal entscheidbar ist.

<u>Beweis</u> Sei A beliebige $\overset{\approx}{K}_{\wedge\vee\to\neg}$-Aussage. Sei $A \vee \neg A$ $\overset{\approx}{K}_{\wedge\vee\to\neg}$-ableitbar. Nach Satz 14.4 und dem Normalisierungssatz gibt es dann eine Ableitung von $A \vee \neg A$, die im letzten Schritt eine $\vee$-E-Regel anwendet. Diese Anwendung hat A oder $\neg A$ zur Prämisse, also gibt es eine Ableitung von A oder von $\neg A$. Im zweiten Fall gibt es dann, wieder nach Satz 14.4, auch eine Ableitung von $\sim A$. Also gilt $\vdash A$ oder $\vdash \sim A$.

Sei umgekehrt $\vdash A$ oder $\vdash \sim A$. In beiden Fällen folgt mit $\vee$-E und $\neg$-E: $A \vee \neg A$.

<u>QED</u>

Lemma 15.4 Wenn $\overset{\approx}{K}$ formal entscheidbar ist, dann auch $\overset{\approx}{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$.

Beweis Wir zeigen durch Induktion über rg(A), daß für beliebige $\overset{\approx}{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Aussagen A gilt: $\vdash_{\overset{\approx}{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} A$ oder $\vdash_{\overset{\approx}{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} \sim A$.

Falls rg(A)=0, ist A atomar, die Behauptung also nach Voraussetzung erfüllt.

Sei rg(A) $>$ 0.

Sei $A \equiv B \wedge C$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$\vdash B$ oder $\vdash \sim B$

und $\vdash C$ oder $\vdash \sim C$.

Falls $\vdash B$ und $\vdash C$, folgt $\vdash B \wedge C$ mit $\wedge$-E.

Falls $\vdash \sim B$ oder $\vdash \sim C$, folgt $\vdash \sim B \wedge C$ mit $\wedge$-B und RA.

Sei $A \equiv B \vee C$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung:

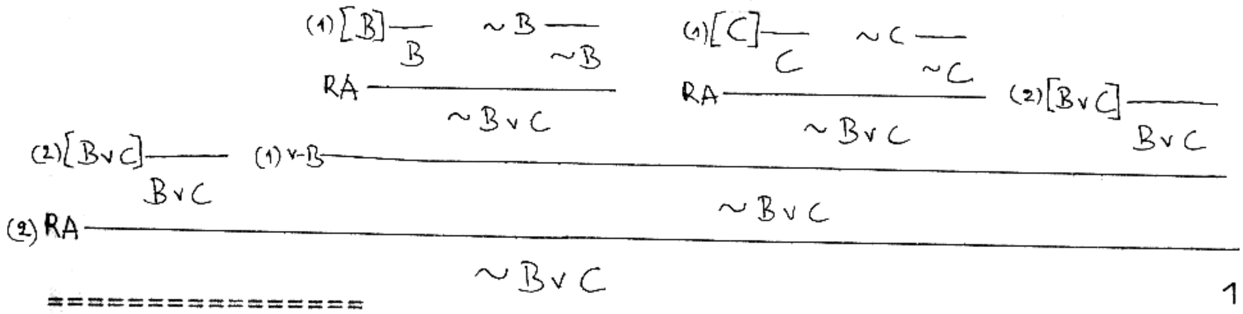
$\vdash B$ oder $\vdash \sim B$

und $\vdash C$ oder $\vdash \sim C$.

Falls $\vdash B$ oder $\vdash C$, folgt $\vdash B \vee C$ mit $\vee$-E.

Falls $\vdash \sim B$ und $\vdash \sim C$, folgt $\vdash \sim B \vee C$ wegen $\sim B, \sim C \vdash \sim B \vee C$.

Letzteres zeigt folgende Ableitung:



1)

================

1)Diese Ableitung, die nach unseren Definitionen normal ist, zeigt übrigens deutlich, wie sinnvoll die Erweiterung des Begriffs "Segment" in § 12 (S. 161f.) war. Hätte man es bei der Definition aus § 7 (S. 104) belassen, dann besäße diese Ableitung zwei maximale Segmente zweiter Art, die aus jeweils drei Vorkommen von $\sim B \vee C$ bestehen. Diese Segmente würden sich nicht eliminieren lassen.

Sei $A \equiv B \rightarrow C$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$\vdash B$ oder $\vdash \sim B$

und $\vdash C$ oder $\vdash \sim C$.

Falls $\vdash \sim B$, dann $\vdash B \rightarrow C$ mit ECQ und $\rightarrow$-E.

Falls $\vdash C$, dann $\vdash B \rightarrow C$ mit $\rightarrow$-E.

Falls $\vdash B$ und $\vdash \sim C$, dann $\vdash \sim B \rightarrow C$ mit $\rightarrow$-B und RA.

Sei $A \equiv \neg B$, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$\vdash B$ oder $\vdash \sim B$.

Falls $\vdash B$, dann $\vdash \sim \neg B$ mit $\neg$-B und RA.

Falls $\vdash \sim B$, dann $\vdash \neg B$ mit $\neg$-E.

QED

Satz 15.5 Es gibt kein $\wedge \rightarrow \neg$-Regelsystem $\Delta(p,q)$, so daß für jedes $\tilde{\tilde{K}}$ das Regelsystem

$$p \vee q \Longleftrightarrow \Delta(p,q)$$

in $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ableitbar ist.

Beweis Angenommen, es gäbe ein solches Regelsystem. Dann ist jedenfalls auch

$$p \vee \neg p \Longleftrightarrow \Delta(p,\neg p)$$

in $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ableitbar. Da $\Delta(p,\neg p)$ höchstens $\wedge, \rightarrow, \neg$ an Operatoren enthält, diese weiterhin nach (3) explizit definierbar sind, könnte man unter sukzessiver Anwendung von Satz 15.1 und Satz 11.1 diese Operatoren aus $\Delta(p, \neg p)$ eliminieren. Es gäbe also ein System $\Delta'(p)$ von ϕ-Regeln, so daß für jedes $\tilde{\tilde{K}}$

$$p \vee \neg p \Longleftrightarrow \Delta'(p)$$

in $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ableitbar ist. Damit wäre wegen Lemma 15.3 $\Delta'(p)$ genau dann in $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ableitbar, wenn $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ formal entscheidbar ist. Wegen der Nichtkreativität von $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ist nun $\Delta'(p)$ genau dann in $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ableitbar, wenn $\Delta'(p)$ in $\tilde{\tilde{K}}_{\phi}$ ableitbar wäre. Weiterhin ist wegen Satz 14.8 und Lemma 15.4 $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ genau dann formal entscheidbar, wenn schon $\tilde{\tilde{K}}$ formal entscheidbar ist. Also wäre $\Delta'(p)$ genau dann in $\tilde{\tilde{K}}_{\phi}$ ableitbar, wenn $\tilde{\tilde{K}}$ formal entscheidbar ist, im Widerspruch zu Lemma 15.2.

QED

Daraus folgt natürlich auch, daß es kein ϕ-Regelsystem $\Delta(p,q)$ gibt, so daß für jedes $\tilde{\tilde{K}}$

$$p \vee q \Leftrightarrow \Delta(p,q)$$

in $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ableitbar ist. $\vee$ ist also ein nicht explizit definierbarer Junktor (und zwar von den wegen der Operatorenvollständigkeit ausreichenden Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ der einzige). Dieses Ergebnis zeigt auch, daß es für unseren Begriff der Definierbarkeit von Operatoren durch Regelsysteme kein Analogon des Definierbarkeitssatzes von BETH geben kann. Denn sonst müßte man aus der impliziten Definierbarkeit von $\vee$ - "implizit definierbar" jetzt verstanden im Sinne der Behauptung von Satz 7.12 - auf die explizite Definierbarkeit von $\vee$ schließen können. $\vee$ ist jedoch nach Satz 7.12 implizit definierbar, wegen Satz 15.5 jedoch nicht explizit definierbar.

Die folgenden beiden Sätze zeigen, daß Satz 15.5 in entsprechender Weise auch für Minimallogik und positive Logik gilt.

<u>Satz 15.6</u> Es gibt kein $\wedge\rightarrow\neg$-Regelsystem $\Delta(p,q)$, so daß für jedes $\tilde{K}$ das Regelsystem

$$p \vee q \Leftrightarrow \Delta(p,q)$$

in $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ableitbar ist.

<u>Beweis</u> Folgt aus Satz 15.4, da man Grundkalküle $\tilde{\tilde{K}}$ auch als Grundkalküle $\tilde{K}$ auffassen kann und dann $\tilde{K}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ein Teilsystem von $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$ ist.

<u>QED</u>

<u>Satz 15.7</u> Es gibt kein $\wedge\rightarrow$-Regelsystem $\Delta(p,q)$, so daß für jedes K das Regelsystem

$$p \vee q \Leftrightarrow \Delta(p,q)$$

in $K_{\wedge\vee\rightarrow}$ ableitbar ist.

<u>Beweis</u> Es gebe ein solches Regelsystem. Dann ist insbesondere für die L-Aussagen +,++ (L aus § 9) das System

(4) $$+ \vee ++ \Leftrightarrow \Delta(+,++)$$

$L_{\wedge\vee\Rightarrow}$-ableitbar. Dann ist jedoch für jedes $\tilde{\tilde{K}}$ und beliebige $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\Rightarrow\neg}$ -Aussagen **A, B das** System

$$A \vee B \Leftrightarrow \Delta(A,B)$$

in $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\Rightarrow\neg}$ ableitbar: Da alls $L_{\wedge\vee\Rightarrow}$-Grundregeln auch $\tilde{\tilde{K}}_{\wedge\vee\Rightarrow\neg}$ -Grundregeln sind, braucht man in einer $L_{\wedge\vee\Rightarrow}$-Ableitung von (4) die L-Aussagen +, ++ nur durch A, B zu interpretieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch zu Satz 15.5.

QED

Wie oben S. 95 schon bemerkt, würde sich $\vee$ allerdings definieren lassen, hätte man Regeln mit Variablenbindung für Aussagenvariable (und damit Quantoren höherer Stufe) zur Verfügung.

§ 16. Symmetrische "reductio ad absurdum" und klassische Logik

Nachdem wir in § 12 - 13 die Minimallogik gedeutet hatten als operatorenlogische Erweiterung von Kalkülen mit formalem Widerlegungsbegriff, wobei die Gültigkeit der "reductio ad absurdum" Adäquatheitsbedingung für den formalen Widerlegungsbegriff war, gelangten wir in § 14 zur intuitionistischen Logik, indem wir die Gültigkeit des "ex contradictione quodlibet" als weitere Adäquatheitsbedingung verlangten. In diesem §en wollen wir untersuchen, ob man durch weitere Verschärfungen des Widerlegungsbegriffs eine Logik erhält, die der üblichen klassischen Logik entspricht.[1] Man könnte z.B. versuchen, die klassische Logik als solche Logik zu charakterisieren, die im Gegensatz zur Minimallogik sich bzgl. Begründungs- und Widerlegungsbegriff symmetrisch verhält. So wie wir in § 11 mit dem Prinzip der "reductio ad absurdum" verlangten, daß man eine Aussage A widerlegen kann, indem man aus ihr einen beliebigen Widerspruch ableitet:

$$A \Rightarrow B; A \Rightarrow \sim B \overset{\cdot}{\Rightarrow} \sim A \quad ,$$

könnten wir entsprechend verlangen, daß man eine Aussage A begründen kann, indem man aus ihrer Widerlegung $\sim A$ einen beliebigen Widerspruch ableitet:

$$\sim A \Rightarrow B; \sim A \Rightarrow \sim B \overset{\cdot}{\Rightarrow} A \ . \ ^{2)}$$

Wir betrachten also Grundkalküle mit formalem Widerlegungsbegriff, in denen diese beiden Regeln für beliebige Aus-

=============

1) Wir wollen keine Systeme untersuchen, die 'zwischen' intuitionistischer und klassischer Logik liegen. Wie UMEZAWA (1955) gezeigt hat, gibt es unendlich viele Systeme in aufsteigender Stärke, die alle stärker als die intuitionistische, jedoch schwächer als die klassische Logik sind. Ein einfaches Beispiel für ein solches Zwischensystem ist das System I, erweitert um die Anfangsregel $\neg p \vee \neg\neg p$. Einen Überblick über diese sogenannten "intermediären Logiken" gibt RAUTENBERG (1979), S. 288ff.

2) Wie schon in der Einleitung (S. 25f.) vermerkt, geben wir keine Argumente für oder gegen einen solchen Begründungs- und Widerlegungsbegriff an, sondern entwickeln ein logisches System unter der Annahme eines derartigen Begründungs- und Widerlegungsbegriffes.

sagen A, B ableitbar sind. Wir sagen dann auch, daß das Prinzip der <u>symmetrischen</u> "reductio ad absurdum" in den Kalkülen gilt. Solche Kalküle seien durchgängig mit $\hat{K}$ bezeichnet.

Da wir jetzt die symmetrische "reductio ad absurdum" als Adäquatheitsbedingung für den Widerlegungsbegriff verstehen, müssen entsprechende nichtatomare Grundregeln auch in den operatorenlogisch erweiterten Kalkülen $\hat{K}_{\Omega}$ vorkommen. Dies seien die Regeln

(RA) $\quad p \Rightarrow q; p \Rightarrow \sim q \dot{\Rightarrow} \sim p$

($\overline{RA}$) $\quad \sim p \Rightarrow q; \sim p \Rightarrow \sim q \dot{\Rightarrow} p$.

$\hat{K}_{\Omega}$ habe also an nichtatomaren Grundregeln Operator-Grundregelsysteme der in § 12 angegebenen Gestalt, außerdem RA und $\overline{RA}$.

Daß die Hinzunahme von $\overline{RA}$ gegenüber § 14 eine Verschärfung darstellt, obwohl doch ECQ nicht mehr auftritt, liegt daran, daß ECQ aus $\overline{RA}$ ableitbar ist, aber nicht umgekehrt.

Für beliebige Kalküle $\hat{K}_{\Omega}$ das Kriterium der Nichtkreativität nachzuweisen, scheitert jedoch. Nachweisen können wir es vorerst[1] nur für solche Kalküle $\hat{K}_{\Omega}$, deren Operator-Grundregelsysteme jeweils nur eine einzige E-Regel haben. D.h. die Operatoren aus Ω müssen explizit definierbar sein, ihre Grundregeln kann mann nach Satz 12.1 ansetzen mit:

$$S(p_1,\ldots,p_n) \Leftrightarrow \Delta(p_1,\ldots,p_n) .$$ [2]

Sei im folgenden Ω' System $S_1 \ldots S_\ell$ von Operatoren, die in diesem Sinne explizit definierbar und deren Grundregelsysteme für Ω' methodisch zulässig sind. Dann wollen wir für $\hat{K}_{\Omega'}$ das Kriterium der Nichtkreativität nachweisen. Warum sich der Nachweis für Kalküle $\hat{K}_{\Omega}$ mit beliebigem Ω und für Ω methodisch zulässigen Operator-Grundregelsystemen nicht führen läßt, zeigt sich unten daran, daß das wichtige Lemma 16.2 nicht für Operator-Grundregelsysteme mit mehr als einer E-Regel beweisbar ist.

============

1) Vgl. dazu jedoch den Anhang.

2) Daß man in diesem Falle von "expliziter Definierbarkeit" sprechen kann, ist durch die Bemerkungen zu Beginn von § 15, insbesondere Satz 15.1, gerechtfertigt.

Lemma 16.1 Für jeden Operator S aus Ω', der durch das Grundregelsystem

$$S(p_1,\dots,p_n) \Longleftrightarrow R_1(p_1,\dots,p_n),\dots,R_\nu(p_1,\dots,p_n)$$

gegeben ist, ist in $\hat{K}_{\Omega'}$ ohne Benutzung von $\overline{RA}$ ableitbar:

$$(R_i(p_1,\dots,p_n))_1 \quad , \quad \overline{(R_i(p_1,\dots,p_n))_2} \quad \Rightarrow \sim S(p_1,\dots,p_n)$$

für alle i mit $1 \leq i \leq \nu$.

(Das Zeichen $\overline{}$ wurde oben S. 153 erklärt.)

Beweis Aufgrund der S-B-Regeln gilt für beliebige Aussagen $A_1,\dots,A_n$:

$$S(A_1,\dots,A_n),\ (R_i(A_1,\dots,A_n))_1 \quad \vdash (R_i(A_1,\dots,A_n))_2 \quad .$$

Da trivialerweise gilt:

$$S(A_1,\dots,A_n),\ (R_i(A_1,\dots,A_n))_1 \quad , \quad \overline{(R_i(A_1,\dots,A_n))_2}$$
$$\vdash \overline{(R_i(A_1,\dots,A_n))_2}$$

folgt mit RA:

$$(R_i(A_1,\dots,A_n))_1 \quad , \quad \overline{(R_i(A_1,\dots,A_n))_2} \quad \vdash \sim S(A_1,\dots,A_n) \quad ,$$

d.h. die Behauptung.

QED

Im Nachweis des Kriteriums der Nichtkreativität schließen wir uns an § 14 an, da wir unsere Regel $\overline{RA}$ ähnlich behandeln können wie dort ECQ. Demgemäß beweisen wir analog zu Lemma 14.1:

Lemma 16.2 Jede $\hat{K}^i_{\Omega'}$-Ableitung Π von U aus Γ läßt sich in eine solche Ableitung von U aus Γ umformen, in der alle Konklusionen von Anwendungen von $\overline{RA}$ atomar sind.

Beweis Ähnlich zum Beweis von Lemma 14.1 verstehen wir unter dem Rang einer $\overline{RA}$-Anwendung in Π den Rang der Konklusion dieser $\overline{RA}$-Anwendung. Wir führen Paarinduktion über $\langle \gamma, \delta \rangle$, wobei γ der maximale Rang von $\overline{RA}$-Anwendungen in Π ist und δ die Zahl der $\overline{RA}$-Anwendungen dieses maximalen Ranges in Π. Falls $\gamma = 0$, ist die Behauptung erfüllt. Falls $\gamma > 0$, wählen wir in Π eine solche $\overline{RA}$-Anwendung vom Rang γ, so daß über dieser $\overline{RA}$-Anwendung keine weitere

$\overline{RA}$-Anwendung vom Rang γ sich befindet. Eine solche $\overline{RA}$-Anwendung hat folgende Gestalt:

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\dfrac{(1)\,[\sim S(A_1,\dots,A_n)]}{\sim S(A_1,\dots,A_n)} \\ \vdots \\ B
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{(1)\,[\sim S(A_1,\dots,A_n)]}{\sim S(A_1,\dots,A_n)} \\ \vdots \\ \sim B
\end{array}
}{S(A_1,\dots,A_n)}\;(1)\,\overline{RA}
$$
$$\vdots$$

wobei der Rang von $S(A_1,\dots,A_n)$ gerade γ ist. Sei nun

$$S(p_1,\dots,p_n) \Longleftrightarrow R_1(p_1,\dots,p_n)\ ,\ \dots,\ R_\nu(p_1,\dots,p_n)$$

das S-Grundregelsystem. Sei R_i' $(1 \leq i \leq \nu)$ eine Abkürzung für $R_i(A_1,\dots,A_n)$. Dann ersetzen wir obiges Ableitungsstück durch:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}
(\nu+1)\,[(R_1')_1] \\ (1)\,[\overline{(R_1')_2}] \\ + \\ \sim S(A_1,\dots,A_n) \\ \vdots \\ B
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(\nu+1)\,[(R_1')_1] \\ (1)\,[\overline{(R_1')_2}] \\ + \\ \sim S(A_1,\dots,A_n) \\ \vdots \\ \sim B
\end{array}
}{(R_1')_2}\;(1)\ \overline{RA}\ \text{bzw.}\ RA
\quad \bullet\bullet\bullet\bullet \quad
\dfrac{
\begin{array}{c}
(\nu+1)\,[(R_\nu')_1] \\ (\nu)\,[\overline{(R_\nu')_2}] \\ + \\ \sim S(A_1,\dots,A_n) \\ \vdots \\ B
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(\nu+1)\,[(R_\nu')_1] \\ (\nu)\,[\overline{(R_\nu')_2}] \\ + \\ \sim S(A_1,\dots,A_n) \\ \vdots \\ \sim B
\end{array}
}{(R_\nu')_2}\;(\nu)\ \overline{RA}\ \text{bzw.}\ RA
}{S(A_1,\dots,A_n)}\;(\nu+1)\ S\text{-}E
$$
$$\vdots$$

Dabei seien $\begin{array}{c} (R_i^!)_1 \\ \overline{(R_i^!)_2} \\ \vdots \\ \sim S(A_1,\ldots,A_n) \end{array}$ $(1 \leq i \leq \nu)$ die nach Lemma 16.1 existierenden und von $\overline{RA}$-Anwendungen freien Ableitungen von $\sim S(A_1,\ldots,A_n)$ aus $(R_i^!)_1$ und $\overline{(R_i^!)_2}$. Da für alle i $(1 \leq i \leq \nu)$ $(R_i^!)_2$ von kleinerem Range als $S(A_1,\ldots,A_n)$ ist, weiterhin nach Voraussetzung in $\begin{array}{c} \sim S(A_1,\ldots,A_n) \\ \hline \sim S(A_1,\ldots,A_n) \\ \vdots \\ B \end{array}$ und $\begin{array}{c} \sim S(A_1,\ldots,A_n) \\ \hline \sim S(A_1,\ldots,A_n) \\ \vdots \\ \sim B \end{array}$ von vornherein keine $\overline{RA}$-Anwendungen maximalen Ranges vorkamen, kommt in dem umgeformten Stück eine $\overline{RA}$-Anwendung vom Rang γ weniger vor. Falls $\delta=1$ war, sinkt also γ, sonst bleibt γ gleich und δ sinkt.

QED

Dieses Lemma läßt sich nicht für Operatoren mit einem mehrzeiligen System von E-Regeln beweisen, wie man am Beispiel von $\vee$ veranschaulichen kann. Für den Junktor $\vee$ kann man analog zu Lemma 16.1 beweisen, daß

(1) $\sim p, \sim q \Rightarrow \sim p \vee q$

ableitbar ist (vgl. den Beweis von Lemma 15.4). Sei jedoch $A_1 \vee A_2$ Konklusion einer $\overline{RA}$-Anwendung:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{ccc}
(1)[\sim A_1 \vee A_2] \; \overline{\sim A_1 \vee A_2} & & (1)[\sim A_1 \vee A_2] \; \overline{\sim A_1 \vee A_2} \\
\vdots & & \vdots \\
B & & \sim B
\end{array} \\
(1)\,\overline{RA} \; \rule{8cm}{0.4pt} \\
\qquad\qquad\qquad A_1 \vee A_2 \\
\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

Bei einer Umformung analog zu der im Beweis von Lemma 16.2 erhielte man:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{ccc}
(1)[\sim A_1] \quad \sim A_2 & & (1)[\sim A_1] \quad \sim A_2 \\
\vdots & & \vdots \\
\sim A_1 \vee A_2 & & \sim A_1 \vee A_2 \\
\vdots & & \vdots \\
B & & \sim B
\end{array} \\
(1)\,\overline{RA} \; \rule{8cm}{0.4pt} \\
\qquad\qquad\qquad A_1 \\
\vee\text{-E} \; \rule{8cm}{0.4pt} \\
\qquad\qquad\qquad A_1 \vee A_2 \\
\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

oder

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \sim A_1 \quad (1)[\sim A_2] \\ \sim A_1 \vee A_2 \\ \vdots \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sim A_1 \quad (1)[\sim A_2] \\ \sim A_1 \vee A_2 \\ \vdots \\ \sim B \end{array}}{A_2}\,(1)\ \overline{RA}}{\begin{array}{c} A_1 \vee A_2 \\ \vdots \end{array}}\ \vee\text{-}E$$

wobei wieder $\begin{array}{c} \sim A_1 \quad \sim A_2 \\ \sim A_1 \vee A_2 \end{array}$ die aufgrund (1) existierende Ableitung von $\sim A_1 \vee A_2$ aus $\sim A_1$ und $\sim A_2$ sei.

Im ersten Fall erhalten wir eine Ableitung von $A_1 \vee A_2$ aus der Annahme $\sim A_2$, im zweiten Fall eine aus der Annahme $\sim A_1$, in keinem Fall also eine Ableitung von $A_1 \vee A_2$ <u>ohne</u> zusätzliche Annahme. Dies liegt daran, daß in der mit $+$ markierten Ableitung <u>zwei</u> mit $\sim$ beginnende konkrete Regeln ($\sim A_1$ und $\sim A_2$) als Annahmen auftreten, von denen nur <u>eine</u> bei $\overline{RA}$-Anwendung zu löschen ist. Allgemein können so bei mehreren S-E-Regeln auch <u>mehrere</u> konkrete Regeln der Gestalt $\sim A$ als Annahmen in $+$ auftreten, während im Falle einzeiliger E-Regeln höchstens <u>eine</u> Regel der Gestalt $\sim A$ (nämlich $\overline{(R_i^!)_2}$, falls $(R_i^!)_2$ Aussage ist) in $+$ auftreten kann, die bei Anwendung von $\overline{RA}$ wieder gelöscht wird.

Daß die Nichtbeweisbarkeit von Lemma 16.2 für Kalküle $\hat{K}_{\Omega}$, deren Operatoren mehrzeilige Systeme von E-Regeln haben, nicht nur an unserer Unfähigkeit liegt, wird am Schluß dieses §en gezeigt, wo wir ein Gegenbeispiel angeben.

Statt von $\overline{RA}$-Anwendungen mit atomarer Konklusion sprechen wir wieder von <u>atomaren $\overline{RA}$-Anwendungen</u>.

Analog zu § 14 nennen wir ein Segment in folgenden Fällen <u>maximal</u>:
1. Es beginnt mit der Konklusion einer Anwendung einer E-Regel oder der Konklusion einer Anwendung von $\overline{RA}$, und es endet mit der Hauptprämisse einer Anwendung einer B-Regel.
2. Es beginnt mit der Konklusion einer Anwendung von RA und endet mit einer Prämisse einer Anwendung von RA oder $\overline{RA}$.[1]

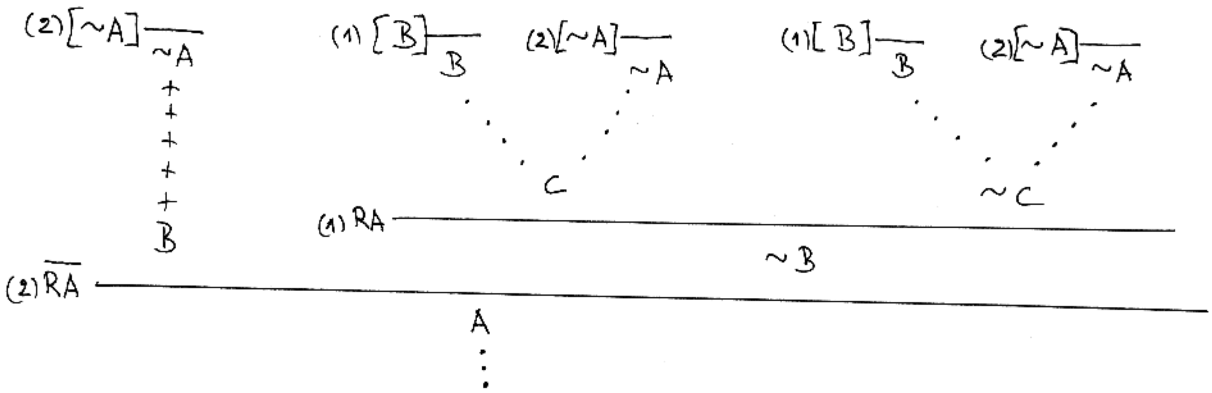
<u>Lemma 16.3</u> Jede $\hat{K}^i_\Omega$-Ableitung von U aus Γ läßt sich in eine solche $\hat{K}^i_\Omega$-Ableitung von U aus Γ umformen, die keine maximalen Segmente enthält.

<u>Beweis</u> (analog zum Beweis von Lemma 14.2)
Wegen Lemma 16.2 können wir voraussetzen, daß eine $\hat{K}^i_\Omega$-Ableitung Π nur atomare $\overline{RA}$-Anwendungen enthält. Daher enthält Π keine maximalen Segmente erster Art, die mit Konklusionen von $\overline{RA}$-Anwendungen beginnen. In Π treten also an maximalen Segmenten erster Art nur solche im Sinne von § 12 auf. Wir führen den Beweis wie den von Lemma 12.2, müssen jetzt nur die zusätzlichen Fälle berücksichtigen, in denen $\overline{RA}$-Anwendungen bei maximalen Segmenten zweiter Art ins Spiel kommen.

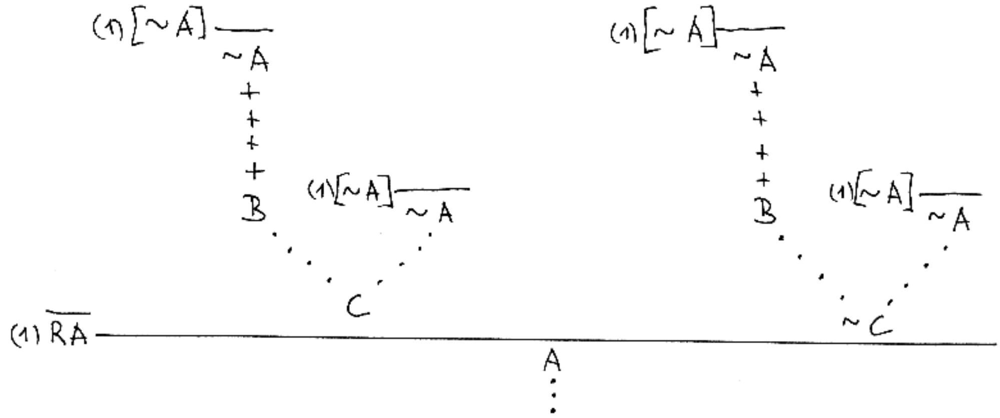
<u>Zu Fall a)</u> Zu behandeln ist noch: Das im Beweis von Lemma 12.2 gewählte Segment σ hat Länge 1 und ist ein maximales Segment zweiter Art, das mit der Konklusion einer RA-Anwendung beginnt und der rechten Prämisse einer $\overline{RA}$-Anwendung endet. σ besteht also aus einem einzigen R-Aussagenvorkommen $\sim B$ und tritt in Π in folgender Form auf:

================

1) Wie schon in § 14, so ist auch hier eine erweiterte Definition von "maximal" nicht nötig, da es uns nur um den Beweis von Normalisierungssatz und Subaussagenprinzip geht, obwohl sie für die Charakterisierung von Beweisen, die "keine Umwege" machen, natürlich sinnvoll wäre.



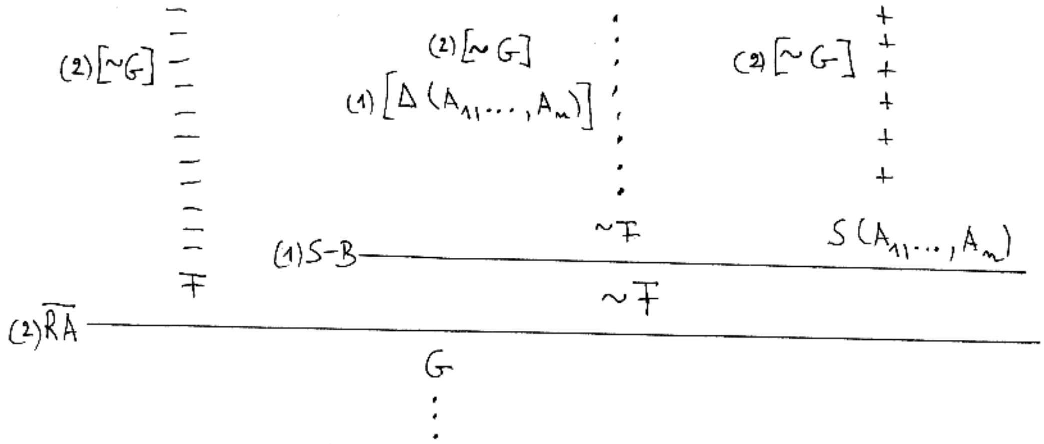
Dieses Ableitungsstück formen wir um zu:



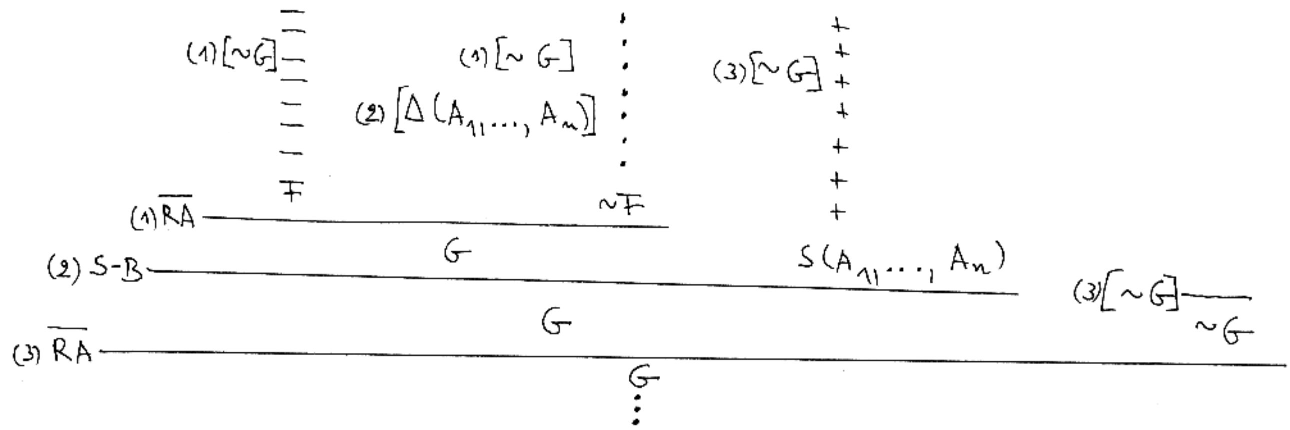
Dabei verschwindet σ. Da nach Wahl von σ in ++++ kein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ auftreten kann, ändert ein mehrfaches Auftreten von ++++ nichts an der Zahl der maximalen Segmente vom Rang $\rho(\Pi)$. Da ferner $rg(B) < rg(\sim B)$, sinkt die Anzahl der maximalen Segmente vom Rang $\rho(\Pi)$, so daß man die Induktionsvoraussetzung anwenden kann.

<u>Zu Fall b)</u> Hier ist noch zu behandeln, daß σ maximales Segment zweiter Art der Länge >1 ist, das mit der Konklusion einer (nichtidentischen) RA-Anwendung beginnt und der rechten Prämisse einer $\overline{RA}$-Anwendung endet. σ kann dabei b1) mit der Konklusion einer Anwendung einer B-Regel enden, oder b2) mit der Konklusion einer identischen RA-Anwendung enden.

<u>Ad b1)</u> σ tritt in folgender Form auf, wobei σ aus Vorkommen von $\sim F$ besteht (die Anwendung der S-B-Regel ist dabei von einfacherer Gestalt als sonst, da S nur eine E-Regel hat):



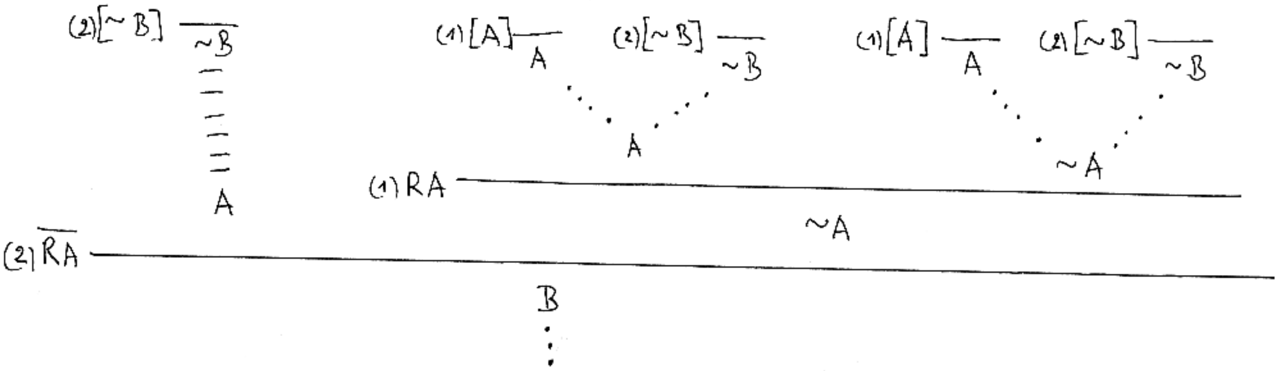
Dies formen wir um zu:



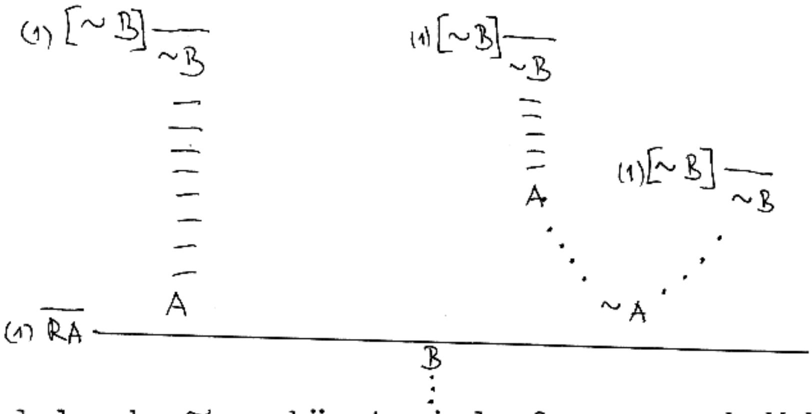
Bei dieser Umformung wird σ gekürzt. Weiterhin kommt nach Wahl von σ in der mit

bezeichneten Ableitung kein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ vor; außerdem ist das neu entstehende zweigliedrige Segment aus Vorkommen von G nicht maximal, da es mit der Konklusion einer $\overline{RA}$-Anwendung beginnt. Also läßt sich die Induktionsvoraussetzung anwenden.

<u>Ad b2)</u> σ tritt in folgender Form auf, wobei σ aus Vorkommen von $\sim A$ besteht:



Dies formen wir um zu:



Da dadurch σ gekürzt wird, ferner nach Wahl von σ in der mit $\equiv$ markierten Ableitung kein maximales Segment vom Rang $\rho(\Pi)$ auftreten kann, weiterhin $rg(A) < rg(\sim A)$ ist, kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden.

<u>QED</u>

Wir nennen eine Ableitung <u>normal</u>, wenn sie keine maximalen Segmente, keine redundanten Anwendungen von B-Regeln und keine nichtatomaren $\overline{RA}$-Anwendungen enthält.

<u>Satz 16.4</u> Jede $\hat{K}^{i}_{\Omega'}$-Ableitung von U aus Δ läßt sich in eine normale $\hat{K}^{i}_{\Omega'}$-Ableitung von U aus Δ umformen.

<u>Beweis</u> Lemma 16.2, Lemma 16.3, Lemma 7.5.

<u>QED</u>

Hieraus läßt sich ebenso wie in § 14 beweisen, daß jede normale Ableitung eines Operats sich in eine solche umformen läßt, die im letzten Schritt eine E-Regel verwendet. Satz 14.4 ist also kein Charakteristikum der intuitionistischen Logik. Allerdings haben wir auch jetzt nur eine eingeschränkte klassische Logik zur Verfügung, in der Junktoren wie $\vee$, die mehrere E-Regeln haben, fehlen. In einer vollen klassischen Logik gilt Satz 14.4 bekanntlich nicht. (Vgl. auch unten Satz 16.12 und die daran anschließenden Bemerkungen, sowie § 17.)

Aus dem Normalisierungssatz läßt sich wie in § 14 das Subaussagenprinzip gewinnen, indem man $\overline{RA}$ so behandelt wie dort ECQ. Der Beweis soll nicht in Einzelheiten durchgeführt werden, da er fast nur Wiederholung wäre. Der Fall, daß bei $\overline{RA}$-Anwendungen Annahmen der Gestalt $\sim A$ gelöscht werden können, spielt keine wesentliche Rolle, weil wir ja nach Lemma 16.2 normale Ableitungen konstruieren können, in denen A atomar ist.[1] Als Endresultat erhalten wir Nichtkreativität und Konservativität:

<u>Satz 16.5</u> Sei R konkrete $\hat{K}^i_{\Omega'}$-Regel, in der S_i nicht vorkommt. Falls $\vdash_{\hat{K}^i_{\Omega'}} R$, dann $\vdash_{\hat{K}^{i-1}_{\Omega'}} R$.

<u>QED</u>

<u>Satz 16.6</u> Sei R konkrete atomare $\hat{K}_{\Omega'}$-Regel. Falls $\vdash_{\hat{K}_{\Omega'}} R$, dann $\vdash_{\hat{K}} R$.

<u>QED</u>

Das Kriterium der Eindeutigkeit gilt für $\hat{K}_{\Omega'}$, da es schon für die Systeme $\tilde{K}_{\Omega}$ und $\tilde{\tilde{K}}_{\Omega}$ galt.

Geht man nochmals den Beweis der Definierbarkeit beliebiger Operatoren durch die Standardjunktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ (Satz 8.1 bzw. 13.1) durch, so sieht man, daß der Junktor $\vee$ nur dann benötigt wird, wenn ein Operator mit mehr als einer einzigen E-Regel vorliegt. Da solche Operatoren jetzt gar nicht in Betracht kommen, kommt man mit den Junktoren $\wedge, \rightarrow, \neg$ aus. Weiterhin läßt sich wegen der Ableitbarkeit von

$$\sim p \Leftrightarrow \neg p$$

auf den formalen Widerlegungsbegriff verzichten, wie in

=============

1)Übrigens gilt auch hier die oben S. 193 Anm. angedeutete Verschärfung des Subaussagenprinzips, wonach im Falle einer normalen $\hat{K}^1_{\Omega'}$-Ableitung Π von U aus Δ , die keine Anwendungen atomarer Grundregeln enthält, <u>alle</u> in Π auftretenden R-Aussagen Subaussagen von U oder von Regeln aus Δ sind. Die Löschung einer atomaren R-Aussage $\sim A$ bei $\overline{RA}$-Anwendung führt ja immer zu einer Aussage A, und $\sim A$ zählt nach unseren Definitionen als Subaussage von A.

§ 13 gezeigt (Satz 13.5); somit erhalten wir einen Kalkül $\hat{K}^{**}_{\wedge\to}$, der ein Kalkül im Sinne von § 2 ohne formalen Widerlegungsbegriff ist und an Grundregeln besitzt:

1. $\Delta^* \Rightarrow X^*$ für jede $\hat{K}$-Grundregel $\Delta \Rightarrow X$,
2. die Regelsysteme $\tilde{\Sigma}_\wedge$ und $\tilde{\Sigma}_\to$ (in der Version von S. 175),
3. die Regeln:

$$(RA_\neg) \qquad p \Rightarrow q; p \Rightarrow \neg q \dot{\Rightarrow} \neg p$$

$$(\overline{RA}_\neg) \qquad \neg p \Rightarrow q; \neg p \Rightarrow \neg q \dot{\Rightarrow} p \quad .$$

Für $\hat{K}^{**}_{\wedge\to}$ gilt analog zu Satz 13.4 und 14.9:

<u>Satz 16.7</u>

(i) Seien $R_1, \ldots, R_n$ konkrete $\hat{K}_{\Omega'}$-Regeln, U $\hat{K}_{\Omega'}$-R-Aussage. Dann gilt:

$$R_1, \ldots, R_n \vdash_{\hat{K}_{\Omega'}} U \quad \text{g.d.w.} \quad \mathring{R}_1{}^*, \ldots, \mathring{R}_n{}^* \vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge\to}} \mathring{U}^* \quad .$$

(ii) Seien $A_1, \ldots, A_n, A$ $\hat{K}^{**}_{\wedge\to}$-Aussagen. Dann gilt:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge\to}} A \quad \text{g.d.w.} \quad A_1, \ldots, A_n \vdash_{\hat{K}_{\wedge\to\neg\Omega'}} A \quad .$$

<u>QED</u>

$\hat{K}^{**}_{\wedge\to}$ heiße der <u>Kalkül der klassischen $\wedge\to\neg$-Logik über $\hat{K}$.</u>[1] Einen entsprechenden Kalkül der formalen Logik erhalten wir, wenn wir den Kalkül $\tilde{L}$ aus § 13 erweitern um die Grundregel

$$\sim a \Rightarrow b; \sim a \Rightarrow \sim b \dot{\Rightarrow} a \quad .$$

Dieser Kalkül, den wir mit $\hat{L}$ bezeichnen, hat also als einzige Grundregeln

$$(2)\begin{cases} a \Rightarrow b; a \Rightarrow \sim b \dot{\Rightarrow} \sim a \\ \sim a \Rightarrow b; \sim a \Rightarrow \sim b \dot{\Rightarrow} a \end{cases} \quad .$$

Aufgrund dieser Grundregeln ist er trivialerweise ein Kalkül, in dem die symmetrische "reductio ad absurdum"

================

1) Wir sprechen von $\wedge\to\neg$-Logik, da der Junktor $\neg$ zu den Grundzeichen gehört. Trotzdem kommt $\neg$ bei $\hat{K}^{**}_{\wedge\to}$ nicht als Index vor, da die $\neg$-Regeln $RA_\neg$ und $\overline{RA}_\neg$ keine Operator-Grundregeln sind.

gilt, also ein Kalkül der in diesem §en betrachteten Art. Den Kalkül $\hat{L}^{**}_{\wedge\Rightarrow}$, abgekürzt durch C', bezeichnen wie als Kalkül der formalen klassischen $\wedge\Rightarrow\neg$-Logik. Da in C' RA$\neg$ und $\overline{\text{RA}}\neg$ als Regeln vorkommen, können wir wieder die von (2) herrührenden C'-Grundregeln

$$(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b) \Rightarrow \neg a$$

$$(\neg a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow \neg b) \Rightarrow a$$

weglassen. C' ist damit identisch mit den üblichen Kalkülen des natürlichen Schließens für die auf den Junktoren $\wedge, \rightarrow, \neg$ aufbauende klassische Logik. In GENTZENscher Notation hat C' die auf S. 183 angegebenen Regeln mit Ausnahme der $\vee$-Regeln, jedoch erweitert um:

$$\frac{\begin{matrix} [\neg p] & [\neg p] \\ q & \neg q \end{matrix}}{p} \quad .$$ 1)

Wie gewohnt bilden wir den Begriff der C'-Allgemeingültigkeit:

Eine konkrete C'-Regel $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ für C'-Aussagen $A_1, \ldots, A_n, A$ heißt C'-allgemeingültig, wenn für jedes $\hat{K}$ und jede Interpretation κ über $\hat{K}$ gilt: $A_1^{\kappa}, \ldots, A_n^{\kappa} \vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}} A^{\kappa}$.

==========

1) Es ist nicht so, daß sich die oben für $\hat{K}_{\Omega'}$ bewiesenen Sätze ohne weiteres auf das System der formalen Logik C' übertragen. Da $\neg$ jetzt die Rolle des Widerlegungsbegriffes übernimmt, jedoch $\neg A$ im Gegensatz zu $\sim A$ bei atomarem A nicht als atomar zählt, gilt z.B. statt des uneingeschränkten Subaussagenprinzips für C' nur: Jede C'-Ableitung von A aus $A_1, \ldots, A_n$ läßt sich in eine Ableitung von A aus $A_1, \ldots, A_n$ umformen, die neben Teilaussagen von $A, A_1, \ldots, A_n$ nur Aussagen der Gestalt $\neg B$ mit atomarem B enthält, wobei B Teilaussage von $A, A_1, \ldots, A_n$. Für die formale Minimallogik und intuitionistische Logik M bzw. I gelten dagegen uneingeschränkte Teilformelprinzipien. Vgl. dazu PRAWITZ 1965.

<u>Satz 16.8</u> Für alle C'-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ gilt $A_1,\ldots,A_n \vdash_{C'} A$ genau dann, wenn die Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ C'-allgemeingültig ist.

<u>QED</u>

C' läßt sich noch reduzieren, wie der folgende Satz zeigt:

<u>Satz 16.9</u> Für jedes $\hat{K}$ ist

$$p \to q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

in $\hat{K}_{\wedge\to\neg}$ ableitbar.

<u>Beweis</u> Seien A, B beliebige $\hat{K}_{\wedge\to\neg}$-Aussagen.

(i) Wir zeigen: $A \to B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$:

$$\scriptstyle{\neg\text{-}E}\ \dfrac{{\scriptstyle (1)RA}\ \dfrac{{\scriptstyle \to\text{-}B}\ \dfrac{{\scriptstyle \wedge\text{-}B}\ \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}[A\wedge\neg B]}{A\wedge\neg B}}{A} \qquad \dfrac{A\to B}{A\to B}}{B} \qquad {\scriptstyle \neg\text{-}B}\ \dfrac{{\scriptstyle \wedge\text{-}B}\ \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}[A\wedge\neg B]}{A\wedge\neg B}}{\neg B}}{\sim B}}{\sim(A\wedge\neg B)}}{\neg(A\wedge\neg B)}$$

(ii) Wir zeigen: $\neg(A\wedge\neg B) \vdash A \to B$:

$${\scriptstyle (2)\to\text{-}E}\ \dfrac{{\scriptstyle (1)\overline{RA}}\ \dfrac{{\scriptstyle \wedge\text{-}E}\ \dfrac{\dfrac{{}^{(2)}[A]}{A} \qquad {\scriptstyle \neg\text{-}E}\ \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}[\sim B]}{\sim B}}{\neg B}}{A\wedge\neg B} \qquad {\scriptstyle \neg\text{-}B}\ \dfrac{\dfrac{\neg(A\wedge\neg B)}{\neg(A\wedge\neg B)}}{\sim(A\wedge\neg B)}}{B}}{A\to B}$$

<u>QED</u>

Wegen Satz 16.9 läßt sich eine $\hat{K}_{\wedge\rightarrow\neg}$-Ableitung Π von U aus Δ durch eine Ableitung Π' von U' aus Δ' ersetzen, wobei in U', Δ' nur noch $\wedge, \neg$ an Operatoren vorkommen. Wegen der Nichtkreativität können wir Π' in eine Ableitung von U' aus Δ' umformen, in der keine $\rightarrow$-Regeln angewandt werden. Also kann man $\hat{K}_{\wedge\rightarrow\neg}$ als gleichwertig mit $\hat{K}_{\wedge\neg}$ auffassen.

Sei nun $\hat{K}^{**}_{\wedge}$ das den Junktor $\rightarrow$ nicht enthaltende System, das aus $\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}$ dadurch entsteht, daß man
1. die $\rightarrow$-E- und-B-Regeln wegläßt und
2. in den Grundregeln der Gestalt $\Delta^* \Rightarrow X^*$, die ja noch das Zeichen $\rightarrow$ enthalten können, $\rightarrow$ gemäß Satz 16.9 sukzessive eliminiert.

Dann ist auch $\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}$ mit $\hat{K}^{**}_{\wedge}$ gleichwertig:

<u>Satz 16.10</u> Für alle $\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}$-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ gilt:

$$A_1,\ldots,A_n \vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}} A \qquad \text{g.d.w.} \qquad A_1^+,\ldots,A_n^+ \vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge}} A^+ ,$$

wobei $A_1^+,\ldots,A_n^+,A^+$ das Ergebnis der sukzessiven Elimination von $\rightarrow$ aus $A_1,\ldots,A_n,A$ gemäß Satz 16.9 bedeute.

<u>Beweis</u>

Die Richtung <u>von rechts nach links</u> ergibt sich daraus, daß für beliebige Aussagen B gilt: $B \dashv\vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}} B^+$.

Die Richtung <u>von links nach rechts</u> ergibt sich durch leichte Induktion über der Länge von $\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}$-Ableitungen. Durch Modifikation des Beweises von Satz 16.9 folgt nämlich, daß die Regeln $p \Rightarrow q \dot{\Rightarrow} \neg(p \wedge \neg q)$ und $\neg(p \wedge \neg q), p \Rightarrow q$ in $\hat{K}^{**}_{\wedge}$ ableitbar sind und so die $\rightarrow$-Grundregeln ersetzen können.

<u>QED</u>

Das mit $\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}$ gleichwertige System $\hat{K}^{**}_{\wedge}$ heiße <u>klassische $\wedge\neg$-Logik über $\hat{K}$</u>. $\hat{L}^{**}_{\wedge}$, auch C'' genannt, heiße <u>formale klassische $\wedge\neg$-Logik</u>.

Wieder können wir einen Begriff der C''-Allgemeingültigkeit definieren: Eine konkrete C''-Regel $A_1,\dots,A_n \Rightarrow A$ für C''-Aussagen $A_1,\dots,A_n,A$ heißt <u>C''-allgemeingültig</u>, wenn für jedes $\hat{K}$ und jede Interpretation κ über $\hat{K}$ gilt: $A_1^{\kappa},\dots,A_n^{\kappa} \vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge}} A^{\kappa}$.

<u>Satz 16.11</u> Für alle C''-Aussagen $A_1,\dots,A_n,A$ gilt $A_1,\dots,A_n \vdash_{C''} A$ genau dann, wenn die Regel $A_1,\dots,A_n \Rightarrow A$ C''-allgemeingültig ist.

QED

Analog zu Satz 16.9 läßt sich auch $\wedge$ durch $\rightarrow$ definieren, d.h. $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ in $\hat{K}_{\wedge\rightarrow\neg}$ ableiten. Dementsprechend kann man Systeme $\hat{K}^{**}_{\rightarrow}$ der klassischen $\rightarrow\neg$-Logik über $\hat{K}$ und $\hat{L}^{**}_{\rightarrow}$ der formalen klassischen $\rightarrow\neg$-Logik definieren.

Zum Abschluß dieses §en wollen wir noch zeigen, daß sich Lemma 16.2 <u>prinzipiell nicht</u> für beliebige Kalküle $\hat{K}_{\Omega}$, die auch **mehrzeilige** Systeme von Operator-Einführungsregeln enthalten, beweisen läßt.

<u>Satz 16.12</u> Falls für jedes Operatorensystem Ω mit für Ω methodisch zulässigen Grundregelsystemen gilt:
(i) Die Folge der Grundregelsysteme ist nichtkreativ,
(ii) Für jedes $\hat{K}$ läßt sich jede $\hat{K}^{i}_{\Omega}$-Ableitung eines Operats $S(A_1,\dots,A_n)$ in eine $\hat{K}^{i}_{\Omega}$-Ableitung von $S(A_1,\dots,A_n)$ umformen, die im letzten Schritt eine S-E-Regel verwendet,

dann gilt:

Jedes $\hat{K}$ ist formal entscheidbar.

<u>Beweis</u> Sei A beliebige $\hat{K}$-Aussage. Es gilt:

(3) $\sim A \vee \neg A \vdash_{\hat{K}_{\vee\neg}} \sim A$

(4) $\sim A \vee \neg A \vdash_{\hat{K}_{\vee\neg}} \sim\neg A$

(5) $\sim\neg A \vdash_{\hat{K}_{\vee\neg}} A$

Wie sich leicht mithilfe von RA, $\overline{\text{RA}}$ ableiten läßt. Wir betrachten folgende sich daraus ergebende $\hat{K}_{\vee\neg}$-Ableitung von $A \vee \neg A$:

$$\dfrac{(5)\,\dfrac{(4)\,\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}[\sim A\vee\neg A]}{\sim A\vee\neg A}}{\sim\neg A}}{A} \qquad (3)\,\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}[\sim A\vee\neg A]}{\sim A\vee\neg A}}{\sim A}}{A\vee\neg A}\;{}^{(1)}\overline{RA}$$

Wegen (ii) kann man hieraus wie im Beweis von Lemma 15.3 folgern, daß $\vdash_{\hat{K}_{\vee\neg}} A$ oder $\vdash_{\hat{K}_{\vee\neg}} \sim A$.
Daraus mit (i): $\vdash_{\hat{K}} A$ oder $\vdash_{\hat{K}} \sim A$. (Denn A war als atomar gewählt.)

QED

Würde nun Lemma 16.2 für beliebige $\hat{K}_{\Omega}$ gelten, dann könnte man (i) und (ii) (letzteres analog zu Satz 14.4) beweisen. Also wäre jeder Grundkalkül $\hat{K}$ formal entscheidbar. Dies ist jedoch nicht der Fall. Z.B. gilt in unserem Kalkül $\hat{L}$, der nur die Grundregeln

$$a \Rightarrow b ; a \Rightarrow \sim b \;\dot{\Rightarrow}\; \sim a$$

$$\sim a \Rightarrow b ; \sim a \Rightarrow \sim b \;\dot{\Rightarrow}\; a$$

hat, offenbar für eine $\hat{L}$-Aussage A weder $\vdash_{\hat{L}} A$ noch $\vdash_{\hat{L}} \sim A$. $\hat{L}$ ist also nicht formal entscheidbar.

§ 17. Klassische Logik als Logik über formal entscheidbaren Grundkalkülen

Wir hatten versucht, die klassische Logik als solche Logik zu interpretieren, die gegenüber der Minimallogik hinsichtlich Begründungs- und Widerlegungsbegriff symmetrisch ist, in der also RA und $\overline{RA}$ den Widerlegungsbegriff charakterisieren. Auf diese Weise konnten wir formale Logikkalküle C', C'' definieren, die üblichen klassischen Logikkalkülen ohne $\vee$ entsprechen. Wir konnten jedoch nur operatorenlogische Erweiterungen von Grundkalkülen um explizit definierbare Operatoren zulassen, insbesondere gab es bei uns keine $\vee$-Regeln. Man könnte sich damit zufrieden geben, indem man etwa sagt: Die klassische Logik ist eben nur die Logik explizit definierbarer Operatoren; in der klassischen Logik gibt es kein 'echtes' $\vee$; wenn man in der klassischen Logik von $A \vee B$ spricht, dann meint man immer $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Nun wollen wir jedoch versuchen, auch Operatoren mit mehreren E-Regeln und damit insbesondere $\vee$ innerhalb einer klassischen Logik zuzulassen. Es wird sich dann zwar nachher zeigen, daß $A \vee B$ durch $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ definierbar ist; dies ist aber dann ein beweisbares Resultat im Gegensatz zum obigen Verständnis des klassischen $\vee$, das $A \vee B$ von vornherein als $\neg(\neg A \vee \neg B)$ versteht. Da dies im Rahmen von § 16 nicht möglich war[1], und wir weiterhin auf die durch RA und $\overline{RA}$ beschriebene Symmetrie von Beweis- und Widerlegungsbegriff nicht verzichten wollen, werden wir eine Verschärfung von $\overline{RA}$ und entsprechende Grundkalküle $\hat{\hat{K}}$ suchen derart, daß dann für beliebige operatorenlogisch erweiterte Kalküle $\hat{\hat{K}}_{\Omega}$ das Kriterium der Nichtkreativitätgilt. Als solche Verschärfung schlagen wir die formale Entscheidbarkeit vor.

==========

1) Vgl. dazu jedoch den Anhang.

Wir wollen also jetzt nur solche Grundkalküle $\hat{K}$ betrachten, die formal entscheidbar sind, die wir dann auch $\hat{\hat{K}}$ nennen. Dazu reicht es auch schon aus, Grundkalküle $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}$ aus § 14 zu behandeln, da in solchen Grundkalkülen - falls sie formal entscheidbar sind - die symmetrische "reductio ad absurdum" gilt:

<u>Satz 17.1</u> Sei $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}$ ein Kalkül im Sinne von § 14, der zudem formal entscheidbar ist. Dann gilt für beliebige $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}$-Aussagen A, B: $\sim A \Rightarrow B; \sim A \Rightarrow \sim B \vdash_{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}} A$.

<u>Beweis</u> Wenn $\vdash_{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}} A$, dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt; wenn $\vdash_{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}} \sim A$, dann ergibt sich die Behauptung daraus, daß in $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}$ das "ex contradictione quodlibet" gilt.

<u>QED</u>

Der Unterschied von $\hat{\hat{K}}$ zu bisher betrachteten Grundkalkülen $\tilde{K}$, $\tilde{\tilde{K}}$, $\hat{K}$ liegt darin, daß dort die Gültigkeit von "ex contradictione quodlibet" und "reductio ad absurdum" durch Regeln beschrieben werden konnte, die in den entsprechenden Grundkalkülen ableitbar sein sollten. Wegen Lemma 15.2 ist die formale Entscheidbarkeit jedoch keine Eigenschaft eines Kalküls, die man ausdrücken könnte durch die Ableitbarkeit eines Regelsystems in diesem Kalkül. Insbesondere läßt sich die formale Entscheidbarkeit nicht erzwingen, indem man einfach ein gewisses Regelsystem zu den Grundregeln eines Kalküls $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}$ hinzunimmt, im Unterschied zu "ex contradictione quodlibet" und "reductio ad absurdum", deren Gültigkeit man durch Hinzunahme von

$$a, \sim a \Rightarrow b$$

$$a \Rightarrow b; a \Rightarrow \sim b \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \sim a$$

$$\sim a \Rightarrow b; \sim a \Rightarrow \sim b \mathrel{\dot{\Rightarrow}} a$$

zu den Grundregeln eines Kalküls garantieren kann. Einen vorgegebenen Kalkül in geeigneter Weise so zu erweitern, daß er formal entscheidbar wird, ist kein triviales Unterfangen, In vielen Fällen ist dies auch unmöglich, wie sich mithilfe des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes zeigen läßt. Dies hat seine Vor- und Nachteile: Vorteile beim Beweis der Nichtkreativität, Nachteile beim Nachweis der Allgemeingültigkeit formal ableitbarer Aussagen und Regeln.

Zunächst können wir bei der operatorenlogischen Erweiterung von $\hat{\hat{K}}$ zu $\hat{\hat{K}}_\Omega$ - bei der jetzt natürlich im Gegensatz zu § 16 wieder beliebige Operatoren zugelassen sind, also z.B. auch $\vee$ - darauf verzichten, außer RA und ECQ neue nichtatomare Grundregeln hinzuzufügen, die der jetzt zusätzlich geforderten formalen Entscheidbarkeit entsprechen. Denn nach Lemma 15.4 und der Operatorenvollständigkeit von $\wedge\vee\rightarrow\neg$ ist $\tilde{\tilde{K}}_\Omega$ dann formal entscheidbar, wenn $\tilde{\tilde{K}}$ formal entscheidbar ist. Ferner ist $\overline{RA}$ in $\tilde{\tilde{K}}_\Omega$ ableitbar, wenn $\tilde{\tilde{K}}$ formal entscheidbar ist (vgl. Satz 17.1). Für $\hat{\hat{K}}_\Omega$ können wir also denjenigen Kalkül wählen, der an nichtatomaren Grundregeln neben den Operator-Grundregelsystemen nur RA und ECQ hat. $\hat{\hat{K}}_\Omega$ ist also mit einem in § 14 betrachteten Kalkül $\tilde{\tilde{K}}_\Omega$ identisch, nur daß der Grundkalkül $\hat{\hat{K}}$ die zusätzliche Eigenschaft der formalen Entscheidbarkeit hat. Dies bedeutet insbesondere, daß wir den ganzen Nachweis der Nichtkreativität aus § 14 übernehmen können, da die $\hat{\hat{K}}_\Omega$ nur spezielle intuitionistische Kalküle sind. Ebenso gelten die Sätze zur Operatorenvollständigkeit aus § 14. Wir haben also:

<u>Satz 17.2</u> Sei R konkrete $\hat{\hat{K}}^i_\Omega$-Regel, in der S_i nicht vorkommt. Falls $\vdash_{\hat{\hat{K}}^i_\Omega} R$, dann $\vdash_{\hat{\hat{K}}^{i-1}_\Omega} R$.

<u>QED</u>

<u>Satz 17.3</u> Sei R konkrete atomare $\hat{\hat{K}}_\Omega$-Regel. Falls $\vdash_{\hat{\hat{K}}_\Omega} R$, dann $\vdash_{\hat{\hat{K}}} R$.

<u>QED</u>

Die Bildung des Kalküls $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$ sei so verstanden wie in § 14: $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$ enthält keinen formalen Widerlegungsbegriff, statt RA und ECQ sind RA-$\neg$ und ECQ-$\neg$ Grundregeln, ferner nehmen alle Grundregeln R von $\hat{\hat{K}}$ in $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$ die Gestalt $(R)_1{}^* \Rightarrow (R)_2{}^*$ an. In $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$ ist nur die Heranziehung und Löschung von Aussagen erlaubt, nicht von konkreten Regeln höherer Stufe.
$\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$ heiße der Kalkül der <u>klassischen $\wedge\vee\to\neg$-Logik über $\hat{\hat{K}}$</u>.

<u>Satz 17.4</u>
(i) Seien $R_1,\ldots,R_n$ konkrete $\hat{\hat{K}}_{\Omega}$-Regeln, U $\hat{\hat{K}}_{\Omega}$-R-Aussage. Dann gilt:

$$R_1,\ldots,R_n \vdash_{\hat{\hat{K}}_{\Omega}} U \qquad \text{g.d.w.} \qquad \mathring{R}_1{}^*,\ldots,\mathring{R}_n{}^* \vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} \mathring{U}^* \quad .$$

(ii) Seien $A_1,\ldots,A_n,A$ $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$-Aussagen. Dann gilt:

$$A_1,\ldots,A_n \vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} A \qquad \text{g.d.w.} \qquad A_1,\ldots,A_n \vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg\Omega}} A \quad .$$

<u>QED</u>

Nun lassen sich $\vee$ und $\to$ innerhalb von $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg}$ definieren:

<u>Satz 17.5</u> Für jedes $\hat{\hat{K}}$ ist in $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg}$ ableitbar:

(i) $p\to q \Leftrightarrow \neg(p\wedge\neg q)$

(ii) $p\vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p\wedge\neg q)$.

<u>Beweis</u> (i) Nach Satz 17.1 ist in $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg}$ $\overline{RA}$ ableitbar, also ist (i) mit Satz 16.9 bewiesen.

(ii) Seien A, B $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg}$-Aussagen:

<u>"$\Rightarrow$"</u>:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{^{(2)}[A]}{A}\qquad \dfrac{\dfrac{^{(1)}[\neg A]}{\neg A}}{\sim A}\,{\scriptstyle \neg\text{-B}}}{B}\,{\scriptstyle \overline{RA}}}{\neg A\to B}\,{\scriptstyle (1)\to\text{-E}} \qquad \dfrac{\dfrac{^{(2)}[B]}{B}}{\neg A\to B}\,{\scriptstyle \to\text{-E}} \qquad \dfrac{A\vee B}{A\vee B}}{\neg A\to B}\,{\scriptstyle (2)\vee\text{-B}}$$

Daraus mit (i) die Behauptung.

<u>"$\Leftarrow$"</u>: Zunächst erhält man mit den $\vee$-Grundregeln und RA:

(1) $\sim A \vee B \vdash \sim A$

(2) $\sim A \vee B \vdash \sim B$.

Damit ergibt sich die Ableitung:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}[\sim A \vee B]}{\sim A \vee B}}{\sim A}\,(1)}{\neg A}\,\neg\text{-E}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}[\sim A \vee B]}{\sim A \vee B}}{\sim B}\,(2)}{\neg B}\,\neg\text{-E}
}{\neg A \wedge \neg B}\,\wedge\text{-E}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\neg(\neg A \wedge \neg B)}{\neg(\neg A \wedge \neg B)}}{\sim \neg A \wedge \neg B}\,\neg\text{-B}
}{A \vee B}\,{}^{(1)}\overline{RA}
$$

<u>QED</u>

Mit diesem Satz läßt sich analog zu Satz 16.10 zeigen, daß der Kalkül $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$ der klassischen $\wedge\vee\rightarrow\neg$ -Logik über $\hat{\hat{K}}$ gleichwertig ist mit dem Kalkül $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$ der klassischen $\wedge\neg$ -Logik über $\hat{\hat{K}}$. Dabei sei $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$ als der oben S. 219 definierte Kalkül verstanden, indem man $\hat{\hat{K}}$ als Grundkalkül im Sinne von § 16 auffaßt, was wegen Satz 17.1 berechtigt ist.[1]

=================

1) $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$ ist ein Kalkül mit $\overline{RA}\neg$ als Grundregel. Würde man $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$ aus $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$ hervorgehen lassen wie in § 16 $\hat{K}^{**}_{\wedge}$ aus $\hat{K}^{**}_{\wedge\rightarrow}$, indem man die $\vee$- und $\rightarrow$-Grundregeln wegließe und ferner in jeder Grundregel der Gestalt $\Delta^* \Rightarrow X^*$ das Zeichen $\rightarrow$ mithilfe von Satz 17.5 (i) ersetzen würde durch $\wedge$ und $\neg$, dann hätte $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$ nur ECQ$\neg$ statt $\overline{RA}\neg$ als Grundregel. $\overline{RA}\neg$ ließe sich dabei auch nicht aus einer formalen Entscheidbarkeit von $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$ herleiten, dann letztere ergibt sich erst aus Satz 17.6, zu dessen Beweis man schon $\overline{RA}\neg$ benötigt.

Satz 17.6 Sei $\hat{\hat{K}}_{\wedge}^{**}$ der Kalkül der klassischen $\wedge\neg$-Logik über $\hat{\hat{K}}$. Sei $^{+}$ die wegen Satz 17.5 und den Ersetzungstheoremen existierende Funktion, die allen $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}$-Aussagen B eine $\hat{\hat{K}}_{\wedge\neg}$-Aussage B^{+} zuordnet, so daß gilt: $B \dashv\vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} B^{+}$.

Dann gilt für alle $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow}^{**}$-Aussagen $A_1, \ldots, A_n, A$:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow}^{**}} A \quad \text{g.d.w.} \quad A_1^{+}, \ldots, A_n^{+} \vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge}^{**}} A^{+} .$$

Insbesondere ist $\hat{\hat{K}}_{\wedge}^{**}$ formal entscheidbar in dem Sinne, daß für alle $\hat{\hat{K}}_{\wedge}^{**}$-Aussagen A gilt:

$$\vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge}^{**}} A \quad \text{oder} \quad \vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge}^{**}} \neg A .$$

Beweis Ähnlich wie Beweis von Satz 16.10.

QED

Mit C bezeichnen wir den Kalkül C' aus § 16, erweitert um die $\vee$-Grundregeln. C heiße Kalkül der formalen klassischen $\wedge\vee\rightarrow\neg$-Logik. C ist nach Satz 17.5 gleichstark wie die in § 16 angegebenen Kalküle C' und C''. Denn da der Beweis von Satz 17.5 nur $\overline{RA}$ benutzt, nicht jedoch explizit die formale Entscheidbarkeit, und da C $\overline{RA}$ als Grundregel hat, läßt sich Satz 17.5 auch für C beweisen.

Wir definieren nun den Begriff der C-Allgemeingültigkeit: Eine konkrete C-Regel $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ für C-Aussagen $A_1, \ldots, A_n, A$ heißt C-allgemeingültig, wenn für jedes $\hat{\hat{K}}$ und jede Interpretation κ über $\hat{\hat{K}}$ gilt:

$$A_1^{\kappa}, \ldots, A_n^{\kappa} \vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow}^{**}} A^{\kappa} .$$

Wir wollen zeigen:

Satz 17.7 Für C-Aussagen $A_1, \ldots, A_n, A$ gilt $A_1, \ldots, A_n \vdash_{C} A$ genau dann, wenn die Regel $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ C-allgemeingültig ist.

Dazu genügt es zu zeigen:

Satz 17.8 für C''-Aussagen $A_1, \ldots, A_n, A$ gilt $A_1, \ldots, A_n \vdash_{C''} A$ genau dann, wenn die Regel $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ C-allgemeingültig ist.

<u>Beweis von Satz 17.7 aus Satz 17.8</u> Sei $^+$ die in Satz 17.6 genannte Funktion $^+$, die $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg}$-Aussagen $\hat{\hat{K}}_{\wedge\neg}$-Aussagen zuordnet, so daß für alle $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg}$-Aussagen B gilt:

$B \dashv\vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg}} B^+$. Dann gilt mit Satz 17.4 (ii):

(3) $B \dashv\vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} B^+$. (Man beachte, daß $\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\to\neg}$-Aussagen und $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$-Aussagen dieselben Aussagen sind.) Weiterhin gilt nach der Bemerkung von S. 227 (Mitte), wonach sich Satz 17.5 auch für C beweisen läßt, für C-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ entsprechend Satz 17.6:

(4) $A_1,\ldots,A_n \vdash_C A$ g.d.w. $A_1^+,\ldots,A_n^+ \vdash_{C''} A^+$.

Außerdem gilt für beliebige C-Aussagen A und Interpretationen κ über $\hat{\hat{K}}$:

(5) $A^{\kappa +} \equiv A^{+\kappa}$,

da κ sich nur auf die atomaren Aussagen bezieht. Daher gilt für C-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$

$A_1,\ldots,A_n \vdash_C A$

g.d.w. $A_1^+,\ldots,A_n^+ \vdash_{C''} A^+$ (wegen (4))

g.d.w. $A_1^+,\ldots,A_n^+ \Rightarrow A^+$ C-allgemeingültig ist (nach Satz 17.8)

g.d.w. für jedes $\hat{\hat{K}}$ und jede Interpretation κ:

$A_1^{+\kappa},\ldots,A_n^{+\kappa} \vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} A^{+\kappa}$ (Definition von C-Allgemeingültigkeit)

g.d.w. für jedes $\hat{\hat{K}}$ und jede Interpretation κ :

$A_1^{\kappa+},\ldots,A_n^{\kappa+} \vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} A^{\kappa+}$ (wegen (5))

g.d.w. für jedes $\hat{\hat{K}}$ und jede Interpretation κ :

$A_1^{\kappa},\ldots,A_n^{\kappa} \vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} A^{\kappa}$ (mit (3))

g.d.w. $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ C-allgemeingültig ist.

<u>QED</u>

Beim nun folgenden Beweis von Satz 17.8 müssen wir beachten, daß die Behauptung des Satzes nicht mit der von Satz 16.11 zusammenfällt. Der Begriff der C''-Allgemeingültigkeit aus § 16 ist von der C-Allgemeingültigkeit streng zu unterscheiden, selbst wenn letztere auf C''-Aussagen bezogen wird. In der Definition der C''-Allgemeingültigkeit bezogen wir uns auf alle Grundkalküle $\hat{K}$, in der Definition der C-Allgemeingültigkeit auf alle Grundkalküle $\hat{\hat{K}}$, d.h. auf die Grundkalküle $\hat{K}$, die zudem formal entscheidbar sind. Es ist zwar trivial, daß alle C''-allgemeingültigen Regeln auch C-allgemeingültig sind, da die formale Entscheidbarkeit eine zusätzlich von Grundkalkülen verlangte Eigenschaft ist. Deshalb folgt die Richtung von links nach rechts von Satz 17.8 sofort aus Satz 16.11. Dagegen ist umgekehrt nicht unmittelbar einsichtig, daß alle C-allgemeingültigen Regeln $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ auch C''-allgemeingültig sind, da die Klasse der Grundkalküle $\hat{\hat{K}}$ eine echte Teilklasse der Klasse der Grundkalküle $\hat{K}$ ist. Erst wenn wir Satz 17.8 bewiesen haben, werden wir mit Satz 16.11 nachträglich schließen können, daß C- und C''-Allgemeingültigkeit zusammenfallen.

Der folgende Beweis der Richtung von rechts nach links von Satz 17.8 ist relativ aufwendig. Wir werden ihn mit Hilfe eines Tableauverfahrens beweisen, das eine enge Verwandtschaft zu Vollständigkeitssätzen für die klassische Junktorenlogik, z.B. bei SMULLYAN 1968, hat. Das Problem des Beweises liegt darin: Bei allen entsprechenden Sätzen bisher (Satz 9.1, 13.7, 14.10, 16.8, 16.11) war der formale Logikkalkül selbst ein Kalkül, dessen Grundkalkül L bzw. $\tilde{L}$ bzw. $\tilde{\tilde{L}}$ bzw. $\hat{L}$ zu den Kalkülen gehörte, auf die sich der Begriff der Allgemeingültigkeit bezog. So war z.B. der Kalkül I der formalen intuitionistischen Logik selbst ein Kalkül $\tilde{\tilde{L}}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}$ über einem Grundkalkül $\tilde{\tilde{L}}$, in dem "reductio ad absurdum" und "ex contradictione quodlibet" galten. C ist jedoch nicht formal entscheidbar, also kein Kalkül der klassischen $\wedge\vee\rightarrow$-Logik über formal entscheidbarem Grundkalkül. Man kann demnach den verlangten Beweis nicht (wie z.B. den Beweis von Satz 9.1) einfach führen, indem man auf C-Ableitungen die identische Interpretation anwendet.

<u>Lemma 17.9</u> Für beliebige $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$-Aussagen A, B gilt in $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$:

(i) $\neg\neg A \vdash A$

(ii) Wenn $\vdash \neg(A \wedge B)$, dann $\vdash \neg A$ oder $\vdash \neg B$.

<u>Beweis</u> (i)

$$(1)\,\overline{R}A\neg\ \dfrac{\dfrac{(1)[\neg A]}{\neg A} \qquad \dfrac{\neg\neg A}{\neg\neg A}}{A}$$

(ii) Wenn $\vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}} \neg(A \wedge B)$

dann $\vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}} \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ mit (i)

dann $\vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\rightarrow}} \neg A \vee \neg B$ mit Satz 17.6

dann $\vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} \neg A \vee \neg B$ mit Satz 17.4 (ii)

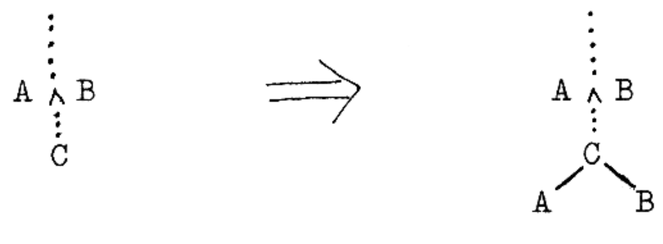
dann $\vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} \neg A$ oder $\vdash_{\hat{\hat{K}}_{\wedge\vee\rightarrow\neg}} \neg B$ mit Satz 14.4

dann $\vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}} \neg A$ oder $\vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}} \neg B$ mit Satz 17.4 (ii) und Satz 17.6.

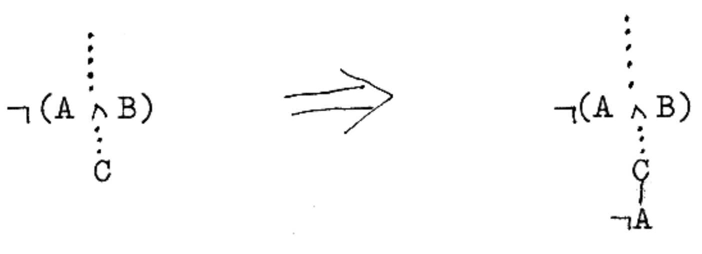
<u>QED</u>

Wir geben nun Regeln an zur Konstruktion von Tableaus $\mathcal{T}$ zu $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$-Aussagen oder auch zu C''-Aussagen. Für die exakte Definition eines Tableaus verweisen wir auf SMULLYAN 1968 S. 24. Anschaulich gesprochen, ist ein Tableau für eine Aussage A ein sich nach unten verzweigender Baum, an dessen Spitze A steht und an dessen Knotenpunkten weitere Aussagen stehen. Man <u>entwickelt</u> ein Tableau für A, indem man A hinschreibt und nach folgenden Entwicklungsregeln einen Baum konstruiert:

I)



II)



III)

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg(A \wedge B) \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \neg(A \wedge B) \\ \vdots \\ C \\ | \\ \neg B \end{array}$$

IV)

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg A \\ \vdots \\ C \\ | \\ A \end{array}$$

Diese Regeln sind so zu lesen:

I) Hat men einen mit C endenden Zweig konstruiert, in dem an einer Stelle $A \wedge B$ vorkommt, dann darf man ihn verzweigen in einen Zweig, in dem A auf C folgt, und in einen Zweig, in dem B auf C folgt. Wir sagen auch, daß A und B durch Anwendung eines Entwicklungsschrittes auf $A \wedge B$ zustandekommen.

II) Hat man einen mit C endenden Zweig konstruiert, in dem an einer Stelle $\neg(A \wedge B)$ vorkommt, so darf man ihn um $\neg A$ verlängern. Wir sagen auch, daß $\neg A$ durch Anwendung eines Entwicklungsschrittes auf $\neg(A \wedge B)$ zustandekommt.

III), IV) analog.

Für atomare Aussagen werden keine Entwicklungsschritte definiert.

Ein Tableau $\mathcal{T}$ für A besteht entweder aus A ~~selber oder~~ ist das Resultat der sukzessiven Anwendung beliebig vieler Entwicklungsschritte, ausgehend von A.

Daß eine Aussage A in einem Tableau $\mathcal{T}$ über bzw. unter B steht, bedeutet, daß es einen Zweig in $\mathcal{T}$ gibt, in dem A und B (nicht notwendigerweise unmittelbar) über- bzw. untereinander stehen.

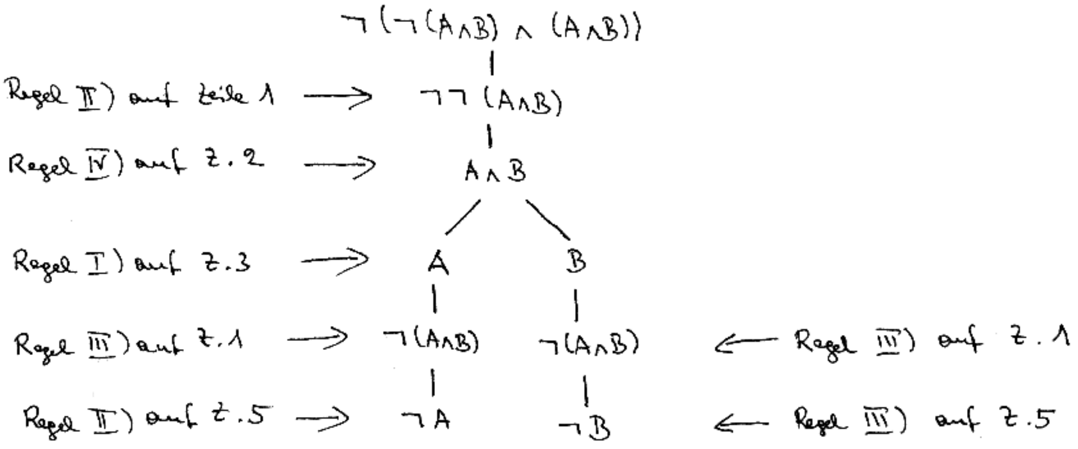
Ein Zweig eines Tableaus $\mathcal{T}$ heißt geschlossen, wenn er A und $\neg A$ enthält für atomare A.

Ein Zweig heißt <u>vollständig</u>,
1. wenn er geschlossen ist, oder
2. wenn er zu jedem seiner Aussagenvorkommen $A \wedge B$ auch ein darunterstehendes Aussagenvorkommen A oder B enthält, zu jedem seiner Aussagenvorkommen $\neg(A \wedge B)$ auch darunterstehende Aussagenvorkommen $\neg A$ und $\neg B$ und zu jedem seiner Aussagenvorkommen $\neg\neg A$ auch ein darunterstehendes Vorkommen A enthält.

Ein vollständiger, aber nichtgeschlossener Zweig heißt <u>offen</u>.

Ein Tableau heißt geschlossen bzw. vollständig, wenn alle seine Zweige geschlossen bzw. vollständig sind. Ein Tableau heißt offen, wenn es vollständig ist, jedoch einen offenen Zweig besitzt.
Offensichtlich kann man in endlich vielen Schritten zu einer Aussage A ein vollständiges Tableau konstruieren.

Beispiel für ein vollständiges geschlossenes Tableau für $\neg(\neg(A \wedge B) \wedge (A \wedge B))$ bei atomaren A, B:



<u>Lemma 17.10</u> Sei $\mathcal{T}$ ein vollständiges Tableau für eine $\hat{\hat{K}}{}^{**}_{\wedge}$-Aussage A mit $\vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge}}$ A. Dann enthält jeder Zweig von $\mathcal{T}$ mindestens eine $\hat{\hat{K}}{}^{**}_{\wedge}$-ableitbare Aussage der Gestalt B oder $\neg B$, wobei B atomar.

<u>Beweis</u> Sei ζ vollständiger Zweig von $\mathfrak{T}$. Falls ζ geschlossen ist, enthält er Aussagen B <u>und</u> $\neg$B für eine atomare Aussage B. Nach Satz 17.6 gilt nun: $\vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge}} B$ oder $\vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge}} \neg B$. Damit ist in diesem Fall die Behauptung bewiesen.
Sei ζ offen. Wir nennen ein Stück ζ' von ζ auch <u>Anfang</u> von ζ, wenn ζ' mit einer Aussage C von ζ auch alle in ζ unter C stehenden Aussagen enthält.
Wir zeigen durch Induktion über der Länge von Anfängen ζ' von ζ:

(*) Falls A an der Spitze von ζ' steht und es gilt $\vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge}} A$, dann enthält ζ' eine $\hat{K}^{**}_{\wedge}$-ableitbare Aussage der Gestalt B oder $\neg$B für atomares B.

Daraus folgt für $\zeta \equiv \zeta'$ die Behauptung des Satzes.
Beweis von (*):
Besteht ζ' nur aus A, dann ist (*) erfüllt, da A dann wegen der Offenheit von ζ von der Gestalt B oder $\neg$B sein muß für atomares B.
ζ' habe Länge > 1. An der Spitze von ζ' stehe eine Aussage $C_1 \wedge C_2$. Dann steht unter $C_1 \wedge C_2$ ein C_i $(i=1,2)$, wobei mit $\vdash C_1 \wedge C_2$ auch $\vdash C_i$ gilt. Da C_i an der Spitze eines Anfanges ζ'' von ζ von kleinerer Länge als ζ' steht, ergibt die Induktionsvoraussetzung die Behauptung.
Falls an der Spitze von ζ' $\neg(C_1 \wedge C_2)$ steht, steht an der Spitze eines Anfanges ζ'' von ζ $\neg C_1$ und an der Spitze eines anderen Anfanges ζ''' von ζ $\neg C_2$, wobei ζ'', ζ''' von kleinerer Länge als ζ' sind. Da nach Lemma 17.9 mit $\vdash \neg(C_1 \wedge C_2)$ auch $\vdash \neg C_1$ oder $\vdash \neg C_2$ gilt, ergibt sich die Behauptung durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf ζ'' bzw. ζ''', je nachdem ob $\vdash \neg C_1$ oder $\vdash \neg C_2$ gilt.
Analog der Fall, wo an der Spitze von ζ' $\neg\neg C$ steht.

<u>QED</u>

Eine Art Umkehrung von Lemma 17.10 stellt Lemma 17.11 dar, das wir allerdings für C'' formulieren:

<u>Lemma 17.11</u> Sei $\mathfrak{T}$ Tableau für eine C''-Aussage A. Die Zweige von $\mathfrak{T}$ seien von links nach rechts durchnummeriert, ihre Anzahl sei τ. Für jedes i $(1 \leq i \leq \tau)$ sei B_i eine beliebige Aussage des i-ten Zweiges von $\mathfrak{T}$. Dann gilt: $B_1, \ldots, B_\tau \vdash_{C''} A$.

<u>Beweis</u> Sei $\mathfrak{T}$ Tableau für A. Die Tableaus

B bzw. B und D

heißen <u>unmittelbare Teiltableaus</u> von $\mathfrak{T}$, wenn $\mathfrak{T}$ die Gestalt

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ B \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{ccc} & A & \\ B & & D \end{array}$$

hat. Als <u>Teiltableaus</u> von $\mathfrak{T}$ definieren wir $\mathfrak{T}$ selber und die Teiltableaus von unmittelbaren Teiltableaus von $\mathfrak{T}$.

Wir beweisen die Behauptung des Lemmas, indem wir induktiv für alle Teiltableaus $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$ zeigen:

(*) Sei τ' die Zahl der Zweige eines Teiltableaus $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$ mit B als oberster Aussage. B_i sei eine beliebige Aussage des i-ten Zweiges von $\mathfrak{T}'$ $(1 \leq i \leq \tau')$. Dann gilt $B_1, \ldots, B_{\tau'} \vdash_{C''} B'$, wobei B' mit B identisch oder B' in $\mathfrak{T}$ über B steht.

Aus (*) ergibt sich sofort die Behauptung, wenn man für $\mathfrak{T}'$ $\mathfrak{T}$ selbst einsetzt.

<u>Nachweis von (*):</u> $\mathfrak{T}'$ bestehe nur aus der Aussage B, hat also nur einen einzigen Zweig, der nur aus B besteht. Dann ist nur $B \vdash_{C''} B$ zu zeigen. (trivial)

Ebenso trivial ist der Fall, in dem B zu $B_1, \ldots, B_{\tau'}$ gehört.

$\mathfrak{T}'$ habe nun die Gestalt:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ D & & E \end{array}$$

wobei B nicht zu $B_1, \ldots, B_{\tau'}$ gehört. Dann kommen D und E durch Anwendung eines Entwicklungsschrittes auf eine Aussage $D \wedge E$ zustande, die mit B identisch ist oder über B steht. Gehören D und E zu $B_1, \ldots, B_{\tau'}$, dann gilt wegen $D, E \vdash D \wedge E$ auch $B_1, \ldots, B_{\tau'} \vdash D \wedge E$.

Gehört D nicht zu $B_1,\dots,B_{\tau'}$, und ist τ'' die Anzahl der Zweige des Teiltableaus

$$D$$

so ist B_i $(1 \leq i \leq \tau'')$ eine Aussage des i-ten Zweiges dieses Teiltableaus. Nehmen wir an, wir hätten (*) für unmittelbare Teiltableaus von $\mathcal{T}'$ schon bewiesen, so ergibt sich: $B_1,\dots,B_{\tau''} \vdash D'$, wobei D' mit D identisch ist oder D' in $\mathcal{T}$ über D steht. Argumentiert man analog für das Teiltableau

$$E$$

so erhält man auch $B_{\tau''+1},\dots,B_{\tau'} \vdash E'$, wobei E' mit E identisch ist oder E' in $\mathcal{T}$ über E steht. Falls $D' \equiv D$ und $E' \equiv E$, ergibt sich $B_1,\dots,B_{\tau'} \vdash D \wedge E$, wobei $D \wedge E$ mit B identisch ist oder in $\mathcal{T}$ über B steht. Falls D' in $\mathcal{T}$ über D oder E' in $\mathcal{T}$ über E steht, erhält man $B_1,\dots,B_{\tau'} \vdash D'$ bzw. $B_1,\dots,B_{\tau'} \vdash E'$, wobei D' bzw. E' mit B identisch ist oder in $\mathcal{T}$ über B steht.

Ganz entsprechend argumentiert man, wenn $\mathcal{T}'$ die Gestalt

$$\begin{array}{c} B \\ | \\ D \end{array}$$

hat.

QED

Lemma 17.12 Sei $\mathcal{T}$ ein geschlossenes Tableau für eine C''-Aussage A. Dann gilt: $\vdash_{C''} A$.

Beweis Sei τ die (von links nach rechts gezählte) Anzahl der Zweige von $\mathcal{T}$. Im i-ten Zweig $(1 \leq i \leq \tau)$ kommt wegen der Geschlossenheit von $\mathcal{T}$ sowohl B_i als auch $\neg B_i$ vor für eine atomare Aussage B_i.
Nach Lemma 17.11 gilt:

$$B_1, B_2, \dots, B_\tau \vdash_{C''} A \qquad \text{und}$$

$$\neg B_1, B_2, \dots, B_\tau \vdash_{C''} A \; .$$

Daraus erhält man:

(6) $B_2,\dots,B_\tau \vdash A$

(Denn aus $B_1,B_2,\dots,B_\tau \vdash A$ und $B_1,B_2,\dots,B_\tau,\neg A \vdash \neg A$ folgt mit $RA\neg$: $B_2,\dots,B_\tau,\neg A \vdash \neg B_1$ und daraus mit $\neg B_1,B_2,\dots,B_\tau \vdash A$: $B_2,\dots,B_\tau,\neg A \vdash A$. Daraus mit $B_2,\dots,B_\tau,\neg A \vdash \neg A$ und $\overline{RA}\neg$ die Behauptung (6).)

Auf dieselbe Weise erhält man:

(7) $\neg B_2,B_3,\dots,B_\tau \vdash A$,

wenn man von

$B_1, \neg B_2,B_3,\dots,B_\tau \vdash A$ und

$\neg B_1, \neg B_2,B_3,\dots,B_\tau \vdash A$ ausgeht.

Aus (6) und (7) erhält man

(8) $B_3,\dots,B_\tau \vdash A$.

Die ganze bisherige Argumentation für $\neg B_3$ statt B_3 durchführend, erhält man

(9) $\neg B_3,B_4,\dots,B_\tau \vdash A$

und aus (8), (9)

$B_4,\dots,B_\tau \vdash A$.

Iteriert man dies, so erhält man schließlich: $\vdash A$, d.h. die Behauptung.

<u>QED</u>

<u>Lemma 17.13</u> Sei A eine C-allgemeingültige C''-Aussage. Dann gibt es kein offenes Tableau für A.

<u>Beweis</u> ζ sei ein offener Zweig eines Tableaus $\mathcal{T}$ für A. $B_1,\dots,B_n$ seien die in ζ vorkommenden Aussagen der Gestalt B oder $\neg$ B für atomares B. (Solche Aussagen existieren, da ζ vollständig.) Wir bilden nun den Kalkül K, der nur $D_1,\dots,D_n$ als Aussagen und a,b als Aus-

sagenvariable hat, wobei $D_i \equiv B_i$ sei, falls B_i atomar, und $D_i \equiv B$ sei, falls $B_i \equiv \neg B$. $\hat{\hat{K}}$ habe als Grundregeln:

$$a \Rightarrow b; a \Rightarrow \sim b \Rightarrow \sim a$$

$$b, \sim b \Rightarrow a$$

sowie für jedes i ($1 \leq i \leq n$):

$$\sim D_i \quad \text{, falls } D_i \equiv B_i \text{ , und}$$

$$D_i \quad \text{, falls } \neg D_i \equiv B_i \text{ .}$$

Damit ist $\hat{\hat{K}}$ offensichtlich formal entscheidbar, ferner ist $\hat{\hat{K}}$ konsistent, d.h. es gilt nicht: $\vdash_{\hat{\hat{K}}} D_i$ und $\vdash_{\hat{\hat{K}}} \sim D_i$ für ein i. (Dies folgt aus der Offenheit von ζ.)

Damit gilt für kein B_i: $\vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}} B_i$.

Das steht im Widerspruch zu Lemma 17.10 wenn man A statt als C''-Aussage als $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$-Aussage und dementsprechend $\mathcal{T}$ als Tableau über $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}$-Aussagen auffaßt. Denn es gilt $\vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge}} A$ wegen der C-Allgemeingültigkeit von A.

QED

<u>Satz 17.14</u> Alle C-allgemeingültigen C''-Aussagen sind C''-ableitbar.

<u>Beweis</u> Sei A eine C-allgemeingültige C''-Aussage. Dann gibt es nach Lemma 17.13 kein offenes Tableau für A. D.h. (nach Definition): es gibt kein Tableau für A, das vollständig ist, aber einen offenen Zweig besitzt. Also besitzen alle vollständigen Tableaus für A keinen offenen Zweig, sind also geschlossen. Also gilt nach Lemma 17.12: $\vdash_{C''} A$.

QED

Die Richtung von rechts nach links von Satz 17.8 ergibt sich dann sofort aus dem folgenden Lemma:

<u>Lemma 17.15</u> Seien $A_1, \ldots, A_n, A$ C''-Aussagen.

(i) $A_1, \ldots, A_n \vdash_{C''} A$ g.d.w. $\vdash_{C''} \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A)$.

(ii) Die Regel $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ ist C-allgemeingültig genau dann, wenn die Aussage $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A)$ C-allgemeingültig ist.

Beweis

(i) Von links nach rechts:

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A \vdash_{C''} \neg A \qquad \text{mit } \wedge\text{-Regeln}$$

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A \vdash_{C''} A \qquad \text{mit } \wedge\text{-Regeln und } A_1, \ldots, A_n \vdash A$$

Daraus mit $RA\neg$:

$$\vdash_{C''} \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A) .$$

Von rechts nach links:

$$A_1, \ldots, A_n, \neg A \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A \qquad (\text{mit } \wedge\text{-E})$$

Daraus mit der Voraussetzung $\vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A)$ und $\overline{RA}\neg$ die Behauptung

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A \quad .$$

(ii) Nach Definition von C-Allgemeingültigkeit genügt es zu zeigen: Für jedes $\hat{\hat{K}}$ und jede Interpretation κ über $\hat{\hat{K}}$ gilt:

$$A_1^{\kappa}, \ldots, A_n^{\kappa} \vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} A^{\kappa} \quad \text{g.d.w.} \quad \vdash_{\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}} \neg(A_1^{\kappa} \wedge \ldots \wedge A_n^{\kappa} \wedge \neg A^{\kappa})$$

Dazu kann man den Beweis von (i) übernehmen, denn die dort benutzte Regel $RA\neg$ kommt in jedem $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$ vor und $\overline{RA}\neg$ ist in jedem $\hat{\hat{K}}^{**}_{\wedge\vee\to}$ ableitbar (vgl. Satz 17.1).

QED

Satz 17.16 Eine konkrete C''-Regel $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ ist C-allgemeingültig g.d.w. sie C''-allgemeingültig ist.

Beweis Satz 16.11 und Satz 17.8 .

QED

Damit haben wir in § 16 und § 17 zwei verschiedene Deutungen desselben $\wedge\neg$-Formalismus C'' der klassischen Junktorenlogik geliefert. In § 16 haben wir C'' charakterisiert als Formalismus zur Erfassung der C''-allgemeingültigen C''-Regeln $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$, in § 17 als Formalismus zur Erfassung der C-allgemeingültigen C''-Regeln. Beide Begriffe der Allgemeingültigkeit sind nach Satz 17.16 im Hinblick auf C''-Regeln gleichwertig. Der Begriff der

C-Allgemeingültigkeit läßt sich jedoch im Gegensatz zu dem der C''-Allgemeingültigkeit auch auf C-Aussagen beziehen. Dementsprechend haben wir mit Satz 17.7 jetzt eine Deutung der vollen klassischen $\wedge\vee\rightarrow\neg$-Logik, im Gegensatz zu § 16, wo wir nur die $\wedge\rightarrow\neg$-und $\wedge\neg$-Logik deuten konnten. Der Begriff der C-Allgemeingültigkeit hat einen weiteren Anwendungsbereich als der der C'- oder C''-Allgemeingültigkeit, insofern er auch für Aussagen definiert ist, die $\vee$ enthalten. In der Deutung des klassischen $\vee$ unterscheiden sich die Ansätze von § 16 und § 17; man könnte sie etwa so schlagwortartig zusammenfassen:

§ 16: In der klassischen Logik gibt es keine Operatoren mit mehrzeiligen E-Regeln. Alle Operatoren sind explizit definierbar. Insbesondere ist $A \vee B$ von vornherein (d.h. intensional) mit $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ gleichwertig. Dementsprechend genügt es, die klassische Logik als Logik über solchen Grundkalkülen zu charakterisieren, die bezüglich Begründung und Widerlegung symmetrisch sind, in denen also die symmetrische "reductio ad absurdum" gilt.

§ 17: In der klassischen Logik lassen sich Operatoren genauso durch Regelsysteme festlegen wie z.B. in der intuitionistischen Logik. Deshalb ist zunächst (d.h. intensional) $\vee$ ein eigenständiger Junktor. $A \vee B$ läßt sich nur nachträglich (d.h. extensional) als mit $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ gleichwertig erweisen. Dementsprechend muß man[1] aber die klassische Logik auch schärfer als Logik über solchen Grundkalkülen charakterisieren, die sogar formal entscheidbar sind.

Gegen die in diesem §en vorgetragene Auffassung der klassischen Logik als einer Logik über formal entscheidbaren Grundkalkülen $\hat{\hat{K}}$ könnte man einwenden: Daß für jede $\hat{\hat{K}}$-Aussage A gilt: $\vdash_{\hat{\hat{K}}} A$ oder $\vdash_{\hat{\hat{K}}} \sim A$, kann man auch formulieren als: Jede Aussage ist wahr oder falsch. Dann kann man aber auch Junktoren sofort als Wahrheitsfunktionen auffassen, so wie es in der üblichen Wahrheitstafel-Semantik der Junktorenlogik geschieht.

==============

1) Vgl. allerdings dazu den Anhang.

Dies ist jedoch für uns kein Einwand: Daß Junktoren über einem formal entscheidbaren Bereich von Grundaussagen auch als Wahrheitsfunktionen deutbar sind, ist unbestritten. Doch dies ist ein ganz anderer semantischer Ansatz. Worum es uns in § 16 - § 17 dagegen ging, war ein Vergleich von klassischer und nichtklassischer (d.h. positiver, Minimal- und intuitionistischer) Logik im Rahmen desselben Ansatzes. Nur auf solche Weise ist ein echter Vergleich verschiedener Logiken möglich, nicht durch das Nebeneinanderstellen verschiedener semantischer Konzeptionen zu verschiedenen Logiken.

Einen gewissen Vorteil hat außerdem die in § 16 und § 17 vorgetragene Deutung der klassischen Logik gegenüber der wahrheitsfunktionalen Interpretation. Der Junktor $\rightarrow$ wird bei uns weiterhin so verstanden, daß $A \rightarrow B$ soviel besagt wie: B ist aus der Annahme A ableitbar. In der klassischen Logik ist diese "Erschließungsdeutung" von $A \rightarrow B$ gleichwertig mit $\neg(A \wedge \neg B)$ (Satz 16.9). Dies ist bei uns ein beweisbares Resultat. In der Wahrheitstafelinterpretation setzt man dagegen von vornherein $\rightarrow$ als bestimmte Wahrheitsfunktion an mit nur recht schwacher inhaltlicher Motivation. Daß $A \rightarrow B$ und $\neg(A \wedge \neg B)$ dieselben Wahrheitstafeln haben, erscheint daher nur als Konsequenz einer willkürlichen Festsetzung. Hält man die "Erschließungsdeutung" von $\rightarrow$ für plausibler als die wahrheitsfunktionale Deutung, so erscheint unsere Interpretation - zumindest was die Auffassung der Subjunktion angeht - einen Pluspunkt zu haben.

§ 18. Absurdität als Grundbegriff

Aufgrund unseres Ansatzes war es nicht möglich, Operatoren ganz ohne E-Regeln zuzulassen und so etwa einen Junktor $\curlywedge$ zu charakterisieren, auf den sich dann die Negation $\neg$ zurückführen läßt. (Vgl. Einleitung und § 11). Deshalb hatten wir einen formalen Widerlegungsbegriff $\sim$ eingeführt und die Negation gedeutet durch die Regeln $\neg p \Leftrightarrow \sim p$. $\sim$ gehörte dabei nicht zum Vokabular eines Grundkalküls, sondern ging in den Regelbegriff mit ein, indem wir definierten: Für jede Formel X ist $\sim X$ eine Regel O. Stufe.

Entsprechend hätten wir statt $\sim$ auch den Begriff einer Absurdität als Grundlage - etwa notiert durch $\#$ - einführen und dann einen O-stelligen Junktor $\curlywedge$ deuten können durch die Regeln $\curlywedge \Leftrightarrow \#$. In diesem Falle hätte $\curlywedge$ eine E-Regel gehabt, nämlich $\# \Rightarrow \curlywedge$. $\#$ hätte man dabei wieder als Zeichen auffassen müssen, das in die Definition des Regelbegriffs, nicht jedoch des Aussagenbegriffs, eingeht. Die Klauseln 1) und 2) der Definition von S. 152 hätten dann lauten müssen:

1) Jede Formel ist eine Regel O. Stufe.
2) $\#$ ist eine Regel O. Stufe.

Wir wollen kurz skizzieren, was sich in diesem Falle ergeben würde.

Vom Technischen her würde alles erheblich einfacher werden. Im Falle der Minimallogik hätten wir für $\#$ keine Adäquatheitsbedingung angeben müssen. Das Prinzip der "reductio ad absurdum" müßten wir jetzt - falls wir einen Widerspruch B, $\sim B$ durch $\#$ interpretieren und ansonsten $\sim A$ durch $A \Rightarrow \#$ deuten - notieren durch

$$A \Rightarrow \# ; A \stackrel{\bullet}{\Rightarrow} \# .$$

Dies ist jedoch für beliebige Aussagen A ableitbar. Damit wären die gegenüber § 7 erheblich komplizierteren Begriffsbildungen von § 12 (z.B. die erweiterte Definition von

"Segment") überflüssig, der Beweis des Normalisierungssatzes ließe sich fast wörtlich aus § 7 übernehmen. Wie in § 13 ließe sich zeigen, daß $\wedge\vee\rightarrow\curlywedge$ ein vollständiges System von Junktoren ist.

Ebenso leicht wären die Normalisierungssätze aus § 14 und § 16 zu beweisen. An die Stelle von ECQ und $\overline{RA}$ würden jetzt die Regeln treten:

$$\# \Rightarrow p$$

und

$$p \Rightarrow \# \stackrel{\cdot}{\Rightarrow} \# \stackrel{\cdot\cdot}{\Rightarrow} p \ .$$

Im Gegensatz zu ECQ und $\overline{RA}$ reicht es bei diesen Regeln aus, wenn sie in den Grundkalkülen ableitbar sind; sie brauchen nicht eigens als nichtatomare Grundregeln formuliert werden. Denn entsprechend Lemma 14.1 und Lemma 16.2 kann man sich auf Anwendungen solcher Regeln mit atomarer Konklusion beschränken. Nur daß jetzt - im Gegensatz zu ECQ und $\overline{RA}$ - gar keine nichtatomaren Prämissen mehr vorkommen können. Die Ableitbarkeit dieser Regeln im Grundkalkül überträgt sich also auf den operatorenlogisch erweiterten Kalkül. Dementsprechend wären in § 14 und § 16 gar keine neuen Normalisierungsbeweise mehr zu führen, da keine neuen nichtatomaren Grundregeln hinzukämen.

Auch § 17 würde nicht komplizierter. Den Begriff der formalen Entscheidbarkeit müßte man fassen als $\vdash A$ oder $A \vdash \#$. Weiterhin wäre zu beachten, daß man nicht mit $\wedge$ und $\curlywedge$, sondern nur mit $\rightarrow$ und $\curlywedge$ als Standardjunktoren eine vollständige klassische Logik erhält.

Daß wir trotzdem den wesentlich komplizierter zu handhabenden Widerlegungsbegriff $\sim$ statt $\#$ als Grundbegriff gewählt haben, hat seinen Grund darin, daß es uns für $\#$ an intuitiver Plausibilität fehlt. Wenn wir sagen "A ist widerlegt", so erscheint es als sehr gekünstelt, dies zu übersetzen als "Aus A kann man die Absurdität ableiten". Umgekehrt erscheint uns vielmehr die Absurdität als ein abgeleiteter Begriff, insofern man "A ist absurd" deuten kann als "aus A ergibt sich ein Widerspruch, d.h. läßt sich eine Aussage sowohl begründen als auch widerlegen". Auch wenn man die Widerlegung einer Aussage A als Scheitern von Begründungsversuchen für A auffaßt, ist es nicht sehr plausibel, dieses Scheitern mit dem Zeichen $\#$ zu symbolisieren und von der Ableitbarkeit des "Scheiterns" aus A zu reden. Denn damit würde man den Begriff des Scheiterns verselbständigen; Regeln wie $\# \Rightarrow \neg p$ würden jetzt aufgrund der formalen Fassung des Widerlegungsbegriffes ableitbar, ohne daß klar wäre, was das "Scheitern" bedeutet, wenn keine Aussage genannt wird, auf die es bezogen ist.

Nichtsdestoweniger benutzen die meisten Intuitionisten die Absurdität als Grundbegriff, was jedoch nicht verwundert: Denn da für $\#$ keine RA entsprechende Bedingung vonnöten ist, kann man (wie oben S. 153) fragen, was gerade $\#$ auszeichnet vor irgendwelchen anderen Zeichen, die man in die Definition des Regelbegriffs aufnehmen könnte. Und wenn man dann die Angabe von Regeln als Adäquatheitsbedingungen für $\#$ verlangt, wird man leicht auf die Regel $\# \Rightarrow p$ als einzig sinnvolle Adäquatheitsbedingung geführt, da die klassische Absurditätsregel in der Formulierung

$$p \Rightarrow \# \dot{\Rightarrow} \# \ddot{\Rightarrow} p$$

(im Gegensatz zur klassischen Widerlegungsregel $\overline{RA}$, die man als symmetrisches Gegenstück zu RA auffassen kann[1])
nicht sehr plausibel ist. Man hätte so von vornherein die intuitionistische Logik als einzig vernünftiges System der Logik gerechtfertigt.

Da aber Zweifel an der Voraussetzung berechtigt sind, daß der Widerlegungsbegriff sich adäquat auf den Absurditätsbegriff zurückführen läßt, ist es sinnvoller, den Widerlegungsbegriff als Grundbegriff zu wählen und damit auch

============

1) Jedenfalls, wenn man Begründungs- und Widerlegungsbegriff für unabhängig hält.

andere logische Systeme als das intuitionistische in die Überlegungen miteinzubeziehen. Nur so wird ein angemessener Vergleich der verschiedenen logischen Systeme möglich.

Anhang. Konsequenzen eines möglichen Resultats von N. TENNANT

PRAWITZ (1965) bezieht sich in seinem Normalisierungssatz für die klassische Quantorenlogik 1. Stufe auf ein eingeschränktes System der klassischen Logik, das weder $\vee$ noch $\exists$ als Grundzeichen hat und damit auch keine $\vee$- und $\exists$-Grundregeln. Dies auf die Logik n-stelliger Aussagenoperatoren übertragend, haben wir in § 16 den Normalisierungssatz für Kalküle $\hat{K}_{\Omega'}$ bewiesen, wobei die Junktoren aus Ω' explizit definierbar sein, also jeweils nur eine einzige E-Regel enthalten sollten. Um einen Normalisierungssatz für die klassische Logik mit beliebigen Operatoren zur Verfügung zu haben, setzten wir in § 17 die formale Entscheidbarkeit der betrachteten Grundkalküle voraus.

TENNANT (1980) hat nun den Versuch gemacht, einen Normalisierungssatz und daraus ein Teilformelprinzip für die volle klassische Quantorenlogik 1. Stufe einschließlich der $\vee$- und $\exists$-Regeln zu beweisen. Dieser Versuch ist nicht ganz geglückt. TENNANTs Beweis enthält eine Unkorrektheit, die bis jetzt nicht behoben ist. Da aber nicht unwahrscheinlich ist, daß sich TENNANTs Beweis reparieren läßt, ist es sinnvoll, kurz die Konsequenzen zu erläutern, die sich daraus für die Resultate aus § 16 und § 17 dieser Arbeit ergäben.

Ein Beweis des Normalisierungssatzes für die volle klassische Quantorenlogik würde sich leicht auf Kalküle $\hat{K}_{\Omega}$ mit beliebigen Systemen Ω von Operatoren übertragen lassen, wobei $\hat{K}_{\Omega}$ $\overline{\text{RA}}$ als Grundregel hätte und nicht formal entscheidbar sein brauchte. Daraus würde sich Subaussagenprinzip und damit Nichtkreativität ergeben. § 16 wäre also in diesem Sinne umzuschreiben.[1] Entgegen der Bemerkung von S. 214 (unten) würde das Analogon von Satz 14.4 nicht mehr gelten, es würde also z.B. nicht aus $\vdash_{\hat{K}_\Omega} A \vee B$ folgen: $\vdash_{\hat{K}_\Omega} A$ oder $\vdash_{\hat{K}_\Omega} B$. Dies ergibt sich durch Kontraposition aus Satz 16.12.

Bezeichnet man eine konkrete C-Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ für C-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ als $\overline{C}$-allgemeingültig, wenn für jedes $\hat{K}$ und jede Interpretation κ über $\hat{K}$ gilt:
$A_1^{\kappa},\ldots,A_n^{\kappa} \vdash_{\hat{K}^{**}_{\wedge\vee\Rightarrow}} A^{\kappa}$, so erhielte man - stärker als Satz 16.8:

(*) Für alle C-Aussagen $A_1,\ldots,A_n,A$ gilt $A_1,\ldots,A_n \vdash_{C} A$ genau dann, wenn die Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ $\overline{C}$-allgemeingültig ist.

Die Untersuchungen des § 17 hatten wir dadurch motiviert, daß wir in § 16 den Normalisierungssatz nur für eingeschränkte Systeme von Operatoren beweisen konnten. Diese Motivation würde jetzt wegfallen. Damit würden die Untersuchungen dieses §en jedoch nicht überflüssig. Denn aus Satz 17.7 und dem neuen Resultat (*) würde sich ergeben: Eine konkrete C-Regel $A_1,\ldots,A_n \Rightarrow A$ ist genau dann C-allgemeingültig, wenn sie $\overline{C}$-allgemeingültig ist.

Dieses Resultat wäre bemerkenswert. Denn es würde zeigen, daß es bezüglich der Allgemeingültigkeit von Regeln des formalen Logikkalküls C keinen Unterschied macht, ob man sie über formal entscheidbaren Grundkalkülen oder über dem

============

1) Würde man statt $\overline{RA}$ die Regeln DIL: $p \Rightarrow q; \sim p \Rightarrow q \dot{\Rightarrow} q$ und ECQ, die zusammen mit $\overline{RA}$ gleichwertig sind, als Grundregeln wählen, könnte man schon leicht einen Normalisierungssatz für die volle klassische Logik beweisen. (Vgl. TENNANT 1978, S. 94-98) Da sich aus diesem Beweis jedoch ein Teilformelprinzip nur für die Junktorenlogik und nicht auch für die Quantorenlogik ergibt und wir bei unseren Untersuchungen die mögliche quantorenlogische Verallgemeinerung der Resultate im Auge haben, gehen wir darauf nicht weiter ein.

(sehr viel größeren) Bereich der Kalküle, in denen die symmetrische "reductio ad absurdum" gilt, interpretiert. Es würde sich - jedenfalls für die Junktorenlogik - zeigen, daß die sich häufig findende Charakterisierung der klassischen Logik als Logik über entscheidbaren Bereichen (Stichwort: "Wahrheitsdefinitheit") unnötig stark ist, daß man vielmehr die klassische Logik schwächer deuten kann als Logik, deren Widerlegungsbegriff die symmetrische "reductio ad absurdum" zugrundeliegt.

Zusatz (Mai 1981): Inzwischen hat mir Prof. PRAWITZ einen auf Vorschlägen seines Schülers L. C. PEREIRA basierenden Beweis des Normalisierungssatzes für die volle klassische Quantorenlogik 1. Stufe mitgeteilt. Die Beweisidee ist einfacher als die von TENNANT und beruht wesentlich darauf, permutative Reduktionen auf alle mehrgliedrigen Segmente anzuwenden, die mit Hauptprämissen von Anwendungen von B-Regeln enden, nicht nur auf solche, die maximal sind (vgl. PRAWITZ 1971, S. 253f.). PRAWITZ/MALMNÄS hatten 1968 schon als Resultat benutzt, daß man aus normalen Ableitungen der eingeschränkten klassischen Logik normale Ableitungen der vollen klassischen Logik gewinnen kann ("by an obvious transformation", wie sie sagten [dort S. 222]), gaben jedoch keinen direkten Beweis des Normalisierungssatzes für die volle klassische Logik an.

Literaturverzeichnis

ACKERMANN, W. 1950: Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I. Typenfreies System ohne tertium non datur. In: The Journal of Symbolic Logic 15, 33-57.

BELNAP, N. D. 1962: Tonk, Plonk and Plink. In: Analysis 22 (1961/62), 130-134.

BENDALL, K. 1978: Natural Deduction, Separation, and the Meaning of Logical Operators. In: Journal of Philosophical Logic 7, 245-276.

CARNAP, R. 1934: Logische Syntax der Sprache, Wien. 2. Aufl. Wien/New York 1968.

ders. 1942: Introduction to Semantics, Cambridge Mass. 1942.

CHURCH, A. 1956: Introduction to Mathematical Logic, Princeton.

CURRY, H. B. 1963: Foundations of Mathematical Logic, New York etc.

DUMMETT, M. 1975: The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic. In: H. E. Rose/J. E. Shepherdson (eds.), Logic Colloquium '73. Proceedings of the Logic Colloquium, Bristol, July 1973. Amsterdam etc., 5-40.

ders. 1977: Elements of Intuitionism (with the assistance of R. Minio), Oxford.

FITCH, F. B. 1952: Symbolic Logic. An Introduction, New York.

GENTZEN, G. 1935: Untersuchungen über das logische Schliessen. In: Mathematische Zeitschrift 39, 176-210, 405-431.

ders. 1936: Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. In: Mathematische Annalen 112, 493-565.

GUPTA, H. N. 1979: On a Minimal System of Intuitionistically Acceptable Propositional Calculus. In: F. Bolck (ed.), "Begriffsschrift". Jeanaer Frege-Konferenz (7.-11. Mai 1979), Jena, 142-148.

HASENJAEGER, G. 1962: Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik, Freiburg/München.

HERMES, H. 1959: Zum Inversionsprinzip der operativen Logik. In: A. Heyting (ed.), Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium Held at Amsterdam 1957, Amsterdam, 62-68.

ders./SCHOLZ, H. 1952: Mathematische Logik. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. I 1, 1 , Leipzig.

HEYTING, A. 1930: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. In: Sitzungs-Berichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, Berlin, 42-56.

ders. 1956: Intuitionism. An Introduction. Amsterdam. Zitiert nach der 3. Auflage 1971.

HINST, P. 1974: Logische Propädeutik. Eine Einführung in die deduktive Methode und logische Sprachanalyse, München.

JAŚKOWSKI, S. 1934: On the Rules of Suppositions in Formal Logic. In: Studia Logica 1, 5-32. Nachdr. in S. McCall (ed.), Polish Logic 1920-1939, Oxford 1967, 232-258.

JOHANSSON, I. 1937: Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. In: Compositio Mathematica 4, 119-136.

KAMLAH, W./LORENZEN, P. 1967: Logische Propädeutik oder Vorschule des vernünftigen Redens, Mannheim, 2. Aufl. 1973.

KEMENY, J. G. 1948: Models of Logical Systems. In: The Journal of Symbolic Logic 13, 16-30.

KLEINKNECHT R./WÜST, E. 1976: Lehrbuch der elementaren Logik. Bd. 1: Aussagenlogik, München.

LORENZEN, P. 1955: Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin/Göttingen/Heidelberg. 2. Aufl. 1969.

ders. 1965: Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis, Frankfurt.

McKINSEY, J. C. C. 1939: Proof of the Independence of the Primitive Symbols of Heyting's Calculus of Propositions. In: The Journal of Symbolic Logic 4, 155-158.

NELSON, D. 1949: Constructible Falsity. In: The Journal of Symbolic Logic 14, 16-26.

PÉTER, R. 1959: Rekursivität und Konstruktivität. In: A. Heyting (ed.), Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium Held at Amsterdam 1957, Amsterdam, 226-233.

POPPER, K. R. 1949: The Trivialization of Mathematical Logic. In: E. W. Beth et al. (eds.), Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy (Amsterdam 1948), Amsterdam, 722-727.

POTTINGER, G. 1976: A New Way of Normalizing Intuitionist Propositional Logic. In: Studia Logica 35, 387-408.

PRAWITZ, D. 1965: Natural Deduction. A Proof-theoretical Study, Stockholm/Göteborg/Uppsala.

ders. 1971: Ideas and Results in Proof Theory. In: J. E. Fenstad (ed.), Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposion (Oslo 1970), Amsterdam, 235-308.

ders. 1973: Towards a Foundation of a General Proof Theory. In: P. Suppes et al. (eds.), Logic, Methodology and Philosophy of Science IV, Amsterdam etc., 225-250.

ders. 1974: On the Idea of a General Proof Theory. In: Synthese 27, 63-77.

ders. 1977: Meaning and Proofs: On the Conflict between Classical and Intuitionistic Logic. In: Theoria 43, 2-40.

ders. 1979: Proofs and the Meaning and Completeness of the Logical Constants. In: J. Hintikka et al. (eds.), Essays on Mathematical and Philosophical Logic, Dordrecht, 25-40.

ders./MALMNÄS, P.-E. 1968: A Survey of Some Connections between Classical, Intuitionistic and Minimal Logic. In: H. A. Schmidt et al.(eds.), Contributions to Mathematical Logic. Proceedings of the Logic Colloquium Hannover 1966, Amsterdam, 215-229.

PRIOR, A. N. 1960: The Runabout Inference-ticket. In: Analysis 21 (1960/61), 38-39.

RAUTENBERG, W. 1979: Klassische und nichtklassische Aussagenlogik, Braunschweig/Wiesbaden.

SCHMIDT, H. A. 1960: Mathematische Gesetze der Logik. I. Vorlesungen über Aussagenlogik, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

SCHOLZ, H. 1935: Was ist ein Kalkül und was hat Frege für eine pünktliche Beantwortung dieser Frage geleistet? In: Semester-Berichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule, ed. H. Behnke, 7. Semester, Sommer 1935, 16-47.

ders./HASENJAEGER, G. 1961: Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

SCHRÖTER, K. 1941: Ein allgemeiner Kalkülbegriff. In: Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, Heft 6, Leipzig, repr. Heft 1-8 der "Forschungen" Hildesheim 1970.

SHOESMITH, D. J./SMILEY, T. J. 1978: Multiple-conclusion Logic, Cambridge etc.

SMULLYAN, R. M. 1968: First-Order Logic, Berlin/Heidelberg/New York.

TENNANT, N. 1978: Natural Logic, Edinburgh.

ders. 1980: A Proof-Theoretic Approach to Entailment. In: Journal of Philosophical Logic 9, 185-209.

TROELSTRA, A. S. 1973: Normalization Theorems for Systems of Natural Deduction. In: ders.(ed.),Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis, Berlin/Heidelberg/New York, 275-323.

UMEZAWA, T. 1955: Über die Zwischensysteme der Aussagenlogik. In: Nagoya Mathematical Journal 9, 181-189.

VON KUTSCHERA, F. 1968: Die Vollständigkeit des Operatorensystems $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$ für die intuitionistische Aussagenlogik im Rahmen der Gentzensemantik. In: Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 11, 3-16.

ders. 1969: Ein verallgemeinerter Widerlegungsbegriff für Gentzenkalküle. In: Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 12, 104-118.

WAJSBERG, M. 1938: Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting. In: Wiadomości Matematyczne 46, 45-101.

ZUCKER, J. I./TRAGESSER, R. S. 1978: The Adequacy Problem for Inferential Logic. In: Journal of Philosophical Logic 7, 501-516.