Peter Schroeder-Heister*

Wahrscheinlichkeit

Das Kapitel über Wahrscheinlichkeit ist das mit Abstand längste der *Logik der Forschung*. Zusammen mit den Anhängen II, III und IV, die ebenfalls den Wahrscheinlichkeitsbegriff zum Thema haben, macht es mehr als ein Viertel des Umfangs der ersten Auflage aus. Diese Proportion bleibt erhalten, nimmt man die 20 neuen Anhänge hinzu, die seit der ersten englischen Auflage (1959) hinzugekommen sind. Hier beschäftigen sich insbesondere *II bis *VII, *XIII, *XVI, *XVII und *XX unmittelbar mit der Wahrscheinlichkeit. Mittelbar hängen viele weitere Passagen mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragestellungen zusammen, so die Überlegungen zur Prüfbarkeit und zur Bewährung.[1] Das zeigt, welche Bedeutung Popper dem Wahrscheinlichkeitsbegriff beigemessen hat.

Leider sind Poppers Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit schwer zugänglich, jedenfalls was die Theorie der statistischen Wahrscheinlichkeit angeht, die Hauptthema des Wahrscheinlichkeitskapitels ist. Nicht in erster Linie wegen der erforderlichen mathematischen Vorkenntnisse – diese sind vergleichsweise elementar. Vielmehr hat das Wahrscheinlichkeitskapitel in sehr viel stärkerem Maße als die anderen Kapitel der *Logik*

* Ich danke Emmanuel Haufe und Herbert Keuth für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

1 Bei einer detaillierten Zuordnung von Textpassagen zu Themen kommt man daher sogar zu einem Anteil der Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit in der *Logik* von über 50 % (vgl. Gillies 1995).

(vielleicht mit Ausnahme der – von der Interpretation der statistischen Wahrscheinlichkeit wesentlich abhängigen – Bemerkungen zur Quantenmechanik) einen vorläufigen und unabgeschlossenen Charakter. Das in ihm verfolgte Programm wird aus dem Text der ersten Auflage nicht in nötiger Klarheit deutlich. Erst zusammen mit den in der ersten englischen Auflage hinzugekommenen zahlreichen Fußnoten, dem neuen Anhang *VI und den Überlegungen im Postscript zur *Logik* (1956) kann man sich ein genaues Bild von dem machen, was Popper ‚eigentlich' vorhatte.[2]

Popper wäre sicherlich seinen Lesern entgegengekommen, hätte er das Wahrscheinlichkeitskapitel in *Logik*$_e$ aus der Anfang der fünfziger Jahre gewonnenen Perspektive komplett revidiert und neu formuliert. Dem stand jedoch[3] die Tatsache entgegen, daß Popper zu diesem Zeitpunkt nicht nur die Einsicht gewonnen hatte, wie das Programm der *Logik* zur Behandlung der statistischen Wahrscheinlichkeit im Rahmen einer Häufigkeitstheorie korrekt durchzuführen sei, sondern zugleich die Einsicht, daß der Grundansatz der Häufigkeitstheorie verfehlt und diese durch eine „Propensitäts"-Interpretation zu ersetzen sei. Für die statistische Wahrscheinlichkeit haben wir dementsprechend ab *Logik*$_e$ eine in Fußnoten und Anhängen kommentierte, aber grundsätzlich als überholt angesehene Theorie vorliegen. So stellt sich das Gefühl der *prima facie*-Plausibilität, die die Gedankengänge der anderen Kapitel der *Logik* auf viele unbefangene Leser ausüben, bei der Lektüre des Wahrscheinlichkeitskapitels nicht ein.

2 Wenn wir die erste deutsche Auflage von der ersten englischen Auflage unterscheiden wollen, benutzen wir die Kürzel „*Logik*$_1$" bzw. „*Logik*$_e$", wobei wir für Zitate immer die späteren deutschen Auflagen (ab der 2. Aufl. 1966) heranziehen, aus denen der Text von *Logik*$_1$ und die Zusätze von *Logik*$_e$ ersichtlich sind und deren Paginierung für die hier diskutierten Teile nicht differiert. (Die Seitenangaben zur 11. Aufl. 2005 werden nach einem „/" hinzugefügt, z.B. S. 83/97.) Seitenzahlen ohne Quellenangabe beziehen sich immer auf die *Logik*, „Abschn." bezieht sich auf deren Abschnittsnumerierung. (Die Abschnittsnumerierung blieb auch in der 11. Aufl. erhalten.) Mit „Postscript" ist der Band *Realism and the Aim of Science* (1983, verfaßt 1951–56) gemeint. (Auch die Seitenangaben zur deutschen Ausgabe 2002, *Realismus und das Ziel der Wissenschaft*, werden hinzugefügt.)

3 Abgesehen davon, daß Popper in späteren Auflagen der *Logik* den Text von *Logik*$_1$ als gleichsam klassischen „Urtext" behandelt und alle Zusätze kenntlich macht.

Die sorgfältige Lektüre unter Hinzuziehung der Ergänzungen aus den fünfziger Jahren zeigt jedoch, daß Popper in der *Logik* eine kohärente und eigenständige Theorie der statistischen Wahrscheinlichkeit entwickelt, die durchaus ihre Qualitäten hat und in der Präzision ihrer Durchführung diejenige der späteren Propensitätstheorie übertrifft. Alle bis heute andauernden kontroversen Diskussionen um adäquate Theorien der statistischen Wahrscheinlichkeit (einschließlich der Propensitätstheorien) haben als Hintergrund Häufigkeitstheorien, zu deren Verständnis Popper in der *Logik* einen bedeutenden Beitrag geleistet hat.

Obwohl in *Logik*$_1$ die Theorie der statistischen Wahrscheinlichkeit alle anderen Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit dominiert, sollen auch die wichtigsten anderen in der *Logik* behandelten Gesichtspunkte zumindest erwähnt werden. Es sind dies Poppers Theorie der logischen Wahrscheinlichkeit, seine Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeit sowie seine Bemerkungen zum Verhältnis von subjektiver und objektiver Wahrscheinlichkeit. Die ersten beiden Punkte (logische Wahrscheinlichkeit und Axiomatisierung) sollen dabei am Anfang stehen, während das Thema ‚objektive vs. subjektive Wahrscheinlichkeit‘ nach der Behandlung der statistischen Wahrscheinlichkeit (die den meisten Raum einnimmt) den Abschluß bildet.

9.1 Logische Wahrscheinlichkeit

In Abschn. 34 der *Logik* führt Popper im Zusammenhang mit Überlegungen zur Prüfbarkeit von Hypothesen den Begriff der logischen Wahrscheinlichkeit ein.[4] Hierbei handelt es sich um eine Zuordnung von Wahrscheinlichkeitswerten zu Sätzen, die sich umgekehrt zu deren Falsifizierbarkeitsgraden verhält: ein in höherem Maße falsifizierbarer (und damit empirisch gehaltvollerer) Satz ist logisch unwahrscheinlicher, ein in geringerem Maße falsifizierbarer Satz logisch wahrscheinlicher. Hohen empirischen Gehalt haben logisch unwahrscheinliche Theorien,

4 Er schließt dabei an Keynes an, der von der „logischen Natur“ der Wahrscheinlichkeitslehre spricht (Keynes 1926, S. 2 [engl. Orig. S. 4], vgl. *Logik* Abschn. 34, S. 83n/97n.)

d. h. Theorien, die viel verbieten. Eine weitergehende Definition gibt Popper in *Logik*$_1$ nicht, insbesondere macht er keine Aussage zur numerischen Bestimmung von logischen Wahrscheinlichkeiten konkreter Sätze. Aus der Parallelisierung von Falsifizierbarkeit und logischer Wahrscheinlichkeit ergibt sich, daß die logische Wahrscheinlichkeit den Bereich der Falsifizierbarkeitsklassen (Klassen falsifizierender Basissätze) metrisiert, wobei für die Struktur dieses Bereichs die (eher exemplarischen) Überlegungen Poppers zum Falsifizierbarkeitsgrad (Prüfbarkeitsgrad) heranzuziehen sind. Und natürlich muß angenommen werden, daß die logische Wahrscheinlichkeit die üblichen mathematischen Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsbewertung hat.

Popper greift dabei[5] auch auf den Begriff des logischen Spielraums eines Satzes zurück, den er als die Klasse der von dem Satz erlaubten Basissätze versteht. Die logische Wahrscheinlichkeit ist damit ein direktes Maß für diesen Spielraum. Abgesehen von ihrer Anschaulichkeit erlaubt es nach Popper die Spielraum-Interpretation der logischen Wahrscheinlichkeit, eine Beziehung zwischen logischer und statistischer Wahrscheinlichkeit herzustellen (vgl. Abschn. 72). Die von Popper bevorzugte Interpretation der logischen Wahrscheinlichkeit, die in Abschn. 48 erwähnt wird, bezieht sich jedoch auf ihre zweistellige Variante p(a,b) als Wahrscheinlichkeit von a, gegeben b. Sie stellt wahrscheinlichkeitstheoretisch eine bedingte Wahrscheinlichkeit dar und soll die „logische Nähe“ (Waismann 1930, S. 235) von a und b ausdrücken, d. h. einen Grad des deduktiven Zusammenhangs von a und b. Das entspricht ganz R. Carnaps späterer Idee der bedingten logischen Wahrscheinlichkeit als partieller logischer Implikation[6] und läßt sich gut durch die Spielraumstheorie motivieren. Inwieweit die logischen Spielräume (als Mengen von Zustandsbeschreibungen, wobei diese selbst wieder Klassen voneinander unabhängiger atomarer Sätze sind) auf Basissätze im spezifisch Popperschen Sinne zurückgreifen, ist dabei unabhängig vom formalen Konzept der logischen Wahrscheinlichkeit.

5 Vor allem im Anschluß an Waismann 1930, vgl. *Logik* Abschn. 37, 72; auch Wittgenstein wird erwähnt (LdF, S. 108 n./129n.).
6 Carnap 1950, § 55, S. 297, Carnap/Stegmüller 1959, S. 156f., vgl. Schroeder-Heister 1984a und Vetter 1967.

Kontrovers geblieben zwischen Popper und Carnap (und anderen Vertretern der induktiven Logik) ist vor allem das Verständnis von logischer Wahrscheinlichkeit als ‚induktiver Wahrscheinlichkeit'. Formal gesehen handelt es sich bei der induktiven Wahrscheinlichkeit um eine durch zusätzliche Axiome erweiterte logische Wahrscheinlichkeit, wobei diese zusätzlichen Axiome insbesondere die Idee fassen sollen, daß die Wahrscheinlichkeit, die man einer Hypothese zuschreibt, aufgrund gemachter Erfahrungen steigt. Solche Prinzipien sind z. B. Annahmen über die Uniformität der Welt (vgl. Carnap 1950, 1952). Gegen eine solche induktive Logik hat Popper zahlreiche wahrscheinlichkeitstheoretische Argumente vorgebracht. Dabei hat er unter anderem folgendes betont:

1. Die logische Wahrscheinlichkeit p(a,b) drückt eine Beziehung zwischen Sätzen aus, die durch ihren logisch-semantischen Inhalt gegeben ist und die selbst nicht empirisch prüfbar ist. Sie entspricht in dieser Hinsicht einer deduktiv-logischen Beziehung, ist jedoch insofern allgemeiner, als sich logisch-deduktive Beziehungen als Grenzfälle von logisch-wahrscheinlichkeitstheoretischen Beziehungen deuten lassen. Man könnte sie als *verallgemeinerte Tautologien* bezeichnen. Dieses Verständnis ergibt sich unmittelbar aus der Beziehung der logischen Wahrscheinlichkeit zum Prüfbarkeitsgrad von Theorien, der auf der Beziehung von Sätzen zu ihren Falsifikations*möglichkeiten* beruht und sich somit nicht durch die Art verändert, mit der man Sätze einer Prüfung unterwirft.[7] Entsprechend beschreibt die logische Wahrscheinlichkeit die Prüf*barkeit*, bewertet also nicht Sätze unter dem Gesichtspunkt der unternommenen Prüf*ungen*. Carnaps Verschärfung der logischen Wahrscheinlichkeit zu einem Maß der Bestätigung von Theorien durch empirische Evidenz verfälscht nach Popper die Idee der logischen Wahrscheinlichkeit.

2. Ein adäquates Maß für die Bewertung von Hypothesen oder Theorien im Hinblick auf unternommene Prüfungen ist nicht nur keine *logische* Wahrscheinlichkeit, sondern überhaupt keine Wahrscheinlichkeit. Anders als Carnaps Bestätigungsfunktionen verletzt der Poppersche Bewährungsgrad C(h,e) (‚der Grad

7 Keynes 1926 (S. 191 [engl. Orig. S. 225] und passim) benutzt in diesem Zusammenhang den Ausdruck „apriorische Wahrscheinlichkeit".

der Bewährung der Hypothese h in bezug auf die Evidenz e‘) die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie.[8] Allerdings geht in seine Definition die logische Wahrscheinlichkeit ein.[9]

3. Eine etwaige wahrscheinlichkeitstheoretische Stützung von Theorien, die nach dem vorigen Punkt von Bewährung zu unterscheiden ist, beruht nicht auf einem *nicht-deduktiven* (‚induktiven‘) methodischen Verfahren. Vielmehr läßt sich jede wahrscheinlichkeitstheoretische Stützung einer Theorie h durch die Evidenz e, d. h. eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit von h bei Vorliegen von e [$p(h,e) > p(h)$] einer *deduktiven* Komponente der Beziehung zwischen h und e zuschreiben. Dieses Argument hat Popper gemeinsam mit D. Miller erstmals 1983 entwickelt. Es wird in Anhang *XIX zur *Logik* wiederholt.[10]

9.2 Axiomatik der Wahrscheinlichkeit

Man kann davon ausgehen, daß Carnaps Adäquatheitsbedingungen für die logische Wahrscheinlichkeit[11] auch für Popper gelten, insbesondere die Invarianz gegenüber logischer Äquivalenz sowie das allgemeine Multiplikations- und das spezielle Additionsprinzip:

(Log) $p(a,b) = p(a',b)$, falls a und a' logisch äquivalent
$p(a,b) = p(a,b')$, falls b und b' logisch äquivalent

(Mult) $p(a \wedge b,c) = p(a,c) \cdot p(b,a \wedge c)$
(Add) $p(a \vee b,c) = p(a,c) + p(b,c)$, falls $a \wedge b \wedge c$ nicht erfüllbar

8 Das ist Gegenstand einer mehrjährigen Kontroverse mit Carnap (vgl. Michalos 1971). Die Popperschen Argumente sind teilweise in Anhang *IX der *Logik* wiederabgedruckt und ergänzt worden.

9 Poppers Begriff der ‚Hypothesenwahrscheinlichkeit‘, der an mehreren Stellen der *Logik* auftritt, ist dabei nicht mit der logischen Wahrscheinlichkeit zu verwechseln (wie es der natürliche Sprachgebrauch erwarten ließe), sondern entspricht dem Bewährungsgrad, wie sich aus den jeweiligen Kontexten klar ergibt (z. B. *Logik*, S. 106/126, Abschn. 80–83). Es kann sich also (gerade nach Popper) gar nicht um eine Wahrscheinlichkeit handeln. Popper war sich in *Logik*$_1$ offensichtlich noch nicht darüber im klaren, daß ein Bewährungsgrad keine Wahrscheinlichkeit ist.

10 Vgl. Popper/Miller 1983, 1987. Die (inzwischen recht umfangreiche) Diskussion zu diesem Argument kann hier nicht referiert werden.

11 Carnap 1950, § 53, S. 285, Carnap/Stegmüller 1959, S. 150ff.

Betrachtet man gängige Axiomatisierungen, die diesen Bedingungen genügen, z. B. Carnaps Definition regulärer Bestätigungsfunktionen[12], dann stellt man in der Regel folgendes fest:
(1) Der Begriff der logischen Äquivalenz und damit die deduktive Logik wird vorausgesetzt.
(2) p(a,b) ist nur dann definiert, wenn $p(b) \neq 0$.[13]
Eigenschaft (1) geht damit einher, daß man die Bedingungen (Log) zu Axiomen macht. Eigenschaft (2) ergibt sich daraus, daß man sich an der Definition $p(a,b) = p(a \wedge b)/p(b)$ für einen (einstelligen) Begriff der absoluten Wahrscheinlichkeit p(x) orientiert, was nur für $p(b) \neq 0$ sinnvoll ist.

Beides ist für Popper untragbar. Eigenschaft (1) widerspricht seiner Vorstellung von logischer Wahrscheinlichkeit als verallgemeinerter Form einer logisch-deduktiven Beziehung; denn dazu müßte man sie unabhängig von solchen Beziehungen axiomatisieren.[14] Eigenschaft (2) läuft Poppers Intention entgegen, p(a,b) auch dann sinnvoll verwenden zu können, wenn $p(b) = 0$ ist. Dieser Fall tritt insbesondere dann auf, wenn b ein universelles Naturgesetz ist. Solche Gesetze haben für Popper[15] die absolute logische Wahrscheinlichkeit 0, da sie durch keine endliche Konjunktion von Instanzen verifizierbar sind.[16] Der durchaus sinnvolle wahrscheinlichkeitstheoretische Vergleich zweiter Theorien t_1 und t_2 durch $p(t_2,t_1)$ wäre also genausowenig möglich wie die Bewertung empirischen Tatsachenmaterials e relativ zu einer Theorie t durch p(e,t).[17] Letztere Idee geht z. B. in Poppers Definition des Bewährungsgrads einer Theorie ein.[18]

Entsprechend entwickelt Popper das Programm einer Axiomatik der (bedingten) Wahrscheinlichkeit, für die gilt, daß sie (1) „autonom“, d. h. insbesondere logikunabhängig ist, (2) „sym-

12 Carnap 1950, § 55, Carnap/Stegmüller 1959, S. 155 ff.

13 p(b) steht hier für p(b,T), wobei T eine beliebige Tautologie ist.

14 Vgl. Postscript, S. 292–294/335–338.

15 Jedenfalls in einem unendlichen Universum und sofern sie nicht-tautologisch sind – zur Begründung vgl. Anhang *VII der *Logik*. Diese These ist nicht unbestritten – vgl. Howson 1973 und die Diskussion in Gillies 1995.

16 Dies gilt in ähnlicher Weise auch bei Carnap; vgl. Carnap 1950, § 110, S. 571, Carnap/Stegmüller 1959, S. 228, vgl. Vetter 1967, S. 84–86, und Schroeder-Heister 1984a.

17 Vgl. *Logik* Anhang *IV, S. 272/323.

18 Vgl. *Logik* Anhang *IX.

metrisch“ ist, d. h. mit p(b,a) auch immer p(a,b) als sinnvoll ansieht, und schließlich (3) „formal“ im Sinne beliebiger Interpretierbarkeit ist. Insbesondere darf die logische Deutung, die zu ihrer Motivation diente, nicht die einzig mögliche sein. In den Anhängen *IV und *V zur *Logik* wird dieses Programm tatsächlich durchgeführt[19] einschließlich einer Ableitung der Axiome der Booleschen Algebra (in geeigneter Interpretation), was für Popper den Erweis der Wahrscheinlichkeitslogik als Verallgemeinerung der deduktiven Logik bedeutet.[20]

9.3 Statistische Wahrscheinlichkeit

Das wahrscheinlichkeitstheoretische Hauptthema der *Logik* ist die statistische Wahrscheinlichkeit, d. h. der Wahrscheinlichkeitsbegriff, der (wie etwa der Begriff der Kraft oder der Länge) Bestandteil einer empirischen Hypothese oder Theorie sein kann. Anders als der Begriff der logischen Wahrscheinlichkeit, der ein Begriff der Metasprache von (empirischen) Theorien ist, indem er Sätzen Maßzahlen zuordnet, deren Wert aus *logisch-semantischen* Gründen festgelegt ist, benutzt die Prüfung statistischer Hypothesen *statistische* Methoden, daher der Terminus. Popper selbst spricht in der *Logik* von „Ereigniswahrscheinlichkeit“ (LdF, S. 106/126). Später (z. B. im Postscript) bezeichnet er mit „statistischer Wahrscheinlichkeit“ die Häufigkeitskonzeption der Wahrscheinlichkeit, wie er sie in der *Logik* vertreten

19 Vorher hatte Popper 1955 sowie in Anhang *II der *Logik*, der eine Arbeit von 1938 wieder abdruckt, schon eine Theorie der absoluten Wahrscheinlichkeit mit entsprechenden Eigenschaften entwickelt. Vgl. LdF, S. 268 n/318n sowie Leblanc 1982. Bemerkenswert ist dabei auch, daß die ersten Ansätze von 1938 in Unkenntnis der Axiomatisierung von Kolmogorow 1933 entworfen worden waren (vgl. LdF, S. 259/309) und von Popper später auch als Konkurrenz dazu verstanden werden.
20 Eine zusammenfassende Darstellung gibt Leblanc 1989. Von H. Field, W. H. Harper und H. Leblanc ist auf der Basis von Poppers Arbeiten eine „probabilistische Semantik“ als eine Alternative zur Tarskischen modelltheoretischen Semantik entwickelt worden, in der der Wahrscheinlichkeitsbegriff (in einer an Popper anschließenden Axiomatisierung) anstelle des Wahrheitsbegriffs zur Grundlage der Semantik der deduktiven Logik gemacht wird (vgl. ebd. S. 358ff., sowie Leblanc 2001). Die technische Möglichkeit dieser Interpretation gesteht Popper zu, bezeichnet sie jedoch als nichtintendiert (vgl. Popper/Miller 1994).

hatte, im Unterschied zur Propensitätsdeutung. Wir verwenden die heute übliche Terminologie, nach der man von Häufigkeitsdeutung und Propensitätsdeutung der statistischen Wahrscheinlichkeit redet.

Das Wahrscheinlichkeitskapitel der *Logik* gliedert sich in zwei Hauptteile: Nach allgemeinen Vorbemerkungen (bis Abschn. 48) wird in Abschn. 49–64 eine Version der Häufigkeitstheorie der statistischen Wahrscheinlichkeit entwickelt, die von vorliegenden Theorien in wesentlichen Punkten abweicht. Dieser Teil ist eher logisch-mathematischer Natur. In Abschn. 65–68 wird dann das wissenschaftstheoretische Problem der empirischen Anwendung von Wahrscheinlichkeitssätzen, insbesondere das der Prüfung statistischer Hypothesen behandelt, gefolgt von diversen Überlegungen zu Einzelfragen (Abschn. 69–72). Entsprechend sieht Popper zwei „Aufgaben": „(1) Neubegründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung" und „(2) Aufklärung der Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeit und Erfahrung" (LdF, S. 106/126). Die Argumentationen in beiden Teilen sind keinesfalls unabhängig voneinander. Die Argumentation im ersten Teil ist wesentlich von den erkenntnistheoretischen Punkten des zweiten Teils mitbestimmt, wie natürlich umgekehrt die erkenntnistheoretische Problematik der statistischen Wahrscheinlichkeit auf dem im ersten Teil entwickelten Begriff von Wahrscheinlichkeit aufbaut. Wie schon erwähnt, müssen die Anhänge der *Logik*, die späteren Fußnoten und das Postscript mit herangezogen werden.

Das philosophische Problem, das Popper im Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung (wie man die Wahrscheinlichkeitstheorie damals meistens nannte) sieht, besteht darin, daß es in ihr einerseits um zufällige Ereignisse geht, d. h. Ereignisse, die prinzipiell nicht prognostizierbar sind, auf die man andererseits jedoch einen Formalismus anwenden kann, der mathematische Gesetze beinhaltet. Popper versteht seinen Vorschlag zur begrifflichen Fassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als einen Ansatz zur Lösung dieses „Grundproblems der Zufallstheorie" (Abschn. 49), dem in den existierenden Ansätzen nicht hinreichend Rechnung getragen sei,[21] auch nicht bei von Mises, an

21 Auch seine spätere Wendung zur Propensitäts-Interpretation begründet er unter anderem als Lösung dieses „Grundproblems" (Postscript, S. 372).

den er grundsätzlich anschließt. Grob gesprochen wirft er von Mises vor, mit der Annahme eines „Grenzwertaxioms" die Gesetzmäßigkeit in der Regellosigkeit (Zufälligkeit) definitorisch festzusetzen anstatt sie zu begründen. Entsprechend schlägt Popper ein modifiziertes Verständnis von Regellosigkeit vor, aus dem sich Gesetzmäßigkeit begründen läßt.

9.3.1 Die von Misessche Häufigkeitstheorie

Richard von Mises[22] formulierte 1919 eine Begründung der Theorie der statistischen Wahrscheinlichkeit, die als „Häufigkeitsdeutung" bekannt geworden ist. Weitere Verbreitung erfuhr sie durch seine Vorlesungen „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit" (1928), einem Meisterwerk der populären Darstellung mathematischer Theorie. An diesem Ansatz hielt von Mises auch nach Kolmogorows (1933) Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs fest, der auf einen Einbau der Wahrscheinlichkeitstheorie in die durch Borel (1909) begründete Maßtheorie hinauslief. Grund dafür war unter anderem die Tatsache, daß er die Wahrscheinlichkeitstheorie nicht bloß als mathematischen Formalismus auffassen wollte, sondern als anwendungsbezogene Theorie.[23]

Von Mises' grundlegende Idee, der Popper in der *Logik* uneingeschränkt folgt, besteht darin, Wahrscheinlichkeit nicht als Eigenschaft von Einzelereignissen, sondern von „Massenerscheinungen oder Wiederholungsvorgängen" (1928, S. 11) aufzufassen. Beispiele sind die Eigenschaft, eine bestimmte Zahl zu würfeln (bei einer unbegrenzten Anzahl von Würfelwürfen), oder die Eigenschaft, in einem bestimmten Lebensjahr zu sterben (in bezug auf eine als unbegrenzt angenommene Menge von Individuen) oder gewisse Parameter bewegter Moleküle (in bezug auf eine indefinite Menge von Molekülen). Die Rede von der Wahrscheinlichkeit eines Einzelereignisses ist danach nur als abkürzende Rede über die Massenerscheinung oder den Wiederholungsvorgang sinnvoll, als dessen Bestandteil das Einzel-

22 Für Biographisches und Bibliographisches zu von Mises vgl. Schroeder-Heister 1984b.
23 Vgl. von Mises 1936, S. 126f.

ereignis aufgefaßt wird.[24] Die Massenerscheinung oder den Wiederholungsvorgang, dessen Einzelergebnis nicht vorhersagbar ist, nennt von Mises im Anschluß an eine durch G. T. Fechner geprägte Tradition auch „Kollektiv“[25].

Mathematisch kann man sich auf die Betrachtung unendlicher Ergebnis*folgen* beschränken, da man sich die Einzeleigenschaften von Individuen in einer Masse als Resultate einer (als unbegrenzt fortsetzbar angenommenen) Folge von Beobachtungen vorstellen kann. Für viele Überlegungen ist es dabei ausreichend, sich auf das Vorliegen bzw. Nichtvorliegen eines einzigen Merkmals zu beschränken und damit auf Folgen, die nur aus Nullen und Einsen bestehen (man mag dabei an Folgen von Münzwürfen denken, die nur zwei Ergebnisse haben können). Eine zufällige 0-1-Folge ist ein *Alternativ* (als Spezialfall von Kollektiv). Im folgenden beschränken wir uns durchweg auf Alternative.[26] Eine 0-1-Folge wie z. B.

01010101010…,

die man nicht als Folge von Resultaten eines *zufälligen* Wiederholungsvorgangs ansehen kann, ist demnach kein Alternativ. Vielmehr muß ein Alternativ nach von Mises zwei Bedingungen genügen, der Forderung der „Existenz der Grenzwerte“ und der Forderung der „Regellosigkeit der Zuordnung“ (1919, S. 55, 57). Popper folgend sprechen wir von „Grenzwertaxiom“ und „Regellosigkeitsaxiom“.[27]

Das *Grenzwertaxiom* besagt, daß ein Alternativ einen Grenzwert der relativen Häufigkeit der Eins (‚Häufigkeitsgrenzwert‘) besitzen muß.[28] Die relative Häufigkeit der Eins unter den ersten n Gliedern der Folge ist dabei m/n, wobei m die Anzahl der

24 Popper spricht in diesem Zusammenhang von „formalistischen“ Wahrscheinlichkeitsaussagen, die wie Aussagen über Einzelereignisse aussehen, aber implizit auf eine Bezugsklasse verweisen, der das entsprechende Ereignis entnommen ist (Abschn. 71).

25 Einen detaillierten Überblick über die Entwicklung vom „Kollektivbegriff“ bei G. Rümelin über die Fechnersche „Kollektivmaßlehre“ zur Häufigkeitstheorie von Mises’ gibt Heidelberger 1993 (Kap. 7).

26 Wie Popper benutzen wir „Alternative“ und „Kollektive“ als Pluralformen, von Mises benutzt „Alternativs“ und „Kollektivs“.

27 Popper schließt damit an die in der Literatur übliche Terminologie an, von Mises benutzt den mißverständlichen Terminus „Axiom“ nicht.

28 Damit besitzt sie natürlich auch einen Häufigkeitsgrenzwert für die 0. Wir setzen im folgenden immer voraus, daß die 1 der ausgezeichnete Wert ist.

Einser unter den n Gliedern ist. Die Existenz eines Häufigkeitsgrenzwerts ist nicht für jede 0-1-Folge erfüllt: Da relative Häufigkeiten zwischen 0 und 1 liegen, die Folge also beschränkt ist, wissen wir zwar, daß sie Häufungspunkte besitzt;[29] es muß jedoch keineswegs nur einen einzigen solchen Häufungspunkt geben. Das Grenzwertaxiom postuliert also deren Eindeutigkeit.

Das *Regellosigkeitsaxiom* besagt, daß der Häufigkeitsgrenzwert invariant gegenüber willkürlichen Auswahlen von Teilfolgen aus der ursprünglichen Folge ist. Zum Beispiel hat die Folge 01010101… den Häufigkeitsgrenzwert 1/2, die Teilfolge, die man erhält, wenn man aus dieser Folge alle Glieder mit ungerader Stellenzahl auswählt (d. h. 1. Glied, 3. Glied, 5. Glied, …) den Häufigkeitsgrenzwert 0, und die Teilfolge, die man erhält, wenn aus ihr alle Glieder mit gerader Stellenzahl auswählt, den Häufigkeitsgrenzwert 1. Die gegebene Folge ist demnach (wie zu erwarten ist) kein Alternativ. Die Idee der Regellosigkeit wird also dadurch ausgedrückt, daß der Häufigkeitsgrenzwert nicht verändert werden kann, indem man auf bestimmte (aber natürlich unendlich viele) Elemente der Ausgangsfolge ‚setzt' und dadurch eine (unendliche) Teilfolge herstellt. Von Mises formuliert das auch als „Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem" (1928, S. 26): Jede systematische Auswahl von Stellen der Folge führt zum selben Häufigkeitsgrenzwert. Im Beispiel des Roulettes: Auf lange Sicht macht es keinen Unterschied, ob man ohne Unterbrechung oder nur bei ausgewählten Spielen (etwa in Abhängigkeit von vorhergehenden Ergebnissen) auf eine bestimmte Zahl setzt: Der Häufigkeitsgrenzwert des Auftretens dieser Zahl bleibt gleich (1/37 beim idealen Roulette).

Offenbar sind die beiden Axiome nicht unabhängig voneinander. Das Regellosigkeitsaxiom baut auf dem Grenzwertaxiom auf, insofern es fordert, daß zu einer Folge *mit Häufigkeitsgrenzwert* auch geeignet gewählte Teilfolgen einen Häufigkeitsgrenzwert haben, und zwar denselben. Es ist also nicht so, daß erst einmal regellose Folgen definiert und aus diesen dann diejenigen mit Häufigkeitsgrenzwert bestimmt werden könnten. Vielmehr ist Regellosigkeit eine nähere Spezifikation einer Folge mit Häufigkeitsgrenzwert.

29 Nach dem Satz von Bolzano/Weierstraß, vgl. LdF, S. 140 f./168.

Der Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestaltet sich bei von Mises jetzt so, daß Häufigkeitsgrenzwerte von Alternativen (oder allgemeiner Kollektiven) als Wahrscheinlichkeiten verstanden werden. Durch gewisse Umformungsoperationen auf Kollektiven lassen sich dann neue Kollektive mit neuen Wahrscheinlichkeiten gewinnen. Die „ausschließliche Aufgabe" der Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht darin, „aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten innerhalb gewisser Ausgangskollektive die Wahrscheinlichkeiten innerhalb eines aus jenen abgeleiteten Kollektivs zu berechnen".[30] Die genauere Durchführung dieser Theorie ist für unsere Zwecke unwesentlich (vgl. von Mises 1931, 1964).

Zahlreiche Autoren, die im Prinzip der von Misesschen Theorie zustimmten, haben Anstoß am Regellosigkeitsaxiom genommen. Anders als das Grenzwertaxiom ist es nicht mathematisch präzise formuliert, da nicht festgelegt ist, welche möglichen Auswahlen von Teilfolgen in Betracht gezogen werden sollen. Die Formulierung vom ausgeschlossenen Spielsystem legt nahe, nur ‚systematische' oder ‚gesetzmäßige' Auswahlen zuzulassen, aber was ‚systematisch' oder ‚gesetzmäßig' hier heißen könnte, war bis in die dreißiger Jahre hinein nicht klar. Damit stand auch noch für Popper die Frage im Raum, ob es überhaupt Kollektive (oder Alternative) gebe, d. h., ob die von Misesschen Axiome widerspruchsfrei seien. Diese Frage wurde insbesondere von E. Kamke 1932 und 1933 gestellt, worauf sich Popper bezieht (LdF, S. 127/152).[31]

30 Von Mises 1928, S. 31; vgl. 1919, S. 59.

31 Vgl. Martin-Löf 1969 für eine Geschichte der von Misesschen Theorie bis zum Vorschlag von Church 1940, im Regellosigkeitsaxiom nur effektiv berechenbare Auswahlen zuzulassen und so den Begriff des Spiel*systems* zu präzisieren, und bis zur Arbeit von Ville 1939 (angekündigt in Ville 1936), die das ursprüngliche von Misessche Programm erschütterte. Ville konstruierte Kollektive, die Häufigkeitsgrenzwerte nur von oben approximieren, also nicht der intuitiven Idee zufälliger Oszillationen um den Häufigkeitsgrenzwert herum entsprechen. Bei von Lambalgen 1987 findet sich eine ausgezeichnete Darstellung der Versuche, den Begriff der Zufallsfolge zu definieren, unter Einschluß neuerer Ansätze; von Lambalgen 1990 unternimmt eine Axiomatisierung der von Misesschen Theorie auf logischer Grundlage.

9.3.2 Poppers Kritik am Grenzwertaxiom

Popper übernimmt den von Misesschen Grundansatz, Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten von Merkmalen in unendlichen Zufallsfolgen zu verstehen. Ebenso wie die zeitgenössische Diskussion sieht er die Problematik des Regellosigkeitsaxioms. Für „nicht viel weniger bedenklich" hält er jedoch das Grenzwertaxiom, das in der mathematischen Diskussion der von Misesschen Theorie eher unkontrovers ist, weil es auf dem mathematisch präzisen Begriff des Grenzwerts beruht. Während er die Verbesserung des Regellosigkeitsaxioms als „eine mehr mathematische Angelegenheit" ansieht, fordert Popper die „Ausschaltung des Grenzwertaxioms" aus „einem erkenntnistheoretischen Bedürfnis" heraus (alles Abschn. 51).

An der Stelle, an der er dies formuliert (S. 113/135), gibt er kein solches erkenntnistheoretisches Argument an, sondern verweist auf eine im Wiener Kreis geäußerte These (Waismann 1930), der Grenzwert einer Folge sei eine Eigenschaft ihres Bildungsgesetzes. Daher könne man nicht vom Grenzwert einer regellosen Folge (d. h. einer Folge ohne Bildungsgesetz) sprechen. Dieses Argument ist recht schwach, macht es doch Anleihen bei einem mathematischen Konstruktivismus, der im Gegensatz steht zur eigenen Unbedenklichkeit, mit der die klassische (nichtkonstruktive) Mathematik benutzt wird.

Am Schluß von Abschn. 66, auf dessen erkenntnistheoretische Diskussion Popper in Abschn. 51 verweist, findet sich dann allerdings folgendes Argument: Das Grenzwertaxiom ist ein nichtfalsifizierbarer Allsatz. Daß die Folge α einen Häufigkeitsgrenzwert hat, bedeutet ja: Es gibt einen Wert p derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl n angegeben werden kann derart, daß die relative Häufigkeit ab dem n-ten Glied der Folge von p einen Abstand $< \varepsilon$ hat. Für empirische Folgen kann n als Funktion von ε nicht angegeben werden, da man relative Häufigkeiten für beliebig große n prüfen müßte, was nicht möglich ist.[32] Demnach ist die Annahme der Existenz eines Häufigkeitsgrenzwerts einer empirischen Folge ein metaphysischer Satz. Genau einen solchen Satz müssen wir jedoch als Hypothese aufstellen, wenn wir annehmen, eine empirisch gegebene Folge sei ein Kollektiv

32 Meine Rekonstruktion von Poppers Argument basiert auf Fn. 2 zu S. 148/177.

im Sinne von von Mises. Der Ausweg, es handele sich um einen *sinnvollen* metaphysischen Satz – eine Möglichkeit, die bei Popper aufgrund seiner Unterscheidung zwischen Sinnkriterium und Abgrenzungskriterium grundsätzlich besteht –, bietet sich im vorliegenden Fall nicht an (S. 149f./178f.).

Poppers Kritik am Grenzwertaxiom besteht also darin, daß
(1) für mathematische Folgen, unter denen Popper Folgen mit Bildungsgesetz versteht (Abschn. 57, S. 124/148), der Begriff des Häufigkeitsgrenzwerts zwar sinnvoll ist, diese Folgen aber dann nicht regellos im von Misesschen Sinne sind,
(2) für empirische Folgen die Annahme der Existenz eines Grenzwerts metaphysisch ist.

9.3.3 Poppers Gegenvorschlag: Regellosigkeit von Anfang an

Poppers Lösung des Problems des Grenzwertaxioms besteht darin, den von Misesschen allgemeinen Regellosigkeitsbegriff einzuschränken und nur solche Folgen zu betrachten, die diesem eingeschränkten Begriff genügen. Diese Folgen nennt er „zufallsartig". Damit erledigt sich Poppers erster Kritikpunkt: Es ist jetzt möglich, überhaupt von Grenzwerten zu reden, da die betrachteten zufallsartigen Folgen nicht regellos in einem absoluten Sinne sind (vgl. S. 124f./148f., 129f./155). Ferner vermutet Popper, daß man von zufallsartigen Folgen deduktiv *zeigen* kann, daß sie Häufigkeitsgrenzwerte besitzen (Abschn. 63, S. 138/165f.). Wenn diese Vermutung richtig ist, dann verschwindet auch Poppers zweiter Kritikpunkt: Da zufallsartige Folgen *per se* Häufigkeitsgrenzwerte *haben*, muß man im Fall empirischer Anwendung auch nicht mehr *annehmen*, daß Häufigkeitsgrenzwerte existieren. Schließlich löst sich für Popper das Problem der Widerspruchsfreiheit des Häufigkeitsansatzes, da Beispiele regelloser Folgen im eingeschränkten Sinn konstruiert werden können (Abschn. 58).

Die Idee, die Existenz von Häufigkeitsgrenzwerten aus der Annahme der Zufallsartigkeit zu deduzieren, ist konzeptionell nur sinnvoll, wenn die Eigenschaft der Zufallsartigkeit unabhängig vom Problem der Existenz von Häufigkeitsgrenzwerten formuliert werden kann. Die Abschwächung der Regellosigkeitsforderung bedeutet für Popper also nicht einfach, daß die Invarianz von Häufigkeitsgrenzwerten gegenüber systematischen Auswahlen von Teilfolgen nur in bezug auf eine *beschränkte* Klasse von Auswahlen gefordert wird, sondern daß eine Bedingung angegeben wird, die Zufallsartigkeit ganz ohne Grenzwertbegriff definiert. Das unterscheidet Poppers Ansatz, der allerdings erst in *Logik*$_e$ konsequent durchgeführt wird, grundsätzlich von anderen zeitgenössischen Ansätzen, die (teilweise sehr ähnlich wie Popper) die zugelassenen Auswahlregeln einschränken, jedoch die Idee der Regellosigkeit als Invarianz von Häufigkeitsgrenzwerten gegenüber Auswahlen von Teilfolgen beibehalten.[33]

Ferner muß verlangt werden, daß der (unabhängig definierte) Begriff der Zufallsartigkeit einer Folge der empirischen Prüfung zugänglich ist. Hierzu gehört die Annahme, daß die Zufallsartigkeit schon durch Betrachtung von endlich vielen Gliedern der Folge beurteilt werden kann. Daher ist es nur folgerichtig, daß Popper Zufallsartigkeit zunächst für endliche Folgen definiert und diesen Begriff dann für unendliche Folgen verallgemeinert.

Für endliche 0-1-Folgen (behandelt in Abschn. 52–56) stellt sich kein Grenzwertproblem. Hier definiert Popper einen Begriff von *n-Nachwirkungsfreiheit*. Danach ist eine Folge n-nachwirkungsfrei, wenn die relative Häufigkeit der Eins invariant ist gegenüber Auswahlen von Teilfolgen, die Glieder in Abhängigkeit von den n unmittelbar vorangehenden Werten der Ausgangsfolge auswählen (in der Terminologie der Glücksspiele: die auf Werte ‚setzen', gegeben eine bestimmte Ergebnisfolge bei n unmittelbar vorangehenden Spielen). Offenbar ist wegen der Endlichkeit der Folge die Eigenschaft der n-Nachwirkungsfreiheit[34] entscheidbar. Umgekehrt lassen sich n-nachwirkungsfreie endliche Folgen konstruieren. In Anhang IV zur *Logik* gibt Popper ein solches Konstruktionsverfahren für den Fall der Gleichverteilung an. Die erzeugende „Periode" einer so konstruierten „kürzesten" n-nachwirkungsfreien Folge hat die Länge 2^{n+1}. Auf diese Weise erhält Popper ein Maß für den Grad der Zufälligkeit *endlicher* 0-1-Folgen α mit Gleichverteilung (das sich auf belie-

33 Zu solchen Ansätzen vgl. Martin-Löf 1969.

34 Welche m-Nachwirkungsfreiheit für jedes m < n impliziert.

bige Verteilungen verallgemeinern läßt): das größte n, so daß α mindestens die Länge 2^{n+1} hat und n-nachwirkungsfrei ist.[35]

Der Übergang zu unendlichen Folgen (behandelt in Abschn. 57–64) ergibt sich dann in *Logik*$_e$ wie folgt: Eine zufallsartige 0-1-Folge α mit Wahrscheinlichkeit p ist eine Folge, deren Anfangsabschnitte kürzeste endliche zufallsartige Folgen mit Häufigkeit p sind, also n-nachwirkungsfrei für größtmögliches n sind. Die Idee ist also, daß sich die Zufallsartigkeit mit Wahrscheinlichkeit p schon *von Anfang an* manifestiert. Die Folge soll *in allen ihren Anfangsabschnitten* maximalen Zufälligkeitsgrad haben, was bedeutet, daß der Grad der Nachwirkungsfreiheit mit der Länge der Anfangsabschnitte wächst. Popper spricht bei den Folgen mit dieser Eigenschaft von einem „Idealtypus regelloser Alternative“ (Anhang *VI, S. 311/368). Daß solche Folgen α mit Wahrscheinlichkeit p dann auch p als Häufigkeitsgrenzwert haben, ist nahezu trivial, da die relativen Häufigkeiten der Anfangsabschnitte festliegen. Poppers Rede vom „Idealtypus“, d. h. von etwas, das empirisch nur *näherungsweise* realisiert sein muß, ist dabei sehr ernst zu nehmen, da die Fixierung aller Anfangsstücke auf maximale Regellosigkeit eine drastische Einschränkung der Regellosigkeit bedeutet, die über alles hinausgeht, was in der Debatte um das Regellosigkeitsaxiom jeweils vorgeschlagen wurde.[36]

Popper definiert wie zuvor von Mises die Zufallsartigkeit (Regellosigkeit) relativ zu einem Wert p, der dann als Wahrscheinlichkeitswert verstanden wird. Nur wird von diesem Wert p nicht *vorausgesetzt*, daß er ein Häufigkeitsgrenzwert ist und

35 Miller 1994 (S. 180) liest Poppers Definition als erstmaligen Versuch, einen Grad der Zufälligkeit *endlicher* Folgen zu definieren, eine Idee, die in neuerer Zeit auf gänzlich anderem Hintergrund im Rahmen der algorithmischen Komplexitätstheorie äußerst erfolgreich verfolgt wird (vgl. Li/Vitányi 1993). Bei Popper findet sich zwar keine direkte Formulierung, wonach der maximale Grad der n-Nachwirkungsfreiheit als Komplexitätsmaß aufzufassen ist, die Interpretation Millers ist jedoch plausibel.

36 Verwandte Konstruktionen von Folgen, die regellos erscheinen, finden sich auch bei Copeland 1928, von Mises 1933 und bei Good 1946, worauf Popper später selbst hinweist (Postscript, S. 363f./417; Autobiographie, Anm. 150). Von Mises hat es dabei immer strikt abgelehnt, „durch eine Rechenvorschrift darstellbare Folgen“ als Kandidaten ‚genuiner‘ Zufallsfolgen anzusehen (vgl. von Mises 1936, S. 117).

daß Stellenauswahlen zum selben Häufigkeitsgrenzwert p führen, sondern von p wird nur eine Eigenschaft verlangt, die von (allen) endlichen Anfangsabschnitten gilt und somit falsifizierbar ist. Das heißt, Popper gibt für unendliche Folgen eine Definition von ‚regellos mit Wahrscheinlichkeit p' als Extrapolation des für endliche Folgen definierten Begriffs ‚regellos mit relativer Häufigkeit p'.

In *Logik*$_1$ sieht Popper den in *Logik*$_e$ beschrittenen Weg noch nicht. Obwohl er in *Logik*$_1$ schon den Zufälligkeitsgrad für endliche Folgen über den Begriff der n-Nachwirkungsfreiheit definiert hat, nutzt er ihn nicht weiter aus bei der Definition von zufallsartigen unendlichen Folgen durch Betrachtung der endlichen Anfangsabschnitte. Vielmehr definiert er Zufallsartigkeit als Invarianz des Häufigkeitsgrenzwerts gegenüber Aussonderungen nach beliebigen n-Tupeln (Abschn. 59). Das heißt, er benutzt einen Begriff der Nachwirkungsfreiheit für *unendliche* Folgen, der den Begriff des Häufigkeitsgrenzwerts voraussetzt. Das entspricht noch ganz dem Vorgehen von H. Reichenbach, von dem der Begriff der Nachwirkungsfreiheit für unendliche Folgen stammt.[37] Die Beziehung zwischen dem Begriff der n-Nachwirkungsfreiheit für endliche Folgen und der Betrachtung von Anfangsabschnitten unendlicher Folgen hat Popper erst später gesehen. Entsprechend gelingt es Popper in *Logik*$_1$ auch nicht eigentlich, auf das Grenzwertaxiom zu verzichten. An seine Stelle setzt er die mathematisch gleichwertige Forderung der Eindeutigkeit der Grenzwerte (Abschn. 64), von der er zugibt, daß sie nicht falsifizierbar ist, aber doch nützlich sein soll in einem Sinne, in dem es die Grenzwertannahme nicht ist. Die diesbezüglichen Erläuterungen in Abschn. 64 sind schwer nachzuvollziehen.[38]

37 Reichenbach 1932, S. 600 und 1935, § 28. Poppers Abgrenzung, im Gegensatz zu Reichenbach biete er einen induktiven Begriff (n-nachwirkungsfrei für jedes n, vgl. LdF, S. 134/161, Fußn. 2) wirkt schwach.

38 Poppers Überlegungen in *Logik*$_1$ zur Regellosigkeit unendlicher Folgen sind in die mathematische Diskussion der von Misesschen Theorie eingegangen. Hierzu gehören neben den erwähnten Arbeiten von Reichenbach und Copeland vor allem Wald 1937. (Wald ist durch einen Vortrag Poppers im mathematischen Kolloquium K. Mengers zur Entwicklung seiner Theorie motiviert worden, vgl. Autobiographie, Abschn. 20.)

Poppers Alternative zum von Misesschen Ansatz besteht in *Logik*$_e$ also darin,
(1) Regellosigkeitsgrade für endliche Folgen zu definieren,
(2) ideale Modelle zufallsartiger unendlicher Folgen zu konstruieren, deren endliche Anfangsabschnitte maximal regellos im Sinne von (1) sind und
(3) deren Häufigkeitskonvergenz aus ihrer Definition folgt.
Erkauft wird diese Alternative mit einer starken Einschränkung der Idee der Regellosigkeit.

9.3.4 Die Überprüfung von Wahrscheinlichkeitshypothesen

Wie wir gesehen haben, hängt das erkenntnistheoretische Problem der empirischen Prüfung von Wahrscheinlichkeitsaussagen für Popper eng mit dem Problem der Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammen. Die Kritik am von Misesschen Grenzwertaxiom und die entsprechende Neufassung des Regellosigkeitsaxioms verfolgt das Ziel, eine Regellosigkeitsannahme durch Beobachtung einer empirisch gegebenen Folge prüfen zu können. In Abschn. 65–68 geht es darüber hinaus um das Problem, Annahmen über bestimmte Wahrscheinlichkeitswerte, d. h. *Wahrscheinlichkeitshypothesen* zu prüfen. Popper nennt es „Entscheidbarkeitsproblem“. Die Überlegungen beziehen sich auf die Position von *Logik*$_1$, gelten aber in zentralen Punkten auch für *Logik*$_e$.

Das Ausgangsproblem ist die Feststellung, daß Wahrscheinlichkeitshypothesen nicht falsifizierbar sind. „… die Wahrscheinlichkeitshypothese verbietet nichts Beobachtbares, der Wahrscheinlichkeitsansatz kann mit keinem Basissatz, also auch mit keiner Konjunktion von endlich vielen Basissätzen (mit keiner endlichen Beobachtungsfolge) in logischem Widerspruch stehen …“ (Abschn. 65, S. 144 f./173f.). Jede *beliebige* endliche Folge kann Anfangsabschnitt[39] einer zufallsartigen unendlichen Folge mit *beliebigem* Häufigkeitsgrenzwert sein.[40] Und da man nur end-

39 Oder auch ein beliebiger Zwischenabschnitt.

40 Es ist kontrovers, ob auch jede *unendliche* Folge (z. B. 11111 …) mit jedem Häufigkeitsgrenzwert (z. B. 1/2) verträglich sein sollte. Dieses Argument wurde

lich viele Beobachtungen durchführen kann, ist *jede* Wahrscheinlichkeitshypothese mit *jeder* Beobachtungsfolge logisch verträglich. Das gilt nicht nur für den von Misesschen Begriff der Zufallsfolge, sondern gleichermaßen für den Begriff der Zufallsfolge in *Logik*$_1$. Das Bestehen von n-Nachwirkungsfreiheit für alle n für einen Häufigkeitsgrenzwert p ist mit *beliebigen* Anfangsabschnitten logisch verträglich. Popper drückt das auch so aus, daß er die Dimension einer Wahrscheinlichkeitshypothese als (abzählbar) unendlich ansieht. Das heißt, man würde eine unendliche Konjunktion von Basissätzen benötigen, um sie zu widerlegen. Da die Dimension einer Hypothese umgekehrt proportional zu ihrem empirischen Gehalt ist, würde dies bedeuten, daß Wahrscheinlichkeitshypothesen keinen empirischen Gehalt besitzen.

Dem steht die Praxis der empirischen Wissenschaften, insbesondere der Physik entgegen, bestimmte Beobachtungen als Falsifikation von Wahrscheinlichkeitshypothesen zuzulassen. Diese praktische Falsifikation beruht auf der *Vernachlässigung des Unwahrscheinlichen*. Obwohl das Auftreten einer bestimmten endlichen Anfangsfolge mit jeder Wahrscheinlichkeitshypothese logisch verträglich ist, ist dies im Lichte mancher Hypothese so *unwahrscheinlich*, daß man diese Hypothese durch die Anfangsfolge als falsifiziert ansieht. Offensichtlich ist die Festlegung dessen, was man für zu unwahrscheinlich halten soll, ein methodologischer Beschluß. Popper fragt nun, wie dieser sich rechtfertigen läßt, insbesondere ob und wie sich eine Grenze (in Form eines Wahrscheinlichkeitswerts) festlegen läßt, bei der Unwahrscheinlichkeit beginnt (S. 146/174).

Für die Position von *Logik*$_e$ stellt sich das Problem wie folgt: Hier ist zwar der Begriff der Zufallsartigkeit unendlicher Folgen eine falsifizierbare Eigenschaft, aber in einer solchen Art, daß empirische Folgen ihn *zu leicht* verfehlen. Zum Beispiel ist die viergliedrige endliche 0-1-Folge
0000

schon von Fréchet 1938 (S. 26f.) gegen die Häufigkeitstheorie vorgebracht und von Wald 1938 (S. 92 f.) und von Mises 1938 (S. 61 f.) diskutiert und zurückgewiesen. Auch Stegmüller 1973 (S. 34–39, 222) benutzt es als entscheidendes Argument gegen die Häufigkeitstheorie. Eine Bewertung dieses Arguments müßte das Verhältnis zwischen maßtheoretischer und häufigkeitstheoretischer Auffassung von Wahrscheinlichkeit diskutieren, was hier nicht geleistet werden kann. Für von Mises' Position hierzu vgl. von Mises 1964, S. 43–49.

nicht 2-nachwirkungsfrei in bezug auf die angenommene Wahrscheinlichkeit 1/2, würde also eine entsprechende Wahrscheinlichkeitshypothese für eine unendliche Folge mit dieser endlichen Folge als Anfangsabschnitt falsifizieren, da die unendliche Folge nicht *von Anfang an* maximal regellos wäre. Das ist unplausibel: Man würde viermal Wappen am Beginn einer unbegrenzten Folge von Würfen mit einer Münze noch tolerieren, ohne sogleich die Münze für asymmetrisch zu halten – es sei denn, die Tendenz zum Wappen bliebe bei einer längeren Anfangsfolge bestehen. Poppers Definition der Zufallsartigkeit in *Logik*$_e$ kann also kein *strenges* Kriterium für empirische Folgen sein. Vielmehr ist es nach eigener Beschreibung ein Modell, das von empirischen Folgen *approximiert* werden sollte. Um wirklich von einer Falsifikation reden zu können, müßte man festlegen, wann eine endliche empirische Folge der Länge n als Approximation eines Anfangsabschnitts der Länge n einer idealen zufallsartigen Folge gelten kann. Wie Popper zugesteht, macht dies ähnliche methodologische Festlegungen nötig: „Das Entscheidbarkeitsproblem verwandelt sich dadurch in folgendes Problem: da man von empirischen Folgen nur *Annäherung* an kürzeste zufallsartige Folgen erwarten kann – was kann man als Annäherung akzeptieren und was nicht?“ (S. 146 n/174 n)

Als eine absurde Konsequenz der These der Nichtfalsifizierbarkeit von Wahrscheinlichkeitshypothesen sieht Popper die von ihm so genannte „Wahrscheinlichkeitsmetaphysik“ an, die das Bestehen jeglicher Gesetzmäßigkeit überhaupt leugnet und behauptet, jede vermeintliche Gesetzmäßigkeit sei eine Anhäufung von Zufällen (Abschn. 67). Sie argumentiert nach Popper wie folgt: Gegeben sei eine regellose 0-1-Folge α mit bestimmtem Häufigkeitsgrenzwert. Dann kann man (bei allen plausiblen Fassungen von ‚Regellosigkeit‘) zu einer beliebigen endlichen 0-1-Folge α’ und zu jedem beliebig nahe bei 1 liegenden Wahrscheinlichkeitswert p ein n angeben, so daß innerhalb der ersten n Glieder von α der Abschnitt α’ mit der Wahrscheinlichkeit p als Teilfolge vorkommt. Popper führt folgendes inhaltliches Beispiel an: Die das Gravitationsgesetz stützenden Beobachtungen werden dadurch erklärt, daß wir uns in der betrachteten Weltperiode gerade in einem dem Gravitationsgesetz entsprechenden regelmäßigen endlichen Abschnitt α’ einer schon sehr lange bestehenden Zufallsfolge α (d. h. einen regelmäßigen Abschnitt des grundsätzlich chaotischen Weltverlaufs) befinden. Die Möglichkeit einer solchen Position macht für Popper die Notwendigkeit geeigneter Beschlüsse zur Falsifikation von Wahrscheinlichkeitsaussagen augenfällig.

Diese in *Logik*$_1$ vorgebrachte Argumentation ist offensichtlich ebenfalls für *Logik*$_e$ signifikant. Denn selbst wenn zufallsartige Folgen α erst dann vorliegen, wenn alle endlichen Anfangsabschnitte regellos in einem bestimmten Sinne sind (n-nachwirkungsfrei), kann bei genügend großem n die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer festen endlichen Teilfolge α' innerhalb der ersten n Glieder beliebig groß gemacht werden.[41] Die Teilfolge α' kann zwar nach Definition dieser Form von Zufallsartigkeit nicht als *Anfangs*abschnitt auftreten, aber sehr wohl als *späterer* Abschnitt, und zwar desto wahrscheinlicher, je länger man die Folge α betrachtet. Der oben erwähnte methodologische Beschluß, empirische Folgen als Approximationen von idealen Zufallsfolgen aufzufassen, beinhaltet also insbesondere den Beschluß, davon auszugehen, daß man sich am *Anfang* der Folge befindet.[42]

Popper spricht von „Wahrscheinlichkeitsmetaphysik" deshalb, weil die Hypothese, sich in einem regelmäßigen endlichen Abschnitt eines regellosen Weltverlaufs zu befinden, nicht falsifizierbar ist. Es handelt sich also um Metaphysik im strengen Sinne der *Logik*. „… man muß … [die] metaphysische Verwendung [von Wahrscheinlichkeitstheorien] ausschließen, wenn man sie empirisch brauchbar machen will" (Abschn. 67, S. 152 oben/181).

Daraus ergibt sich für Popper in Abschn. 68 der „methodologische Beschluß, Effekte, reproduzierbare Gesetzmäßigkeiten niemals auf gehäufte Zufälle zurückzuführen" (S. 153/183). Die beiden Argumente, die Popper in Abschn. 11 zur Rechtfertigung methodologischer Regeln vorgebracht hatte:

1. Regeln sind so einzurichten, daß Falsifikation nicht verhindert wird (S. 26/31)

2. Übereinstimmung mit den Intentionen der empirischen Forschung ist anzustreben (S. 27/32)

41 Für die in Anhang IV konstruierten idealen zufallsartigen Folgen mit Gleichverteilung gilt: Im Anfangsabschnitt der Länge 2^{n+1}+n tritt jede endliche Folge der Länge n+1 mindestens einmal auf (vgl. S. 121/144).

42 Darauf hat Miller 1994, S. 180 f. hingewiesen.

zieht er auch hier heran: es muß vermieden werden „daß Wahrscheinlichkeitshypothesen durch unbeschränkte Anwendung völlig nichtssagend werden“ sowie „Der Physiker wird sie in dieser Weise auch nicht verwenden“ (S. 153/183).

Diese methodologische Regel geht über diejenige des Verbots von *ad hoc* Hypothesen (Abschn. 20) hinaus. Die Hypothese, ein beobachteter Vorgang sei ein regelmäßiger Abschnitt eines regellosen Ablaufs, ist nicht einfach ad hoc, sondern selbst nicht prüfbar. Entsprechendes gilt für die Annahme gemäß *Logik*$_e$, daß man sich in einem besonders späten Abschnitt einer Zufallsfolge befindet. Sie entspricht auch nicht dem Verbot nichtreproduzierbarer Effekte (S. 19/22f.). Wir nehmen in jedem Fall an, daß die beobachteten Effekte (endliche Folgen bestimmter Art) reproduzierbar sind. Das Verbot, Nichtreproduzierbares als Effekt anzusehen, beruht auf der Idee, Nichtreproduzierbares als unwahrscheinlich zu betrachten. Hier geht es jedoch umgekehrt darum, etwas, das in hohem Maße unwahrscheinlich ist, als nichtreproduzierbar anzusehen, d. h. einen unwahrscheinlichen, aber reproduzierbaren Effekt als Falsifikation einer Wahrscheinlichkeitshypothese aufzufassen.[43] Man könnte in bezug auf statistische Hypothesen also die methodologische Forderung der Reproduzierbarkeit von Effekten und die Regel der Vernachlässigung des Unwahrscheinlichen in der Gleichsetzung „reproduzierbar = nicht sehr unwahrscheinlich“ aufeinander beziehen. Dann gehen beide Regeln ineinander über.[44]

Popper unternimmt gewisse Ansätze, die Regel der Vernachlässigung des Unwahrscheinlichen zu präzisieren. In *Logik*$_1$ (Abschn. 68) diskutiert er das Problem, eine Wahrscheinlichkeit ε anzugeben, die man als vernachlässigbar klein ansehen kann. Er betrachtet kontinuierliche physikalische Effekte, deren Intervall gefundener Meßwerte von der angenommenen kritischen Wahrscheinlichkeitsgrenze ε abhängt und schlägt vor, ε eine solche Größenordnung zu geben, daß dieses Intervall im Rahmen der Meßgenauigkeit möglichst unempfindlich gegenüber Schwankungen von ε ist. Dieses Verfahren ist offenbar nur in Spezial-

43 „Unwahrscheinlich“ heißt hier: „unwahrscheinlich in bezug auf die zu prüfende Hypothese“.

44 Auf die Dualität beider Regeln hat Miller 1994, S. 181f. hingewiesen.

fällen anwendbar und wird von Popper später als überholt angesehen (S. 155n./185n.).

In *Logik*$_e$ macht Popper den Vorschlag, die Nähe einer beobachteten Folge zu einer idealen Zufallsfolge im Rahmen seiner Theorie der Bewährung zu behandeln und verweist gleichzeitig auf die Verwandtschaft dieser Überlegungen zur mathematischen Statistik (S. 146n./174n.). In der Tat würde sich die statistische Testtheorie, in der man Kriterien zur Verwerfung bzw. Akzeptanz von statistischen Hypothesen formuliert, als ein naheliegender Themenkomplex anbieten, der aus der gewonnenen Perspektive zu diskutieren wäre. Popper geht in der *Logik* nicht weiter darauf ein, verweist allerdings in einem Zusatz von 1975 (S. 373/443) auf Gillies 1973, der (aus Sicht der Propensitätsinterpretation) die Beziehung des Falsifikationsproblems statistischer Hypothesen zur statistischen Testtheorie herstellt.[45] Sehr viel mehr als die Regel der Vernachlässigung des Unwahrscheinlichen findet sich also in der *Logik* nicht.[46]

Wenn man sowohl in *Logik*$_1$ wie auch in *Logik*$_e$ nur mit Hilfe von methodologischen Regeln zur Falsifikation von Wahrscheinlichkeitshypothesen kommt, die grundsätzlich dieselbe Idee beinhalten, nämlich die Vernachlässigung des Unwahrscheinlichen, was ist dann noch das Besondere von *Logik*$_e$ gegenüber *Logik*$_1$? Die Antwort ist, daß alle Überlegungen des vorigen Abschnittes (9.3.3) hier weiter gelten. Bei der Prüfung einer statistischen Hypothese, d. h., beim Versuch ihrer Widerlegung prüft man ja nicht nur einen Grenzwert relativer Häufigkeiten, sondern nimmt gleichzeitig an, daß es sich um den Grenzwert einer *regellosen* Folge handelt. Zur Prüfung der Regellosigkeit ist die Bestimmung der Nähe zu einer idealen Zufallsfolge, über deren Anfangsabschnitte man etwas weiß, das in *Logik*$_e$ vorgeschlagene Verfahren, das kein Gegenstück in *Logik*$_1$ hat. Im Beispiel: Ein beobachteter endlicher Anfangsabschnitt 010101…… von hundert Gliedern ist mit ei-

45 Im Unterschied zur Theorie von Neyman und Pearson (vgl. Schroeder-Heister 1996), nach der man statistische Hypothesen nur gegen (Klassen von) Alternativhypothesen testen kann, macht Gillies 1971 und 1973 einen Vorschlag zu einer Falsifikationsregel, die ohne den Bezug zu Alternativhypothesen auskommt.

46 Abgesehen von einigen von 1958 datierenden Erwägungen zum Bewährungsgrad statistischer Hypothesen in Anhang *IX (dort S. 359–369).

nem Häufigkeitsgrenzwert von 1/2 sehr gut verträglich, aber nicht mit der Annahme eines Häufigkeitsgrenzwerts von 1/2 einer *zufälligen* Folge. Ohne diese Zufälligkeitsannahme, die Wahrscheinlichkeitshypothesen zugrunde liegt, kann man keinerlei *statistische* Annahmen machen, die für die Prüfung des Grenzwerts benötigt werden. Die Möglichkeit, eine beobachtete relative Häufigkeit in bezug auf eine statistische Hypothese zu interpretieren (insbesondere als besonders unwahrscheinlich und damit als Falsifikationsinstanz der Hypothese), besteht nur dann, wenn man von der Annahme ausgehen kann, daß tatsächlich ein zufälliger und kein gesetzmäßiger Ablauf hinter der Folge von Beobachtungen steht. Selbst wenn es sich hier meist um eine Hintergrundhypothese handelt, muß sie im Prinzip falsifizierbar sein.

Der Ansatz von *Logik*$_e$ steht und fällt also mit der Möglichkeit, den Grad der Abweichung einer empirischen Folge von einer idealen zufallsartigen Folge zu präzisieren. Aus heutiger Sicht müßte man zur Ausschöpfung des Potentials der Popperschen Theorie den kruden Begriff der Nachwirkungsfreiheit aufgeben und nicht nur die statistische Testtheorie, sondern die moderne Theorie der Kolmogorow-Komplexität zur Messung des Informations – (und damit auch Regelmäßigkeits-) Gehalts endlicher Zeichenketten heranziehen (siehe Fußn. 35), die der Popperschen Definition der Zufallsartigkeit endlicher Folgen weit überlegen ist.

Die in diesem Abschnitt diskutierte Problematik ist auch durch die Neuorientierung Poppers zur Propensitätstheorie nicht überholt. Selbst wenn der Anspruch der Propensitätstheorie, Einzelfallwahrscheinlichkeit zur Geltung zu bringen, ohne Kollektive als Bezugsklassen im Hintergrund mitzumeinen, zu Recht besteht, so sind doch Propensitäten immer nur über beobachtete relative Häufigkeiten prüfbar, so daß sich das Problem der Falsifikation von Wahrscheinlichkeitshypothesen dort erneut stellt.[47]

47 Für Poppers Wendung zur Propensitätstheorie sei auf das Postscript (S. 347–401/399–460) verwiesen, wo Popper die Geschichte der von Misesschen Theorie bis zum Vorschlag Churchs, nur effektiv berechenbare Auswahlen zuzulassen, aus seiner Sicht behandelt und die Gründe für seine Neuorientierung angibt, insbesondere auch im Zusammenhang mit seiner Interpretation der maßtheoretischen Wahrscheinlichkeit als eines mathematischen Pendants der Propensitätstheorie.

9.4 Subjektive und objektive Wahrscheinlichkeit

Der Streit um Subjektivismus und Objektivismus in der Wahrscheinlichkeitstheorie bezieht sich auf die Frage, ob Wahrscheinlichkeiten den Grad unseres rationalen Glaubens an das Eintreffen bestimmter Ereignisse angeben oder ob Wahrscheinlichkeit ein metrischer Begriff ist, der eine Eigenschaft physikalischer Systeme beschreibt. Dabei geht es nicht darum, ob es neben objektiven Wahrscheinlichkeiten auch subjektive Wahrscheinlichkeiten gibt, sondern ob Wahrscheinlichkeit durchweg als subjektive Wahrscheinlichkeit zu interpretieren ist. Die Protagonisten des Subjektivismus in diesem Jahrhundert, der wegen bestimmter methodischer Hilfsmittel auch *Bayesianismus* heißt, sind vor allem F. Ramsey und (unabhängig davon) B. de Finetti, deren Ideen allerdings erst weit nach dem Erscheinen von *Logik*$_1$ wirksam wurden (vgl. Fine 1973, von Plato 1994). Auch wenn es daher nur in späteren Auflagen der *Logik* verstreute Stellungnahmen dazu gibt, ist Poppers Position schon in *Logik*$_1$ klar: Er ist dezidierter Objektivist in dem Sinne, daß die statistische Wahrscheinlichkeit eine objektive Wahrscheinlichkeit ist. Grenzwerte relativer Häufigkeiten sind objektive Eigenschaften von Kollektiven. Entsprechendes gilt auch für die spätere Propensitätsinterpretation, wonach Wahrscheinlichkeit etwa als Eigenschaft von Versuchsanordnungen verstanden wird und deren *objektive Tendenz* ausdrückt, bestimmte Ergebnisse hervorzubringen (vgl. Gillies 2000). Popper bestreitet dabei natürlich nicht, daß man aus objektiven Wahrscheinlichkeiten subjektive Konsequenzen ziehen kann, etwa aus der Tatsache, daß der Häufigkeitsgrenzwert eines Alternativs p beträgt, die Konzequenz, daß es rational ist, mit dem Grad p den Ausgang eines Einzelereignisses zu erwarten. Dieses Verständnis ist jedoch nur sekundär, d. h. aus dem primären objektiven Verständnis abgeleitet. Es ist die einzige Brücke, die für Popper zwischen objektiver und subjektiver Wahrscheinlichkeit besteht (Abschn. 71).

In der *Logik* hat allerdings auch ‚echte' subjektive Wahrscheinlichkeit ihren Platz, und zwar als logische Wahrscheinlichkeit im Gegensatz zur objektiven statistischen Wahrscheinlichkeit. Die Einordnung der logischen Wahrscheinlichkeit in *Logik*$_1$ als subjektiv, die Popper in einer in *Logik*$_e$ hinzugefügten Fußnote noch bekräftigt (S. 108/128f.), ist verwunderlich, da die logische Wahrscheinlichkeit einen Tautologie-ähnlichen Status hat und eine objektive Charakteristik von Sätzen ist. Ein historischer Grund mag darin liegen, daß die Idee der logischen Wahrscheinlichkeit auf Keynes zurückgeht, der eine subjektive Wahrscheinlichkeitsphilosophie vertritt.[48] Ein systematischer Grund ist aus der Stelle im Postscript, auf die Popper in der genannten Fußnote verweist,[49] nicht ersichtlich – dort spricht er lediglich von der subjektiven *Interpretation* der logischen Wahrscheinlichkeit und davon, daß die subjektive Theorie die logische Theorie als Basis nehmen muß (Postscript, S. 296/341). Die anti-subjektivistischen Bemerkungen in späteren Auflagen der *Logik* (z. B. S. 359 ff./426ff., Anhang *XVII) richten sich jedenfalls nicht gegen die logische Wahrscheinlichkeit, sondern gegen die induktive Logik, die Popper als einen mit dem Bayesianismus eng zusammenhängenden Theoriekomplex auffaßt. Popper versteht seine Argumente gegen die induktive Logik (vgl. oben 9.2) zugleich als Argumente gegen den wahrscheinlichkeitstheoretischen Subjektivismus.

Literatur

Borel, Émile (1909): „Les probabilités dénombrables et leurs application arithmétiques", in: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 27, p. 247–271.
Carnap, Rudolf (1950): Logical Foundations of Probability, Chicago.
Carnap, Rudolf (1952): The Continuum of Inductive Methods, Chicago.
Carnap, Rudolf/Stegmüller, Wolfgang (1959): Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit, Wien.
Church, Alonzo (1940): „On the concept of a random sequence", in: Bulletin of the American Mathematical Society 46, p. 130–135.
Copeland, Arthur H. (1928): „Admissible numbers in the theory of probability", in: American Journal of Mathematics 50, p. 535–552.
Fine, Terrence L. (1973): Theories of Probability: An Examination of Foundations, New York.
Fréchet, Maurice (1938): „Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités", in: Les fondements du calcul des probabilités, Actualités scientifiques et industrielles 735, Paris, p. 23–55.
Gillies, Donald A. (1971): „A falsifying rule for probability statements", in: British Journal for the Philosophy of Science 22, p. 231–261.
Gillies, Donald A. (1973): An Objective Theory of Probability, London.
Gillies, Donald A. (1995): „Popper's contribution to the philosophy of probability", in: A. O'Hear (ed.), Karl Popper: Philosophy and Problems, Royal Institute of Philosophy Supplement: 39, Cambridge, p. 103–120.

48 Andererseits wendet sich Waismann 1930 (S. 238), an den Popper ebenfalls anschließt, ausdrücklich gegen die subjektive Lesart.
49 Postscript, S. 281–300/323–345, vgl. auch Popper 1957.

Gillies, Donald A. (2000): Philosophical Theories of Probability, London.
Good, Irving J. (1946): „Normal recurring decimals", in: Journal of the London Mathematical Society 21, p. 167–169.
Heidelberger, Michael (1993): Die innere Seite der Natur: Gustav Theodor Fechners wissenschaftlich-philosophische Weltauffassung, Frankfurt/M.
Howson, Colin (1973): „Must the logical probability of laws be zero?", in: British Journal for the Philosophy of Science 24, p. 153–163.
Kamke, Erich (1932): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, Leipzig.
Kamke, Erich (1933): „Über neuere Begründungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", in: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 42, S. 14–27.
Keynes, John M. (1926): Über Wahrscheinlichkeit, Leipzig (engl. A Treatise on Probability, London 1921).
Kolmogorow, Andrej N. (1933): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin.
Lambalgen, Michiel van (1987), „Von Mises' definition of random sequences reconsidered", in: Journal of Symbolic Logic 52, p. 725–755.
Lambalgen, Michiel van (1990): „The axiomatization of randomness", in: Journal of Symbolic Logic 55, p. 1143–1167.
Leblanc, Hughes (1982): „Popper's 1955 axiomatization of absolute probability", in: Pacific Philosophical Quarterly 63, p. 133–145.
Leblanc, Hughes (1989): „Popper's formal contributions to probability theory", in: M. A. Notturno (ed.), Perspectives on Psychologism, Leiden, p. 341–367.
Leblanc, Hugues (2001): „Alternatives to standard first-order semantics", in: D. M. Gabbay / F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic, 2nd. Edition, Vol. 2, Dordrecht, p. 53–131.
Li, Ming/Vitányi, Paul (1993): An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications, 2nd ed., New York 1997.
Martin-Löf, Per (1969): „The literature on von Mises' Kollektivs revisited", in: Theoria 35, p. 12–37.
Michalos, Alex C. (1971): The Popper-Carnap Controversy, The Hague.
Miller, David (1994): Critical Rationalism: A Restatement and Defence, Chicago.
Mises, Richard von (1919): „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", in: Mathematische Zeitschrift 5, S. 52–99.
Mises, Richard von (1928): Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Wien.
Mises, Richard von (1931): Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Leipzig.
Mises, Richard von (1933): „Über Zahlenfolgen, die ein Kollektiv-ähnliches Verhalten zeigen", in: Mathematische Annalen 108, S. 757–772.
Mises, Richard von (1936): Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, 2., neubearb. Aufl., Wien.
Mises, Richard von (1938): „Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités", in: Les fondements du calcul des probabilités, Actualités scientifiques et industrielles 735, Paris, p. 57–66.
Mises, Richard von (1964): Mathematical Theory of Probability and Statistics (ed. H. Geiringer), New York.
Plato, Jan von (1994): Creating Modern Probability: Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective, Cambridge.
Popper, Karl R. (1934/1994): Logik der Forschung, 10. Aufl., Tübingen (Abkürzung: „*Logik*"), 11. Aufl. 2005, herausgegeben von Herbert Keuth).

Popper, Karl R. (1955): „Two autonomous axiom systems for the calculus of probabilities“, in: British Journal for the Philosophy of Science 6, p. 51–57.

Popper, Karl R. (1956/1983): Realism and the Aim of Science: From the Postscript to the Logic of Scientific Discovery (ed. W. W. Bartley III), London (Abkürzung: „Postscript“), dt.: Realismus und das Ziel der Wissenschaft, Tübingen 2002.

Popper, Karl R. (1957): „Probability magic or knowledge out of ignorance“, in: Dialectica 11, p. 354–373.

Popper, Karl R. (1974/1994): Ausgangspunkte. Meine intellektuelle Entwicklung, Hamburg (engl. Autobiography of Karl Popper, in: P. A. Schilpp (ed.), The Philosophy of Karl Popper, 1974) (Abkürzung: „Autobiographie“).

Popper, Karl R./Miller, David W. (1983): „A proof of the impossibility of inductive probability“, in: Nature 302, p. 687 f.

Popper, Karl R./Miller, David W. (1987): „Why probabilistic support is not inductive“, in: Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A, 321, p. 569–591.

Reichenbach, Hans (1932): „Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, in: Mathematische Zeitschrift 34, S. 568–619.

Reichenbach, Hans (1935): Wahrscheinlichkeitslehre. Eine Untersuchung über die logischen und mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leiden.

Schroeder-Heister, Peter (1984a): „Logik, induktive“, in: J. Mittelstraß (Hrsg.), Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, Bd. II, Mannheim, S. 662–666.

Schroeder-Heister, Peter (1984b): „Mises, Richard von“, in: J. Mittelstraß (Hrsg.), Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, Bd. II, Mannheim, S. 901 f.

Schroeder-Heister, Peter (1996): „Statistik“, in: J. Mittelstraß (Hrsg.), Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, Bd. IV, Stuttgart, S. 82 f.

Stegmüller, Wolfgang (1973): Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie. Bd. IV: Personelle und Statistische Wahrscheinlichkeit, 2. Halbbd.: Statistisches Schließen, Statistische Begründung, Statistische Analyse, Berlin.

Vetter, Hermann (1967): Wahrscheinlichkeit und logischer Spielraum. Eine Untersuchung zur induktiven Logik, Tübingen.

Ville, Jean-André (1936): „Sur les suites indifférentes“, in: Comptes rendus des séances de l’Académie des Sciences (Paris), 202, p. 1393–1394.

Ville, Jean (1939): Études critique de la notion de collectif (= Thèses présentées à la faculté des science de Paris …, 1re Thèse), Paris.

Waismann, Friedrich (1930): „Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs“, in: Erkenntnis 1, S. 228–248.

Wald, Abraham (1937): „Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, in: Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 8, S. 38–72.

Wald, Abraham (1938): „Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes“, in: Les fondements du calcul des probabilités, Actualités scientifiques et industrielles 735, Paris, p. 79–99.