Beweise und Widerlegungen in der formalen Logik

Skript zur Vorlesung
von
Thomas Piecha

Unter Verwendung von Vorlesungen von Peter Schroeder-Heister

Sommersemester 2010

Universität Tübingen
Philosophisches Seminar und
Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik

Skript zur Vorlesung für Studenten der Philosophie, gehalten im Sommersemester 2010.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Vorlesung „Einführung in die Logik“ (WS07/08, WS09/10; siehe [9]) wurden zwei Verfahren vorgestellt, um semantische Eigenschaften von Formeln – wie z. B. Allgemeingültigkeit – festzustellen: das Wahrheitstafelverfahren und das Tableauverfahren.

Aussagesymbolen werden zunächst Wahrheitswerte zugeordnet (Bewertung $\mathcal{I}$), und die Bedeutung der logischen Konstanten wie $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ wird dann durch Funktionen von Wahrheitswerten (elementare Wahrheitstafeln) festgelegt.

Definition 1.1
Eine *Bewertung* $\mathcal{I}$ ist eine Funktion, die jedem Element der Menge von Aussagesymbolen $\mathcal{A}$ einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, d. h. $\mathcal{I} : \mathcal{A} \rightarrow \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$.

Definition 1.2
Falls A zu $\mathcal{A}$ gehört, ist A *wahr unter* $\mathcal{I}$, falls $\mathcal{I}(A) = \mathrm{w}$, und *falsch unter* $\mathcal{I}$, falls $\mathcal{I}(A) = \mathrm{f}$.

$\top$ ist *wahr unter* $\mathcal{I}$.	
$\bot$ ist *falsch unter* $\mathcal{I}$.	
$\neg A$ ist *wahr unter* $\mathcal{I}$,	falls A *falsch unter* $\mathcal{I}$ ist,
falsch unter $\mathcal{I}$,	falls A *wahr unter* $\mathcal{I}$ ist.
$A \wedge B$ ist *wahr unter* $\mathcal{I}$,	falls A und B *wahr unter* $\mathcal{I}$ sind,
falsch unter $\mathcal{I}$	sonst.
$A \vee B$ ist *wahr unter* $\mathcal{I}$,	falls A *wahr unter* $\mathcal{I}$ oder B *wahr unter* $\mathcal{I}$ oder beides der Fall ist,
falsch unter $\mathcal{I}$	sonst.
$A \rightarrow B$ ist *wahr unter* $\mathcal{I}$,	falls es nicht der Fall ist, dass A *wahr unter* $\mathcal{I}$ und B *falsch unter* $\mathcal{I}$ ist,
falsch unter $\mathcal{I}$	sonst.

Ausdruck der Wahrheitswertabhängigkeit durch Wahrheitstafeln:[1]

Negation

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Implikation

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Grenzfälle

$\top$	$\bot$
w	f

Die Bedeutung der Quantoren wird so festgelegt, dass zusätzlich den Prädikatsymbolen Attribute über einem Universum U zugeordnet werden, und den Konstanten Gegenstände aus U zugeordnet werden. Dies ergibt (zusammen mit der Zuordnung von Wahrheitswerten zu Aussagesymbolen) eine Interpretation $\mathcal{I}$ über U, bzgl. der dann die Bedeutung der Quantoren festgelegt wird.

[1] In der „Einführung in die Logik“ wurde die Disjunktion als Adjunktion und die Implikation als Subjunktion bezeichnet.

Die Untersuchung von Formeln auf Eigenschaften wie Allgemeingültigkeit besteht dann beim Wahrheitstafelverfahren darin, den Wahrheitswert der Formel für jede Interpretation der Aussagesymbole zu bestimmen.

Definition 1.3
A heißt *allgemeingültig* oder eine *Tautologie*, wenn A unter allen Bewertungen wahr ist. Schreibweise: $\models A$.

BEISPIEL.
Wahrheitstafel für $(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$, wobei A, B und C Aussagesymbole seien:

A	B	C	$(A \vee$	$(B \wedge C))$	$\rightarrow$	$((A \vee B)$	$\wedge$	$(A \vee C))$
w	w	w	w	w	**w**	w	w	w
w	w	f	w	f	**w**	w	w	w
w	f	w	w	f	**w**	w	w	w
w	f	f	w	f	**w**	w	w	w
f	w	w	w	w	**w**	w	w	w
f	w	f	f	f	**w**	w	f	f
f	f	w	f	f	**w**	f	f	w
f	f	f	f	f	**w**	f	f	f

Beim Tableauverfahren wird nicht von der Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Aussagesymbolen ausgegangen, sondern im ersten Schritt der Ausgangsformel der Wahrheitswert f (Signatur) zugeordnet, um dann systematisch zu untersuchen, ob unter dieser Annahme (dass die Ausgangsformel falsch ist) Bewertungen gefunden werden können, unter denen dies nicht der Fall ist. Treten nur Widersprüche auf (geschlossene Zweige), so bedeutet dies, dass es keine Bewertung geben kann, unter der die Formel falsch ist. Also muss die Formel unter allen Bewertungen wahr sein, d. h. allgemeingültig.

Definition 1.4
Ein *analytisches Tableau* ist eine Baumstruktur von signierten Formeln, die nach folgenden Regeln generiert wird:

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ A \rightarrow B \\ \mathrm{f}\ A \mid \mathrm{w}\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{f}\ A \rightarrow B \\ \mathrm{w}\ A \\ \mathrm{f}\ B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ A \wedge B \\ \mathrm{w}\ A \\ \mathrm{w}\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{f}\ A \wedge B \\ \mathrm{f}\ A \mid \mathrm{f}\ B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ A \vee B \\ \mathrm{w}\ A \mid \mathrm{w}\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{f}\ A \vee B \\ \mathrm{f}\ A \\ \mathrm{f}\ B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ \neg A \\ \mathrm{f}\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{f}\ \neg A \\ \mathrm{w}\ A \end{array}$$

Ein *analytisches Tableau für A* ist ein Tableau das mit f A beginnt.

Beispiel.
Tableau für $(A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$, wobei A, B und C Aussagesymbole seien:

<table>
<tr><td>1.</td><td colspan="8">f $(A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="7">w $A \vee (B \wedge C)$</td><td>(1)</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="7">f $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$</td><td>(1)</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="3">w A</td><td>(2)</td><td colspan="3">w $B \wedge C$</td><td>(2)</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>f $A \vee B$</td><td>(3)</td><td>f $A \vee C$</td><td>(3)</td><td colspan="3">w B</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>f A</td><td>(5)</td><td>f A</td><td>(5)</td><td colspan="3">w C</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>f B</td><td>(5)</td><td>f C</td><td>(5)</td><td>f $A \vee B$</td><td>(3)</td><td>f $A \vee C$</td><td>(3)</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>4 x 6</td><td></td><td>4 x 6</td><td></td><td>f A</td><td>(7)</td><td>f A</td><td>(7)</td></tr>
<tr><td>9.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>f B</td><td>(7)</td><td>f C</td><td>(7)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5 x 9</td><td></td><td>6 x 9</td><td></td></tr>
</table>

Beide Verfahren sind in dem Sinne *semantische* Verfahren, dass zunächst Interpretationen festgelegt werden, die dann systematisch untersucht werden. (Man kann beide Verfahren allerdings auch als syntaktische Verfahren auffassen. Wir hatten das Tableauverfahren zumindest so aufgefasst; siehe Korrektheit und Vollständigkeit in [9].)

Beide Verfahren spiegeln jedoch nicht die ‘natürliche’ Form von Argumentationen oder Beweisen wieder, da hier normalerweise nicht erst Interpretationen vorgenommen werden, die dann untersucht werden, sondern einfach von Aussagen zu anderen Aussagen übergegangen wird. Letzterem entsprechen Regelkalküle wie z. B. die Kalküle des natürlichen Schließens.

2 Natürliches Schließen

Literatur

Jaśkowski, S. (1934). *On the Rules of Suppositions in Formal Logic*. Studia Logica **1**, 5–32.

Gentzen, G. (1935). *Untersuchungen über das logische Schließen*. Mathematische Zeitschrift **39**, 176–210, 405–431. (Online: http://gdz.sub.uni-goettingen.de .)

Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: Almqvist & Wiksell. Wiederabgedruckt 2006 (Mineola: Dover Publications).

Troelstra, A. S. & Schwichtenberg, H. (2002). *Basic Proof Theory* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Bornat, R. (2005). *Proof and Disproof in Formal Logic. An Introduction for Programmers*. Oxford University Press.

2.1 Einführendes Beispiel

(Nach Gentzen.)

Wir wollen zeigen: Es gilt $(A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$.

Angenommen, es gilt A oder $B \wedge C$. Dann können zwei Fälle unterschieden werden:

1. Fall: A gilt. Dann gilt auch $A \vee B$ und $A \vee C$. Somit gilt auch $((A \vee B) \wedge (A \vee C))$.

2. Fall: $B \wedge C$ gilt. Da $B \wedge C$ gilt, gilt sowohl B als auch C. Aus B folgt $A \vee B$ und aus C folgt $A \vee C$. Somit gilt auch $((A \vee B) \wedge (A \vee C))$.

Unter der Annahme, dass $A \vee (B \wedge C)$ gilt, gilt also in allen Fällen $((A \vee B) \wedge (A \vee C))$. Somit gilt $(A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$.

2.2 Sprache

Definition 2.1

(i) *Formeln* werden aus Atomformeln (Aussagesymbolen) und $\perp$ (*falsum*) gebildet: $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $\neg A$. Es ist $\neg A := A \to \perp$. ($\perp$ wird als nicht atomar behandelt.)

(ii) *Klammerung:* Linksklammerung und die üblichen Regeln zur Klammerersparnis.

(iii) *Bindungsstärke:* wie üblich, d. h., $\neg$ bindet am stärksten, $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\to$.

BEMERKUNG.
Wir verwenden nur metasprachliche Variablen für Objektzeichen, aber keine Objektzeichen. Wir reden nicht über konkrete Formeln, sondern nur über Formeln von bestimmter Form.

2.3 Die Kalküle des natürlichen Schließens NK, NI und NM

Die Kalküle des natürlichen Schließens gehen auf Jaśkowski und Gentzen zurück.

MOTIVATION.
1. Grundidee: Es werden keine Axiome, sondern nur Annahmen verwendet.
2. Grundidee: Die Abhängigkeit von Annahmen kann gelöscht werden.

$$\begin{array}{cl} A & \\ \vdots & \\ B & B \text{ ist noch von der Annahme } A \text{ abhängig} \\ \hline A \to B & A \to B \text{ ist nicht mehr von } A \text{ abhängig} \end{array}$$

Regeln für NK (junktorenlogisch)

EINFÜHRUNG		BESEITIGUNG	
$(\wedge\,\mathrm{I})$	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$	$(\wedge\,\mathrm{E})$	$\dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}$
$(\vee\,\mathrm{I})$	$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}$	$(\vee\,\mathrm{E})$	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}$
$(\to\mathrm{I})$	$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}$	$(\to\mathrm{E})$	$\dfrac{A \to B \quad A}{B}$
		$(\bot)_c$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}$

NI (intuitionistisch) hat $\dfrac{\bot}{A}$ $(\bot)$ statt $(\bot)_c$.

In NM (minimal) fehlt $(\bot)_c$ ersatzlos.

Der Gebrauch von Annahmen und die Anwendung der Regeln von NK werden zunächst durch einige Beispiele für Ableitungen veranschaulicht. Die genaue Definition einer Ableitung wird im Anschluss gegeben.

BEISPIELE.
(i) $(A \to B) \wedge (A \to C) \vdash_{\mathrm{NK}} A \to (B \wedge C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to B}\,(\wedge\,\mathrm{E}) \qquad A^{(1)}}{B}\,(\to\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{(A\to B)\wedge(A\to C)}{A\to C}\,(\wedge\,\mathrm{E}) \qquad A^{(1)}}{C}\,(\to\mathrm{E})}{B\wedge C}\,(\wedge\,\mathrm{I})}{A\to B\wedge C}\,(\to\mathrm{I})\,{}_{(1)}$$

[(1)] markiert die zusätzliche Annahme, die in der Ableitung gelöscht wird.

(ii) $A\to(B\to C)\vdash_{\mathrm{NK}}(A\to B)\to(A\to C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to(B\to C) \qquad A^{(1)}}{B\to C}\,(\to\mathrm{E}) \qquad \dfrac{A\to B^{(2)} \qquad A^{(1)}}{B}\,(\to\mathrm{E})}{C}\,(\to\mathrm{E})}{A\to C}\,(\to\mathrm{I})\,{}_{(1)}}{(A\to B)\to(A\to C)}\,(\to\mathrm{I})\,{}_{(2)}$$

[(1)] und [(2)] markieren die zusätzlichen Annahmen, die in der Ableitung gelöscht werden.

(iii) $\neg\neg A\vdash_{\mathrm{NK}} A$

Hierbei ist $\neg A := A\to\bot$. Die Behauptung bedeutet also: $(A\to\bot)\to\bot\vdash_{\mathrm{NK}} A$

$$\dfrac{\dfrac{(A\to\bot)\to\bot \qquad A\to\bot^{(1)}}{\bot}\,(\to\mathrm{E})}{A}\,(\bot)_c\,{}_{(1)}$$

$(\bot)_c$ entspricht somit der Beseitigung der doppelten Negation.

[(1)] markiert die zusätzliche Annahme, die in der Ableitung gelöscht wird.

(iv) $\vdash_{\mathrm{NK}}(A\vee(B\wedge C))\to((A\vee B)\wedge(A\vee C))$ (Beispiel nach Gentzen.)

$$\dfrac{\dfrac{(A\vee(B\wedge C))^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{A^{(1)}}{A\vee B}\,(\vee\,\mathrm{I}) \qquad \dfrac{A^{(1)}}{A\vee C}\,(\vee\,\mathrm{I})}{((A\vee B)\wedge(A\vee C))}\,(\wedge\,\mathrm{I}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B\wedge C^{(1)}}{B}\,(\wedge\,\mathrm{E})}{A\vee B}\,(\vee\,\mathrm{I}) \qquad \dfrac{\dfrac{B\wedge C^{(1)}}{C}\,(\wedge\,\mathrm{E})}{A\vee C}\,(\vee\,\mathrm{I})}{((A\vee B)\wedge(A\vee C))}\,(\wedge\,\mathrm{I})}{((A\vee B)\wedge(A\vee C))}\,(\vee\,\mathrm{E})\,{}_{(1)}}{(A\vee(B\wedge C))\to((A\vee B)\wedge(A\vee C))}\,(\to\mathrm{I})\,{}_{(2)}$$

[(1)] und [(2)] markieren die zusätzlichen Annahmen, die in der Ableitung gelöscht werden.

Jetzt die formelle Definition einer Ableitung. Wir betrachten eine Sprache mit $\bot$ als Grundzeichen. $\neg A$ ist definiert als $A\to\bot$.

BEMERKUNG.
Warum braucht man keine Regel für $\top$ (*verum*)?
Weil man $\top$ unter Verwendung des Grundzeichens $\bot$ definieren kann: $\top := \bot\to\bot$. (Es ginge natürlich auch $\top := \bot\to A$ oder $\top := A\to A$ für beliebige A, wobei A jedoch kein Grundzeichen ist.)

Definition 2.2

(i) Eine *Ableitung* $\mathcal{D}$ ist ein Paar $\langle \mathcal{T}, f \rangle$, wobei $\mathcal{T}$ *Formelbaum* und f *Löschungsfunktion* auf $\mathcal{T}$ ist.

ARBEITSBLATT.
Beweisen Sie: $A \land (B \land C) \vdash_{\mathrm{NK}} A \land B$.

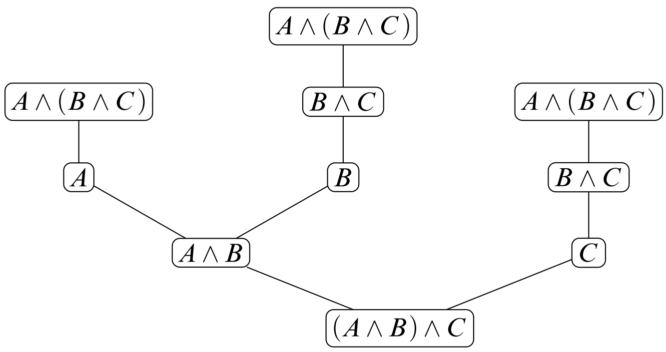
$$\dfrac{\dfrac{A \land (B \land C)}{A}\,(\land\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \land (B \land C)}{B \land C}\,(\land\mathrm{E})}{B}\,(\land\mathrm{E})}{A \land B}\,(\land\mathrm{I})$$

Die *Endformel* $A \land B$ hängt von den *offenen Annahmen* $A \land (B \land C)$ ab. $\lhd$

BEISPIEL.
Betrachte Ableitung des Assoziativgesetzes für $\land$: $A \land (B \land C) \vdash_{\mathrm{NK}} (A \land B) \land C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \land (B \land C)}{A}\,(\land\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \land (B \land C)}{B \land C}\,(\land\mathrm{E})}{B}\,(\land\mathrm{E})}{A \land B}\,(\land\mathrm{I}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \land (B \land C)}{B \land C}\,(\land\mathrm{E})}{C}\,(\land\mathrm{E})}{(A \land B) \land C}\,(\land\mathrm{I})$$

Der Formelbaum $\mathcal{T}$ dieser Ableitung ist



(ii) Eine *Löschungsfunktion* auf $\mathcal{T}$ ist dabei eine partielle Funktion (partiell = nicht für alle Argumente definiert) von der Menge der Blätter von $\mathcal{T}$ in die Knoten von $\mathcal{T}$ außer der Wurzel (Blätter sind Grenzfälle von Knoten).

ARBEITSBLATT.
Beweisen Sie: $B \lor C \vdash_{\mathrm{NK}} (A \lor B) \lor C$.

$$\dfrac{B \lor C \qquad \dfrac{\dfrac{B^{(1)}}{A \lor B}\,(\lor\mathrm{I})}{(A \lor B) \lor C}\,(\lor\mathrm{I}) \qquad \dfrac{C^{(1)}}{(A \lor B) \lor C}\,(\lor\mathrm{I})}{(A \lor B) \lor C}\,(\lor\mathrm{E})_{(1)}$$

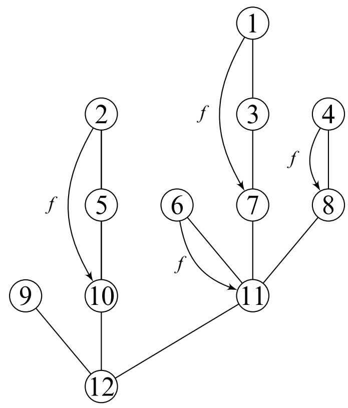
Die Endformel $(A \lor B) \lor C$ hängt noch von der offenen Annahme $B \lor C$ ab. Die Annahmen B und C wurden beim Übergang zur Endformel in der Anwendung der $(\lor\,\mathrm{E})$-Regel gelöscht. $\triangleleft$

BEISPIEL.
Betrachte Ableitung des Assoziativgesetzes für $\lor$: $A \lor (B \lor C) \vdash_{\mathrm{NK}} (A \lor B) \lor C$

$$\dfrac{A \lor (B \lor C) \qquad \dfrac{\dfrac{A^{(2)}}{A \lor B}\,(\lor\,\mathrm{I})}{(A \lor B) \lor C}\,(\lor\,\mathrm{I}) \qquad \dfrac{B \lor C^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{B^{(1)}}{A \lor B}\,(\lor\,\mathrm{I})}{(A \lor B) \lor C}\,(\lor\,\mathrm{I}) \qquad \dfrac{C^{(1)}}{(A \lor B) \lor C}\,(\lor\,\mathrm{I})}{(A \lor B) \lor C}\,(\lor\,\mathrm{E})_{(1)}}{(A \lor B) \lor C}\,(\lor\,\mathrm{E})_{(2)}$$

$^{(1)}$ und $^{(2)}$ markieren die zusätzlichen Annahmen, die in der Ableitung im vorletzten und letzten Schritt bei der Regelanwendung $(\lor\,\mathrm{E})$ gelöscht werden.

Der Formelbaum $\mathcal{T}$ dieser Ableitung hat dann die nebenstehende Form (wobei im eigentlichen Formelbaum den Knoten die entsprechenden Formeln zugeordnet sind; der Übersichtlichkeit halber sind die Knoten hier durchnummeriert).



Die Löschungsfunktion f ist:

$$\begin{aligned} f(1) &= 7 \\ f(4) &= 8 \\ f(6) &= 11 \\ f(2) &= 10 \\ f(9) &= \text{undefiniert} \end{aligned}$$

BEMERKUNG.
Annahmen, die bei einer Regelanwendung gelöscht werden können, müssen nicht gelöscht werden.[2]

(Falls Annahmen bei einer Regelanwendung nicht gelöscht werden, müssen diese offenen Annahmen natürlich später gelöscht werden, um einen Beweis zu erhalten.)

Insbesondere kann von B mit $(\to\mathrm{I})$ zu $A \to B$ übergegangen werden, d. h., ohne dass A als Annahme in einem Pfad vorkommen muss, der mit B endet. (Vergleiche dazu auch die Bemerkung zur Relevanzlogik in Abschnitt 2.5.)

Entsprechend ist die Regel $\dfrac{\perp}{A}\,(\perp)$ (*ex falso quodlibet sequitur*) ein Spezialfall von $(\perp)_c$ (*reductio ad absurdum*[3]), d. h., man kann von der Prämisse $\perp$ mit $(\perp)_c$ zu einer beliebige Konklusion übergehen, ohne eine Annahme löschen zu müssen.

[2] Man kann auch der sog. *crude discharge convention* folgen, unter der Annahmen zu löschen sind, sobald diese gelöscht werden können.

[3] Im Unterschied hierzu bezeichnet Gentzen seine Regel *NE* als *reductio ad absurdum*. *NE* entspricht unserem Schema $(\to\mathrm{I})$ für $B \equiv \perp$. Begriffsgeschichtlich gesehen ist die Bezeichnung als *reductio ad absurdum* sowohl für Gentzens Regel *NE* als auch für unsere Regel $(\perp)_c$ adäquat. Hier wollen wir jedoch nur die Regel $(\perp)_c$ als *reductio ad absurdum* auffassen. Siehe dazu auch die nachfolgende Bemerkung zur Ableitung des *tertium non datur* in Abschnitt 2.4.

(iii) Eine *Teilableitung* einer Ableitung ist ein Teilbaum der Ableitung, wobei die Löschungsfunktion auf die Blätter des Teilbaums, deren Wert *nicht* die Wurzel des Teilbaums ist, eingeschränkt wird.

Beispiel.
Folgende Ableitung ist eine Teilableitung der vorigen Ableitung:

$$\cfrac{B \vee C \qquad \cfrac{\cfrac{B^{(1)}}{A \vee B}\,(\vee \mathrm{I})}{(A \vee B) \vee C}\,(\vee \mathrm{I}) \qquad \cfrac{C^{(1)}}{(A \vee B) \vee C}\,(\vee \mathrm{I})}{(A \vee B) \vee C}\,(\vee \mathrm{E})_{(1)}$$

mit der Löschungsfunktion f: $f(1) = 7$, $f(4) = 8$, $f(6) =$ undefiniert.

(iv) Die Blätter einer Ableitung heißen *Annahmen*, die Wurzel heißt *Endformel*.

(v) Annahmen, für welche die Löschungsfunktion nicht definiert ist, heißen *offene Annahmen*, sonst *geschlossene Annahmen*.

Beispiel.
Betrachte vorige (Teil-)ableitung:

$$\cfrac{B \vee C \qquad \cfrac{\cfrac{B^{(1)}}{A \vee B}\,(\vee \mathrm{I})}{(A \vee B) \vee C}\,(\vee \mathrm{I}) \qquad \cfrac{C^{(1)}}{(A \vee B) \vee C}\,(\vee \mathrm{I})}{(A \vee B) \vee C}\,(\vee \mathrm{E})_{(1)}$$

mit der Löschungsfunktion f: $f(1) = 7$, $f(4) = 8$, $f(6) =$ undefiniert.

$B \vee C$ (Knoten 6) ist hier also eine offene Annahme, und B (Knoten 1) und C (Knoten 4) sind geschlossene Annahmen.

(vi) Metasprachliche Zeichen für Ableitungen: $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}', \ldots$

(vii) *Notation von Löschungsfunktionen durch Ziffern*:

$$\cfrac{\begin{matrix} A^{(n)} \ldots A^{(n)} \ldots A^{(n)} \\ \ddots \quad \vdots \quad ⋰ \\ C \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} B^{(n)} \ldots B^{(n)} \\ \ddots \quad ⋰ \\ D \end{matrix}}{E}\;{}_{(n)}$$

Dies bedeutet: Den Blättern A wird C, den Blättern B wird D zugeordnet.

Insbesondere dürfen also nur Annahmen gelöscht werden, die (als Blätter) in Pfaden zu einem Knoten vorkommen, auf den sich die Regelanwendung (bei der gelöscht werden kann) bezieht.

(Obiges Schema soll nur die Notation mit Ziffern veranschaulichen. Dem Schema selbst entspricht keine Regel in NK.)

(viii) *Schematische Darstellung von Regeln*. Das Beispiel

$$\dfrac{C_1 \qquad \begin{matrix} A \\ \vdots \\ C_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B_1 \quad B_2 \\ \vdots \\ C_3 \end{matrix}}{D}$$

bedeutet: Aus Ableitungen mit den Endformeln C_1, C_2, C_3 darf eine neue Ableitung mit der Endformel D erzeugt werden. Die Löschungsfunktion der neuen Ableitung enthält die der alten Ableitungen; ferner darf beliebig vielen Annahmen A das C_2 und beliebig vielen Annahmen B_1 und B_2 das C_3 zugeordnet werden.

(ix) *Allgemeine Form einer Regel*:

$$\dfrac{\begin{matrix} A_{11} \dots A_{1k_1} \\ \vdots \\ B_1 \end{matrix} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \begin{matrix} A_{n1} \dots A_{nk_n} \\ \vdots \\ B_n \end{matrix}}{C}$$

Bemerkung.
Die Definition einer Ableitung $\mathcal{D}$ erfolgt also induktiv:

Induktionsbasis: Der aus nur einem Knoten bestehende Formelbaum mit der diesem Knoten zugeordneten Formel A ist eine *Ableitung* von A aus der offenen Annahme A.

Induktionsschritt: Seien $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ Ableitungen. Dann ist $\mathcal{D}$ eine *Ableitung*, die unter Verwendung von $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ oder $\mathcal{D}_3$ durch Anwendung einer der Regeln von NK (bzw. NI oder NM) erzeugt wird. Für die Löschungsfunktion gilt dabei das oben Gesagte.

Man spricht dann von einer Ableitung in NK (bzw. in NI oder NM). Die Ableitbarkeit einer Formel A aus einer Menge X von offenen Annahmen wird durch $X \vdash A$ ausgedrückt. Ist die Menge der offenen Annahmen leer (d. h., die Ableitung enthält nur geschlossene Annahmen), dann schreibt man $\vdash A$ (entsprechend verwendet man $\vdash_{\mathrm{NK}}$, $\vdash_{\mathrm{NI}}$ bzw. $\vdash_{\mathrm{NM}}$ für die Kalküle NK, NI bzw. NM).

2.4 Bemerkung zu *reductio ad absurdum*

Beispiel.
$\vdash_{\mathrm{NK}} A \vee \neg A$ (*tertium non datur*)

Wir führen die Negation zum Widerspruch (klassische *reductio ad absurdum*; zur Verwendung der Bezeichnung '*reductio ad absurdum*' vgl. die Bemerkung in Fußnote 3):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \vee \neg A)^{(3)} \qquad \dfrac{A^{(1)}}{A \vee \neg A}\,(\vee \mathrm{I})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg A}\,(\to \mathrm{I})\ (1) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(A \vee \neg A)^{(3)} \qquad \dfrac{\neg A^{(2)}}{A \vee \neg A}\,(\vee \mathrm{I})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{A}\,(\bot)_c\ (2)}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{A \vee \neg A}\,(\bot)_c\ (3)$$

BEMERKUNG.
Die Regel*instanz*

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A}\,(\to\mathrm{I}) \qquad (1)$$

und die Regel

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}\,(\bot)_c \qquad (2)$$

sehen ähnlich aus. Warum sind dies *nicht* zwei Fälle von *reductio ad absurdum*?
(1) drückt aus: Wenn A zu einem Widerspruch (d. h. $\bot$) führt, dann kann A nicht der Fall sein, also $\neg A$.
(2) würde dann ausdrücken: Wenn $\neg A$ zu einem Widerspruch (d. h. $\bot$) führt, dann kann $\neg A$ nicht der Fall sein, also (nach obiger Argumentation) $\neg\neg A$.
Es ist aber nicht von vorneherein klar, dass $\neg\neg A$ und A äquivalent sind (diese Äquivalenz wird von den Intuitionisten bestritten; siehe Kapitel 4). Die Konklusion von (2) ist aber nicht $\neg\neg A$, sondern A. Also ist die Äquivalenz von $\neg\neg A$ und A eine besondere Eigenschaft von NK. Ohne $(\bot)_c$ (d. h. in NI) kann $\neg\neg A \to A$ *nicht* abgeleitet werden.
(1) ist also kein Fall von *reductio ad absurdum*, sondern nur (2).

2.5 Bemerkung zur Relevanzlogik

Die in NK und NI ableitbaren Formeln $A \to (B \to A)$ (*ex quodlibet verum sequitur*) und $\neg A \to (A \to B)$ (*ex falso quodlibet sequitur*, bzw. *ex contradictione quodlibet sequitur*) werden als Paradoxien der Implikation aufgefasst. Betrachtet man deren Ableitungen

$$\frac{\dfrac{A^{(1)}}{B \to A}\,(\to\mathrm{I})}{A \to (B \to A)}\,(\to\mathrm{I})\,(1) \qquad \text{und} \qquad \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^{(2)} \quad A^{(1)}}{\bot}\,(\to\mathrm{E})}{B}\,(\bot)}{A \to B}\,(\to\mathrm{I})\,(1)}{\neg A \to (A \to B)}\,(\to\mathrm{I})\,(2)$$

so fällt auf, dass B in beiden Ableitungen beliebig gewählt werden kann. In der ersten Ableitung ist B in $B \to A$ in diesem Sinne nicht relevant für A, und in der zweiten Ableitung ist A in $A \to B$ nicht relevant für B.
Eine Logik, in der weder

$$A \to (B \to A)$$

noch

$$\neg A \to (A \to B)$$

gilt, bezeichnet man als *Relevanzlogik*.
Betrachtet man lediglich das implikative Fragment, d. h. den nur aus den Regeln $(\to\mathrm{I})$ und $(\to\mathrm{E})$ bestehenden Kalkül, und fordert, dass bei Anwendung von $(\to\mathrm{I})$ eine Annahme gelöscht werden *muss*, dann sind die beiden Formeln nicht mehr ableitbar. Die Forderung, dass bei der Anwendung von $(\to\mathrm{I})$ eine Annahme gelöscht werden muss, ist jedoch keine ausreichende Beschränkung, wenn statt des implikativen Fragments der Kalkül des natürlichen Schließen NM für minimale Logik betrachtet wird. Dann ist nur

die zweite Formel nicht ableitbar, während die erste unter Einhaltung der Forderung, dass bei Anwendung von $(\to \mathrm{I})$ eine Annahme gelöscht werden muss, ableitbar ist:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^{(2)} \qquad B^{(1)}}{A \wedge B}\,(\wedge \mathrm{I})}{A}\,(\wedge \mathrm{E})}{B \to A}\,(\to \mathrm{I})\,(1)}{A \to (B \to A)}\,(\to \mathrm{I})\,(2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^{(3)}}{A \vee (B \to A)}\,(\vee \mathrm{I}) \qquad A^{(2)} \qquad \dfrac{B \to A^{(2)} \qquad B^{(1)}}{A}\,(\to \mathrm{E})}{A}\,(\vee \mathrm{E})\,(2)}{B \to A}\,(\to \mathrm{I})\,(1)}{A \to (B \to A)}\,(\to \mathrm{I})\,(3)$$

Die beiden Ableitungen sind allerdings nicht in Normalform (siehe Kapitel 3), und deren Normalisierung würde die Forderung bzgl. $(\to \mathrm{I})$ verletzen. In diesem Sinne ist die Forderung nicht hinreichend, um eine Relevanzlogik zu erhalten.

2.6 Quantorenlogik

Wir erweitern unsere Sprache um folgendes Vokabular:

Definition 2.3

(i) *Individuenkonstanten* (beliebig viele, metasprachliche Variablen: $k, k_1, k_2, k', \ldots$), *Prädikatkonstanten*, jeweils mit Stelligkeit (metaspr.: $P, Q, R, \ldots$).

(ii) *Individuenparameter* oder „freie“ Variablen (metaspr.: $a, b, c, \ldots$); gebundene Variablen (metaspr.: $x, y, z, \ldots$).

(iii) *Quantoren* $\forall$ und $\exists$.

(iv) *Terme:* Konstanten und Parameter: $t, s, \ldots$.

(v) *Atomformeln:* $P(t_1, \ldots, t_n)$ bzw. $Pt_1 \ldots t_n$.

Regeln für NK (quantorenlogisch)

Zu den junktorenlogischen Regeln werden die folgenden quantorenlogischen Regeln hinzugefügt:

Einführung		Beseitigung	
$(\forall \mathrm{I})$	$\dfrac{A(a)}{\forall x A(x)}$ a in keiner Annahme, von der $A(a)$ abhängt	$(\forall \mathrm{E})$	$\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)}$
$(\exists \mathrm{I})$	$\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)}$	$(\exists \mathrm{E})$	$\dfrac{\exists x A(x) \qquad \begin{matrix}[A(a)] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$ a nicht in C und in keiner Annahme außer $A(a)$, von der C abhängt

BEMERKUNGEN.
$A(a)$ bedeutet, dass der Individuenparameter a in der Formel A vorkommt.
$A(x)$ bedeutet, dass die gebundene Variable x in der Formel A vorkommt.
$A(t)$ bedeutet, dass der Term t in der Formel A vorkommt.

(i) Die $(\forall\,\mathrm{I})$-Regel drückt aus, dass wenn wir für einen Individuenparameter a die offene Formel $A(a)$ abgeleitet haben, wir auf $\forall x A(x)$ schließen dürfen. $A(a)$ ist zwar keine Aussage (d. h. keine geschlossene Formel), die Ableitung von $A(a)$ kann jedoch als Schema für Ableitungen für jedes *beliebige* Individuum aufgefasst werden (d. h. als Schema für Ableitungen, die mit den Aussagen $A(k), A(k_1), A(k_2), \ldots$ enden). Daher dürfen wir dann zur Aussage $\forall x A(x)$ übergehen.

    Die Prämisse $A(a)$ darf dabei nicht von Annahmen abhängen, in denen der Individuenparameter a vorkommt, da dann a nicht mehr für beliebige Individuen stehen kann. Insbesondere hängt $A(a)$ von sich selbst ab, wenn $A(a)$ eine Annahme ist.

(ii) In der $(\exists\,\mathrm{E})$-Regel drückt die Prämisse $\exists x A(x)$ aus, dass es (mindestens) ein Individuum gibt, für das A gilt. Nun nehmen wir an, dass für ein *beliebiges* Individuum A gilt – ausgedrückt durch $A(a)$. Wenn wir unter dieser Annahme die Prämisse C ableiten können, wobei a weder in C noch in einer Annahme außer Annahmen $A(a)$ vorkommt, dann dürfen wir zur Konklusion C übergehen, die dann unabhängig von Annahmen $A(a)$ ist.

BEISPIELE.

(i) Gebundene Umbenennung: $\exists x Px \vdash_{\mathrm{NK}} \exists y Py$

$$\dfrac{\exists x Px \qquad \dfrac{Pa^{\,(1)}}{\exists y Py}\,(\exists\,\mathrm{I})}{\exists y Py}\,(\exists\,\mathrm{E})\,(1)$$

Die Endformel hängt nicht mehr von der Annahme Pa ab.

(ii) $\exists x \forall y A(x,y) \vdash_{\mathrm{NK}} \forall y \exists x A(x,y)$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x \forall y A(x,y) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall y A(a,y)^{\,(1)}}{A(a,b)}\,(\forall\,\mathrm{E})}{\exists x A(x,b)}\,(\exists\,\mathrm{I})}{\exists x A(x,b)}\,(\exists\,\mathrm{E})\,(1)}{\forall y \exists x A(x,y)}\,(\forall\,\mathrm{I})$$

Im rechten Zweig könnte von $\forall y A(a,y)$ mit $(\forall\,\mathrm{E})$ zu $A(a,k)$ übergegangen werden, für eine Konstante k. Dann dürfte jedoch von $\exists x A(x,k)$ nicht mit $(\forall\,\mathrm{I})$ auf $\forall y \exists x A(x,y)$ geschlossen werden, da bei $(\forall\,\mathrm{I})$ ein Parameter verlangt wird.

(iii) $\exists x A(x) \to B \vdash_{\mathrm{NK}} \forall x (A(x) \to B)$ $\quad$ (x nicht frei in B)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x A(x) \to B \qquad \dfrac{A(a)^{\,(1)}}{\exists x A(x)}\,(\exists\,\mathrm{I})}{B}\,(\to\mathrm{E})}{A(a) \to B}\,(\to\mathrm{I})\,(1)}{\forall x (A(x) \to B)}\,(\forall\,\mathrm{I})$$

Statt der Annahme $A(a)$ hätte man auch die (weniger allgemeine) Annahme $A(k)$, für eine Konstante k, als Prämisse von $(\exists\,\mathrm{I})$ wählen können. Allerdings könnte dann von $A(k) \to B$ nicht mit $(\forall\,\mathrm{I})$ auf die Endformel geschlossen werden, da $(\forall\,\mathrm{I})$ in der Prämisse einen Parameter verlangt.

Definition 2.4
Der Parameter einer Regelanwendung mit Parameterbedingung heißt *Eigenparameter*.

Notwendigkeit der Eigenparameterbedingung bei $(\forall\,\mathrm{I})$ und $(\exists\,\mathrm{E})$

Die Notwendigkeit der Eigenparameterbedingung bei den Regeln $(\forall\,\mathrm{I})$ und $(\exists\,\mathrm{E})$ soll anhand folgender *inkorrekter* Ableitungen erläutert werden:

BEISPIELE.

(i) *Inkorrekte* Ableitung für $\exists x Px \vdash_{\mathrm{NK}} \forall x Px$:

$$\lightning \qquad \frac{\exists x Px \qquad \dfrac{Pa^{\,(1)}}{\forall x Px}\,(\forall\,\mathrm{I})\ \lightning}{\forall x Px}\,(\exists\,\mathrm{E})_{(1)} \qquad \lightning$$

Die Anwendung von $(\forall\,\mathrm{I})$ ist *inkorrekt*, da an dieser Stelle Pa eine offene Annahme ist, und somit der Eigenparameter a von $(\forall\,\mathrm{I})$ in einer Annahme vorkommt, von der Pa abhängt (offene Annahmen hängen von sich selbst ab). Die Eigenparameterbedingung von $(\forall\,\mathrm{I})$ ist also verletzt. (Die nachfolgende Anwendung von $(\exists\,\mathrm{E})$ ist korrekt.)

(ii) Weitere *inkorrekte* Ableitung für $\exists x Px \vdash_{\mathrm{NK}} \forall x Px$:

$$\lightning \qquad \dfrac{\dfrac{\exists x Px \qquad Pa^{\,(1)}}{Pa}\,(\exists\,\mathrm{E})_{(1)}\ \lightning}{\forall x Px}\,(\forall\,\mathrm{I}) \qquad \lightning$$

Die Anwendung von $(\exists\,\mathrm{E})$ ist *inkorrekt*, da der Eigenparameter a in der Prämisse Pa von $(\exists\,\mathrm{E})$ vorkommt. Die Eigenparameterbedingung von $(\exists\,\mathrm{E})$ ist also verletzt. (Die nachfolgende Anwendung von $(\forall\,\mathrm{I})$ ist korrekt.)

(iii) *Inkorrekte* Ableitung für $\exists x Px, \exists x \neg Px \vdash_{\mathrm{NK}} \bot$:

$$\lightning \qquad \frac{\exists x \neg Px \qquad \dfrac{\exists x Px \qquad \dfrac{\neg Pa^{\,(2)} \qquad Pa^{\,(1)}}{\bot}\,(\to\mathrm{E})}{\bot}\,(\exists\,\mathrm{E})_{(1)}\ \lightning}{\bot}\,(\exists\,\mathrm{E})_{(2)} \qquad \lightning$$

Die erste Anwendung von $(\exists\,\mathrm{E})$ ist *inkorrekt*, da hier der Eigenparameter a in einer Annahme außer Pa – nämlich in der noch offenen Annahme $\neg Pa$ – vorkommt, von der die Prämisse $\bot$ dieser Regelanwendung noch abhängt. Die Eigenparameterbedingung der ersten Anwendung von $(\exists\,\mathrm{E})$ ist also verletzt. (Hingegen ist die zweite Anwendung von $(\exists\,\mathrm{E})$ korrekt, da hier die Annahme Pa schon geschlossen ist, und der Eigenparameter a aus $\neg Pa$ somit in keiner Annahme außer $\neg Pa$ mehr vorkommt, von der die Prämisse $\bot$ an dieser Stelle abhängt.)

(iv) *Inkorrekte* Ableitung für $\exists x Px \vdash_{\mathrm{NK}} \forall x Px$:

$$\lightning \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x Px \qquad \dfrac{\neg Pa^{(2)} \qquad Pa^{(1)}}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\bot}\,(\exists\,\mathrm{E})\,(1)\ \lightning}{Pa}\,(\bot)_c\,(2)}{\forall x Px}\,(\forall\,\mathrm{I}) \qquad \lightning$$

Wie in (iii) ist auch hier die Anwendung von ($\exists$ E) *inkorrekt*. (Die Anwendung von ($\forall$ I) ist korrekt.)

Definition 2.5
Schematische Darstellung von Ableitungen:

(i)
$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ B \end{array}$$
„$\mathcal{D}$ endet mit B."

(ii)
$$\begin{array}{c} A_1, \dots, A_n \\ \mathcal{D} \\ B \end{array}$$
„$\mathcal{D}$ endet mit B, und $A_1, \dots, A_n$ können offene Annahmen in $\mathcal{D}$ sein."

(iii)
$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [A_1, \dots, A_n] & \\ \dots & \mathcal{D} & \dots \end{array}}{C}$$
„In $\mathcal{D}$ können $A_1, \dots, A_n$ als offene Annahmen vorkommen, die jedoch beim Übergang zu C gelöscht werden."

(iv)
$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_i \\ A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \\ \mathcal{D} \end{array}$$
„Die offenen Annahmen A_i in $\mathcal{D}$ werden durch $\mathcal{D}_i$ ersetzt, wobei $\mathcal{D}_i$ mit A_i endet."
(Diese Notation bezieht sich auf diejenigen A_i, die im Kontext gemeint sind, also nicht notwendigerweise auf alle vorkommenden A_i.)

Definition 2.6

(i) *Hauptprämisse* bei Beseitigungsregeln ist diejenige Prämisse, in der das eliminierte logische Zeichen vorkommt. *Nebenprämissen* sind die anderen Prämissen (kommen bei ($\vee$ E), ($\to$ E) und ($\exists$ E) vor).

(ii) $\mathcal{D}$ ist eine *Ableitung von A aus X*, falls A Endformel von $\mathcal{D}$ ist und jede offene Annahme aus $\mathcal{D}$ in X vorkommt.

(iii) $\mathcal{D}$ ist eine *von X abhängige Ableitung von A*, falls $\mathcal{D}$ Ableitung von A aus X ist und jede Formel in X als offene Annahme in $\mathcal{D}$ vorkommt.

(iv) A ist aus X *ableitbar*, falls es eine Ableitung von A aus X gibt. *Notation:* $X \vdash_{\mathrm{NK}} A$, bzw. $X \vdash_{\mathrm{NI}} A$ oder $X \vdash_{\mathrm{NM}} A$. (Falls der Kalkül im Kontext klar ist: $X \vdash A$.)

Definierbarkeit von $\exists$ und $\forall$

Statt Regelpaare für die Quantoren $\forall$ *und* $\exists$ einzuführen, genügt es, nur für einen Quantor ein Regelpaar anzugeben. Gibt man z. B. Regeln für $\forall$ an, dann kann $\exists x A(x)$ durch $\neg\forall x \neg A(x)$ definiert werden. Der Kalkül NK$'$ unterscheidet sich dann von NK durch das Fehlen der Regeln ($\exists$ I) und ($\exists$ E).

Damit dieser Kalkül äquivalent zu NK ist, muss Folgendes gelten:

(i) $A(t) \vdash_{\mathrm{NK}'} \exists x A(x)$.

(ii) Wenn $X, A(a) \vdash_{\mathrm{NK}'} C$, dann $X, \exists x A(x) \vdash_{\mathrm{NK}'} C$, wobei X eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a nicht in C und in keiner Annahme in X vorkommt, von der C abhängt.

Beweis.

(i) Es ist

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \neg A(x)^{\,(1)}}{\neg A(t)}\,(\forall\,\mathrm{E}) \qquad A(t)}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg\forall x \neg A(x)}\,(\to \mathrm{I})\,{\scriptstyle (1)}$$

Somit gilt mit $\exists x A(x) := \neg\forall x \neg A(x)$, dass $A(t) \vdash_{\mathrm{NK}'} \exists x A(x)$. Obige Ableitung kann durch

$$\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)}$$

abgekürzt werden; man erhält also $(\exists\,\mathrm{I})$.

(ii) Sei $\begin{array}{c} X, A(a) \\ \vdots \\ C \end{array}$ eine Ableitung von C aus X und $A(a)$, wobei X eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a nicht in C und in keiner Annahme in X vorkommt, von der C abhängt. Dann gilt wegen

$$\dfrac{\neg\forall x \neg A(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg C^{\,(2)} \qquad \begin{array}{c} X, A(a)^{\,(1)} \\ \vdots \\ C \end{array}}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg A(a)}\,(\to \mathrm{I})\,{\scriptstyle (1)}}{\forall x \neg A(x)}\,(\forall\,\mathrm{I})}{\dfrac{\bot}{C}\,(\bot)_c\,{\scriptstyle (2)}}\,(\to \mathrm{E})$$

unter Verwendung von $\exists x A(x) := \neg\forall x \neg A(x)$, dass $X, \exists x A(x) \vdash_{\mathrm{NK}'} C$.

Obige Ableitung kann durch

$$\dfrac{\exists x A(x) \qquad \begin{array}{c} [A(a)] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}$$

abgekürzt werden; man erhält also $(\exists\,\mathrm{E})$ (mit entsprechender Eigenparameterbedingung). □

Entsprechend kann man auch $\exists$ als Grundzeichen wählen, und dann $\forall x A(x)$ durch $\neg\exists x \neg A(x)$ definieren. Der Kalkül NK′ unterscheidet sich dann von NK durch das Fehlen der Regeln $(\forall\,\mathrm{I})$ und $(\forall\,\mathrm{E})$.

Damit dieser Kalkül äquivalent zu NK ist, muss Folgendes gelten:

(i) Wenn $X \vdash_{\mathrm{NK}'} A(a)$, dann $X \vdash_{\mathrm{NK}'} \forall x A(x)$, wobei X eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a in keiner Annahme in X vorkommt, von der $A(a)$ abhängt.

(ii) $\forall x A(x) \vdash_{\mathrm{NK}'} A(t)$.

BEWEIS.

(i) Sei $\begin{array}{c} X \\ \vdots \\ A(a) \end{array}$ eine Ableitung von $A(a)$ aus X, wobei X eine Menge von Annahmen ist, und der Parameter a in keiner Annahme in X vorkommt, von der $A(a)$ abhängt. Dann gilt wegen

$$\dfrac{\dfrac{\exists x \neg A(x)^{(2)} \qquad \dfrac{\neg A(a)^{(1)} \qquad \begin{array}{c} X \\ \vdots \\ A(a) \end{array}}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\bot}\,(\exists\,\mathrm{E})\,(1)}{\neg\exists x \neg A(x)}\,(\to \mathrm{I})\,(2)$$

unter Verwendung von $\forall x A(x) := \neg\exists x \neg A(x)$, dass $X \vdash_{\mathrm{NK}'} \forall x A(x)$. Obige Ableitung kann durch

$$\dfrac{A(a)}{\forall x A(x)}$$

abgekürzt werden; man erhält also ($\forall$ I) (mit entsprechender Eigenparameterbedingung).

(ii) Es ist

$$\dfrac{\dfrac{\neg\exists x \neg A(x) \qquad \dfrac{\neg A(t)^{(1)}}{\exists x \neg A(x)}\,(\exists\,\mathrm{I})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{A(t)}\,(\bot)_c\,(1)$$

Somit gilt mit $\forall x A(x) := \neg\exists x \neg A(x)$, dass $\forall x A(x) \vdash_{\mathrm{NK}'} A(t)$. Obige Ableitung kann durch

$$\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)}$$

abgekürzt werden; man erhält also ($\forall$ E). □

2.7 Induktionsbeweis, zwei Lemmas

Im Folgenden werden zwei Lemmas per Induktion bewiesen. Was ein Induktionsbeweis ist, soll zunächst an folgendem Beispiel erläutert werden.

BEISPIEL für Induktionsbeweis.
Wir beweisen per (vollständiger) Induktion über dem Formelaufbau, dass die Anzahl der Klammern in Formeln immer gerade ist. (Wir betrachten Formeln ohne Klammerersparnis, die so definiert sind: Wenn A, B Formeln sind, dann sind auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ und $\neg A$ Formeln.

BEWEIS.

Induktionsanfang: Für atomare Formeln A ist die Anzahl n_A an Klammern 0. 0 ist gerade, also Induktionsanfang erfüllt.

Induktionsannahme: Die Anzahl der Klammern n_A bzw. n_B der (komplexen) Formeln A bzw. B sei gerade.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass die Anzahl der Klammern in $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ und $\neg A$ dann ebenfalls gerade ist.

1. Fall: Die Anzahl der Klammern in $(A \wedge B)$ ist $n_A + n_B + 2$; da n_A, n_B nach Induktionsannahme gerade, ist auch $n_A + n_B + 2$ gerade.

2. und 3. Fall: Für $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$ wie im 1. Fall.

4. Fall: Die Anzahl der Klammern in $\neg A$ ist $n_A + n_B + 0$; da n_A, n_B nach Induktionsannahme gerade, ist auch $n_A + n_B + 0$ gerade.

Somit ist die Anzahl der Klammern in Formeln immer gerade. □

Voraussetzung für einen Induktionsbeweis ist die Existenz eines *Induktionsmaßes* nach dem die Objekte, über denen Induktion geführt wird, wie die natürlichen Zahlen geordnet werden können. In obigem Beispiel war das Induktionsmaß die Anzahl an Klammern.

Sei k_0 das gemäß einem Induktionsmaß kleinste Objekt, a ein beliebiges Objekt und a' das gemäß dem Induktionsmaß auf a folgende Objekt. Dann lautet die *Induktionsregel*:

$$\dfrac{A(k_0) \qquad \begin{matrix}[A(a)] \\ \vdots \\ A(a')\end{matrix}}{A(t)}\ \text{(Induktionsregel)}$$

wobei der Parameter a in keiner Annahme außer $A(a)$ vorkommen darf, von der $A(a')$ abhängt. Die linke Prämisse $A(k_0)$ ist der Induktionsanfang, $A(a)$ ist die Induktionsannahme, und die Ableitung von $A(a')$ unter Verwendung der Induktionsannahme $A(a)$ ist der Induktionsschritt. Ein Induktionsbeweis entspricht dann folgendem Schema:

$$\dfrac{\dfrac{A(k_0) \qquad \begin{matrix}[A(a)] \\ \vdots \\ A(a')\end{matrix}}{A(b)}\ \text{(Induktionsregel)}}{\forall x A(x)}\ (\forall \mathrm{I})$$

Nun zu den beiden Lemmas.

Lemma 2.7
Die Stärke von NI wird nicht eingeschränkt, wenn man bei $(\perp)$ annimmt, dass die Konklusion atomar ist. Dasselbe gilt für NK und $(\perp)_c$ für Formeln ohne $\vee$ und $\exists$. (Die logische Konstante $\perp$ wird nicht als atomare Formel behandelt.)

BEWEIS.
Sei $(\perp)^a$ die auf atomare Konklusionen eingeschränkte Regel $(\perp)$. Dann ist zu zeigen:

$$\text{Wenn } X \vdash_{\mathrm{NI}} A \text{ mit } (\perp)\text{, dann } X \vdash_{\mathrm{NI}} A \text{ mit } (\perp)^a \text{ anstelle von } (\perp). \qquad (*)$$

Angenommen, $X \vdash_{\mathrm{NI}} A$ wird durch die Ableitung

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{C}\,(\bot) \\ \mathcal{D}' \\ A \end{array}$$

gezeigt, in der die herausgestellte Anwendung der Regel $(\bot)$ die Konklusion C mit beliebiger Komplexität hat, und alle anderen möglicherweise vorkommenden Anwendungen von $(\bot)$ Konklusionen geringerer Komplexität haben. Wir führen Induktion über dem Aufbau der Formel C. (Die Endformel A kann von Annahmen X abhängen, die wir hier jedoch nicht notieren.)

Induktionsanfang: Sei C atomar. Dann hat die Ableitung die Form

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{C}\,(\bot)^a \\ \mathcal{D}' \\ A \end{array}$$

Induktionsannahme: Die Aussage $(*)$ gelte für Konklusionen D und E der Regel $(\bot)$.

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass $(*)$ dann auch für Konklusionen C der Form $\neg D$, $D \wedge E$, $D \vee E$, $D \to E$, $\forall x A(x)$ und $\exists x A(x)$ gilt. (Ist C das Falsum, kann auf die Anwendung von $(\bot)$ verzichtet werden.)

Wir betrachten den Fall der Konklusion $D \wedge E$, d. h. die Ableitung

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{D \wedge E}\,(\bot) \\ \mathcal{D}' \\ A \end{array}$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme kann diese Ableitung umgeformt werden zu

$$\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{D}\,(\bot)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{E}\,(\bot)\end{array}}{D \wedge E}\,(\wedge\mathrm{I}) \\ \mathcal{D}' \\ A \end{array}$$

Restliche Fälle als Übungsaufgabe.

Dies zeigt, wie sich die Komplexität der Konklusion C von $(\bot)$ schrittweise verringern lässt, bis C schließlich atomar ist. Anstelle von $(\bot)$ kann also $(\bot)^a$ verwendet werden, ohne dass die Stärke von NI dadurch eingeschränkt wird.

Für NK und Formeln ohne $\vee$ und $\exists$ zeigt man per Induktion entsprechend:

$$\text{Wenn } X \vdash_{\mathrm{NK}} A \text{ mit } (\bot)_c\text{, dann } X \vdash_{\mathrm{NK}} A \text{ mit } (\bot)_c^a \text{ anstelle von } (\bot)_c. \qquad (**)$$

(Wobei $(\bot)_c^a$ die auf atomare Konklusionen eingeschränkte Regel $(\bot)_c$ sei.)
Wir verfahren wie bei NI. Angenommen, $X \vdash_{\mathrm{NK}} A$ wird durch die Ableitung

$$\begin{array}{c} [\neg C] \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{C}\,(\bot)_c \\ \mathcal{D}' \\ A \end{array}$$

gezeigt.

Induktionsanfang: Sei C atomar. Dann hat die Ableitung die Form

$$\begin{array}{c} [\neg C] \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{C}\,(\bot)_c^a \\ \mathcal{D}' \\ A \end{array}$$

Induktionsannahme: Die Aussage $(**)$ gelte für Konklusionen D und E der Regel $(\bot)_c$.

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass $(**)$ dann auch für Konklusionen C der Form $\neg D$, $D \wedge E$, $D \to E$ und $\forall x A(x)$ gilt.

Wir betrachten wieder nur den Fall der Konklusion $D \wedge E$, d. h. die Ableitung

$$\begin{array}{c} [\neg(D \wedge E)] \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{D \wedge E}\,(\bot)_c \\ \mathcal{D}' \\ A \end{array}$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme kann diese Ableitung umgeformt werden zu

$$\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{[\neg D] \qquad \dfrac{[D \wedge E]}{D}\,(\wedge \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg(D \wedge E)}\,(\to \mathrm{I}) \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{D}\,(\bot)_c \end{array} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{[\neg E] \qquad \dfrac{[D \wedge E]}{E}\,(\wedge \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg(D \wedge E)}\,(\to \mathrm{I}) \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{E}\,(\bot)_c \end{array}}{D \wedge E}\,(\wedge \mathrm{I}) \\ \mathcal{D}' \\ A \end{array}$$

Restliche Fälle als Übungsaufgabe. □

Definition 2.8
Eine Regel R ist *zulässig* in einem Kalkül K, wenn folgende Implikation gilt:

$$\text{Wenn} \vdash_{K+R} A, \text{ dann} \vdash_K A.$$

(Dabei bedeutet $\vdash_{K+R} A$, dass A in dem um die Regel R erweiterten Kalkül K ableitbar ist, und $\vdash_K A$ bedeutet, dass A im Kalkül K ohne die Regel R ableitbar ist.)

BEMERKUNG.
Lemma 2.7 kann dann auch so formuliert werden: Sei NI^a der Kalkül NI, bzw. NK^a der Kalkül NK, mit der auf atomare Konklusionen beschränkten Regel $(\bot)^a$, bzw. $(\bot)_c^a$. Dann ist die Regel $(\bot)$, bzw. $(\bot)_c$, zulässig in NI^a, bzw. NK^a.

Lemma 2.9 (Parameterseparierung)
Gegeben sei eine unendliche echte Teilmenge $\mathcal{P}$ der Menge der Parameter.
Jede Ableitung $\mathcal{D}$ von A aus X lässt sich in eine Ableitung $\mathcal{D}'$ von A aus X umformen, so dass gilt:

(i) *Alle Eigenparameter von $\mathcal{D}'$ sind in $\mathcal{P}$.*

(ii) *Jeder Eigenparameter in $\mathcal{D}'$ ist Eigenparameter einer* einzigen *Anwendung von* $(\forall\,\mathrm{I})$ *oder* $(\exists\,\mathrm{E})$.

(iii) *Der Eigenparameter einer Anwendung von* $(\forall\,\mathrm{I})$ *kommt nur über dieser Anwendung vor.*

(iv) *Der Eigenparameter einer Anwendung von* $(\exists\,\mathrm{E})$ *kommt nur über der Nebenprämisse dieser Anwendung vor.*

(v) *Bis auf Umbenennung von Parametern unterscheiden sich $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ nicht.*

BEWEIS.
Induktion über dem Aufbau von Ableitungen $\mathcal{D}$, wobei die Menge aller Parameter $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$ sei, und $\mathcal{P} = \{b_1, b_2, \ldots\}$.

(a) Induktionsanfang: Sei $\mathcal{D}$ die Ableitung $A(a_i)$. Dann ist auch $A(b_j)$ eine Ableitung.

(b) Für alle Regelanwendungen ohne Eigenparameter gilt:

Mit $\dfrac{A(a_i)}{B(a_i)}$ ist auch $\dfrac{A(b_j)}{B(b_j)}$ eine Anwendung derselben Regel.

Bei Regeln mit zwei Prämissen gilt entsprechend: Mit $\dfrac{A(a_i) \quad B(a_j)}{C(a_i, a_j)}$ ist auch $\dfrac{A(b_k) \quad B(b_l)}{C(b_k, b_l)}$ eine Anwendung derselben Regel. Analog für $(\vee\,\mathrm{E})$.

(c) Bei Anwendungen von $(\forall\,\mathrm{I})$ oder $(\exists\,\mathrm{E})$ wähle die oberste Anwendung von $(\forall\,\mathrm{I})$ oder $(\exists\,\mathrm{E})$, bei welcher der Eigenparameter a_i nicht aus $\mathcal{P}$ oder Eigenparameter einer weiteren Anwendung von $(\forall\,\mathrm{I})$ oder $(\exists\,\mathrm{E})$ ist; d. h., alle Anwendungen von $(\forall\,\mathrm{I})$ oder $(\exists\,\mathrm{E})$ über einer solchen Anwendung haben nach Induktionsannahme schon Eigenparameter gemäß (i)–(v). Dann kann der Eigenparameter a_i durch einen neuen Parameter b_j im Fall von $(\forall\,\mathrm{I})$ in allen Formeln, von denen die Prämisse von $(\forall\,\mathrm{I})$ abhängt, bzw. im Fall von $(\exists\,\mathrm{E})$ in allen Formeln, die von bei Anwendung von $(\exists\,\mathrm{E})$ gelöschten Annahmen abhängen, ersetzt werden. □

Bemerkung.
Im Folgenden können wir davon ausgehen, dass Eigenparameter separiert sind, d. h. nur über einer Regelanwendung und sonst nirgendwo in der Ableitung vorkommen. (Parameterseparierheit ist notwendig bei der Normalisierung von Ableitungen; siehe Kapitel 3.)

Definition 2.10
$A[a/t]$ bezeichnet die *Substitution* von t für a in A. $A[a/t]$ ist also die Formel, die man durch Ersetzung aller Vorkommen von a durch t in A erhält.

Korollar 2.11
Die Ableitung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}}{A}$ *erfülle die Bedingungen aus Lemma 2.9. Der Term t enthalte keine Parameter aus $\mathcal{P}$. Der Parameter a komme in A vor. Dann ist* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}[a/t]}{A[a/t]}$ *eine Ableitung, wobei $\mathcal{D}[a/t]$ aus $\mathcal{D}$ durch Ersetzung* jedes *Vorkommens von a durch t entstehe.*

2.8 Das Inversionsprinzip

Zum Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln bemerkt Gentzen [3, S. 189]:

> Die Einführungen stellen sozusagen die „Definitionen“ der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon, was sich etwa so ausdrücken lässt: Bei der Beseitigung eines Zeichens darf die betreffende Formel, um deren äußerstes Zeichen es sich handelt, nur „als das benutzt werden, was sie auf Grund der Einführung dieses Zeichens bedeutet“.

Prawitz [7, S. 33] präzisiert dies im sogenannten *Inversionsprinzip*:

> Let α be an application of an elimination rule that has B as consequence. Then, deductions that satisfy the sufficient condition [...] for deriving the major premiss of α, when combined with deductions of the minor premisses of α (if any), already “contain” a deduction of B; the deduction of B is thus obtainable directly from the given deductions without the addition of α.

Die hinreichenden Bedingungen sind dabei durch die Prämissen der entsprechenden Einführungsregeln gegeben. Das Inversionsprinzip sagt dann, dass man eine Ableitung der Konklusion einer Beseitigungsregel ohne die Anwendung dieser Beseitigungsregel erhalten kann, wenn die Hauptprämisse dieser Beseitigungsregel im letzten Schritt mit einer Einführungsregel abgeleitet wurde.

Beispiel.
In der Ableitung

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{A\to B}\,(\to\mathrm{I}) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ A\end{array}}{B}\,(\to\mathrm{E})$$

wird die Hauptprämisse $A\to B$ von $(\to\mathrm{E})$ im letzten Schritt mit $(\to\mathrm{I})$ abgeleitet. Nach dem Inversionsprinzip kann die Konklusion B der Beseitigungsregel $(\to\mathrm{E})$ dann auch ohne ($\rightarrow$ E) abgeleitet werden:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}' \\ A \\ \mathcal{D} \\ B \end{array}$$

Im Allgemeinen besagt das Inversionsprinzip, dass Ableitungen der Form

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{A}\,\text{I-Regel} \qquad \mathcal{D}_3 \qquad \mathcal{D}_4}{B}\,\text{E-Regel}$$

in denen die Konklusion einer Einführungsregel (I-Regel) zugleich Hauptprämisse der entsprechenden Beseitigungsregel (E-Regel) ist, vermieden werden können (wobei $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ und $\mathcal{D}_4$ je nach Regel auch fehlen können).

BEMERKUNG.
In einer Weiterführung von Gentzens Ideen durch Prawitz und Dummett wird das Verhältnis von Einführungs- und Beseitigungsregeln dann wie folgt aufgefasst: Die Einführungsregeln legen die Bedeutung der logischen Zeichen fest, während die Beseitigungsregeln einer Rechtfertigung bedürfen. Die Rechtfertigung besteht dann in dem Nachweis, dass das Inversionsprinzip gilt, bzw. darin, dass Ableitungen normalisiert werden können.

3 Normalisierung für NK

Wir betrachten das System NK *ohne* $\vee, \exists$ (vgl. Aufgaben). Ferner habe $(\bot)_c$ atomare Konklusionen (vgl. Aufgabe); wir bezeichnen die Regel $(\bot)_c^a$ im Folgenden deshalb einfach als $(\bot)_c$. Parameter seien separiert (Lemma 2.9).

Definition 3.1
Ein Formelvorkommen einer Ableitung heißt *maximal*, wenn es Konklusion der Anwendung einer Einführungsregel und zugleich Hauptprämisse der Anwendung einer Beseitigungsregel ist. Die entsprechende Formel heißt *Maximalformel*.
Eine Ableitung heißt *normal*, wenn sie kein maximales Formelvorkommen enthält. Die Ableitung ist dann in *Normalform*.

ARBEITSBLATT.
Welche Formelvorkommen sind maximal?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\land B^{(2)}}{A}\,(\land\mathrm{E})}{\boxed{C\to A}}\,(\to\mathrm{I}) \qquad \dfrac{B\to C^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\land B^{(2)}}{A}\,(\land\mathrm{E}) \quad \dfrac{A\land B^{(2)}}{B}\,(\land\mathrm{E})}{\boxed{A\land B}}\,(\land\mathrm{I})}{B}\,(\land\mathrm{E})}{C}\,(\to\mathrm{E})}{A}\,(\to\mathrm{E})}{(B\to C)\to A}\,(\to\mathrm{I})\,(1)}{(A\land B)\to((B\to C)\to A)}\,(\to\mathrm{I})\,(2)$$

◁

Definition 3.2
Wir definieren *Umformungen* (*Kontraktionen*) von Ableitungen:

$$\text{(i)}\quad \left.\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ A_2\end{matrix}}{A_1\land A_2}\,(\land\mathrm{I})}{A_i}\,(\land\mathrm{E})\right\} \rightsquigarrow \begin{matrix}\mathcal{D}_i\\ A_i\end{matrix} \qquad i\in\{1,2\}$$

$$\text{(ii)}\quad \left.\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}}{A\to B}\,(\to\mathrm{I}) \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix}}{B}\,(\to\mathrm{E})\right\} \rightsquigarrow \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}$$

D. h. alle bei $(\to\mathrm{I})$ gelöschten Annahmen A werden durch $\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix}$ ersetzt. Gibt es keine solchen Annahmen, dann wird die Ableitung zu $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ B\end{matrix}$ umgeformt.

$$\text{(iii)}\quad \left.\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A(a)\end{matrix}}{\forall x A(x)}\,(\forall\mathrm{I})}{A(t)}\,(\forall\mathrm{E})\right\} \rightsquigarrow \begin{matrix}\mathcal{D}[a/t]\\ A(t)\end{matrix}$$

$\mathcal{D} \rhd_1 \mathcal{D}'$ („$\mathcal{D}$ kontrahiert zu $\mathcal{D}'$“) falls $\mathcal{D}'$ aus $\mathcal{D}$ durch Ausführung eines Kontraktionsschrittes an einer Teilableitung von $\mathcal{D}$ sowie durch Umformung zur Herstellung der Parametersepariertheit (vgl. Lemma 2.9) hervorgeht.

$\mathcal{D} \rhd \mathcal{D}'$ („$\mathcal{D}$ reduziert zu $\mathcal{D}'$“) falls $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \rhd_1 \ldots \rhd_1 \mathcal{D}_n = \mathcal{D}'$ (für $n \geq 1$).

Arbeitsblatt.
Normalisieren Sie die folgende Ableitung $\mathcal{D}$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \land B^{(2)}$}
\RightLabel{$(\land \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I})$}
\UnaryInfC{$\boxed{C \to A}$}
\AxiomC{$B \to C^{(1)}$}
\AxiomC{$A \land B^{(2)}$}
\RightLabel{$(\land \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$A \land B^{(2)}$}
\RightLabel{$(\land \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$(\land \mathrm{I})$}
\BinaryInfC{$\boxed{A \land B}$}
\RightLabel{$(\land \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$(\to \mathrm{E})$}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{$(\to \mathrm{E})$}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I})\ (1)$}
\UnaryInfC{$(B \to C) \to A$}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I})\ (2)$}
\UnaryInfC{$(A \land B) \to ((B \to C) \to A)$}
\end{prooftree}
$$

$\mathcal{D}$ kontrahiert mit (i) zu

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \land B^{(2)}$}
\RightLabel{$(\land \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I})$}
\UnaryInfC{$\boxed{C \to A}$}
\AxiomC{$B \to C^{(1)}$}
\AxiomC{$A \land B^{(2)}$}
\RightLabel{$(\land \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$(\to \mathrm{E})$}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{$(\to \mathrm{E})$}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I})\ (1)$}
\UnaryInfC{$(B \to C) \to A$}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I})\ (2)$}
\UnaryInfC{$(A \land B) \to ((B \to C) \to A)$}
\end{prooftree}
$$

und mit (ii) zu $\mathcal{D}'$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \land B^{(1)}$}
\RightLabel{$(\land \mathrm{E})$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I})$}
\UnaryInfC{$(B \to C) \to A$}
\RightLabel{$(\to \mathrm{I})\ (1)$}
\UnaryInfC{$(A \land B) \to ((B \to C) \to A)$}
\end{prooftree}
$$

Die Ableitung $\mathcal{D}'$ enthält kein maximales Formelvorkommen, ist also in Normalform. Statt zuerst mit (i) zu kontrahieren, hätte eine Umformung mit (ii) die Ableitung $\mathcal{D}$ in einem Schritt reduziert. Es gibt also im Allgemeinen mehrere Reduktionen. $\lhd$

Bemerkung.
Für $\lor$ und $\exists$ müsste man zusätzlich noch folgende Umformungen definieren:

$$
\text{(iv)}\quad \left.\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A_i\end{matrix}}{A_1 \lor A_2}\,(\lor \mathrm{I}) \qquad \begin{matrix}[A_1]\\ \mathcal{D}_1\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A_2]\\ \mathcal{D}_2\\ C\end{matrix}}{C}\,(\lor \mathrm{E})\ \right\}\quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ A_i\\ \mathcal{D}_i\\ C\end{matrix} \qquad i \in \{1,2\}
$$

$$
\text{(v)}\quad \left.\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A(t)\end{matrix}}{\exists x A(x)}\,(\exists \mathrm{I}) \qquad \begin{matrix}[A(a)]\\ \mathcal{D}'\\ C\end{matrix}}{C}\,(\exists \mathrm{E})\ \right\}\quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ A(t)\\ \mathcal{D}'[a/t]\\ C\end{matrix}
$$

Da bei $(\lor \mathrm{E})$ und $(\exists \mathrm{E})$ die Nebenprämisse(n) C gleich der Konklusion sind, kann es Folgen identischer Formeln geben, in denen das oberste Formelvorkommen Konklusion einer I-Regel ist, und das unterste Vorkommen Hauptprämisse einer E-Regel ist.

Zum Beispiel gibt es in der Ableitung

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{A \vee A} \quad \dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\,(\wedge\,\mathrm{I}) \quad \dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\,(\wedge\,\mathrm{I})}{\dfrac{A \wedge A}{A}\,(\wedge\,\mathrm{E})}\,(\vee\,\mathrm{E})$$

kein maximales Formelvorkommen der Formel $A \wedge A$. Es können also keine Umformungen angewendet werden, d. h., die Ableitung ist in Normalform. Allerdings gilt für diese Ableitung die Teilformeleigenschaft (siehe Theorem 3.7) nicht, da $A \wedge A$ weder Teilformel einer offenen Annahme noch Teilformel der Endformel ist.

Um Folgen identischer Formeln auflösen zu können, müssen noch folgende *Permutationen* definiert werden, bei denen E-Regeln über die Nebenprämissen von $(\vee\,\mathrm{E})$ und $(\exists\,\mathrm{E})$ nach oben permutiert werden ($\{\mathcal{D}_k\}$ stehe für Ableitungen von Nebenprämissen):

(vi) $$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{A \vee B} \quad \overset{\mathcal{D}_1}{C} \quad \overset{\mathcal{D}_2}{C}}{C}\,(\vee\,\mathrm{E}) \quad \{\mathcal{D}_k\}}{D}\,\text{E-Regel} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\overset{\mathcal{D}}{A \vee B} \quad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{C} \quad \{\mathcal{D}_k\}}{D}\,\text{E-Regel} \quad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_2}{C} \quad \{\mathcal{D}_k\}}{D}}{D}\,(\vee\,\mathrm{E})$$

(vii) $$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\exists x A(x)} \quad \overset{\mathcal{D}'}{C}}{C}\,(\exists\,\mathrm{E}) \quad \{\mathcal{D}_k\}}{D}\,\text{E-Regel} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\exists x A(x)} \quad \dfrac{\overset{\mathcal{D}'}{C} \quad \{\mathcal{D}_k\}}{D}\,\text{E-Regel}}{D}\,(\exists\,\mathrm{E})$$

Eine Anwendung der Permutation (vi) auf die obige Beispielableitung ergibt dann die Ableitung

$$\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{A \vee A} \quad \dfrac{\dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\,(\wedge\,\mathrm{I})}{A}\,(\wedge\,\mathrm{E}) \quad \dfrac{\dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\,(\wedge\,\mathrm{I})}{A}\,(\wedge\,\mathrm{E})}{A}\,(\vee\,\mathrm{E})$$

mit zwei maximalen Formelvorkommen $A \wedge A$. Diese Ableitung reduziert in zwei Kontraktionsschritten zur normalen Ableitung

$$\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{A \vee A} \quad [A] \quad [A]}{A}\,(\vee\,\mathrm{E})$$

die nun auch die Teilformeleigenschaft hat.

Da in NK $\vee$ bzw. $\exists$ durch andere logische Zeichen ausgedrückt werden kann, können wir bei NK auf diese zusätzlichen Umformungen verzichten. (In NI geht das nicht, da dort $\vee$ und $\exists$ nicht durch andere logische Zeichen ausgedrückt werden können.)

Lemma 3.3
Ist $\mathcal{D}$ eine Ableitung von A aus X und $\mathcal{D} \rhd \mathcal{D}'$, dann ist $\mathcal{D}'$ ebenfalls eine Ableitung von A aus X.

BEWEIS.
(i) Annahmen gehen höchstens verloren; es kommen keine Annahmen hinzu.

(ii) Wegen Parameterseparierheit enthält t (in der Umformung (iii)) keine Eigenparameter von $\mathcal{D}$. (Unter $(\forall\,\mathrm{I})$ kommt der Eigenparameter a nicht mehr vor.) $\square$

Notwendigkeit der Parameterseparierheit

Dass bei der Umformung von Ableitungen Parameterseparierheit verlangt werden muss, zeigt folgendes Beispiel.

ARBEITSBLATT.
Warum sind in der untenstehenden (linken) Ableitung (a komme in keiner Annahme in $\mathcal{D}'$ vor, von der $P(a,a)$ abhängt) Parameter nicht separiert?

> In der Ableitung sind Parameter nicht separiert, da der Eigenparameter b der ersten $(\forall\,\mathrm{I})$ nicht nur über dieser Anwendung, sondern auch darunter vorkommt.

Kontrahieren Sie die linke Ableitung, um das maximale Formelvorkommen $\forall z P(z,z)$ (eingerahmt) zu beseitigen.

$$
\begin{array}{rcl}
 & \mathcal{D}' & \\
 & \left.\begin{array}{c} \forall x P(x,a) \\ \hline P(b,a) \\ \hline \forall y P(y,a) \end{array}\right\}\mathcal{D} & \begin{array}{l} (\forall\,\mathrm{E}) \\ (\forall\,\mathrm{I}) \end{array} \\ \hline
(\forall\,\mathrm{E}) & P(a,a) & \\ \hline
 & \boxed{\forall z P(z,z)} & (\forall\,\mathrm{I}) \\ \hline
 & P(b,b) & (\forall\,\mathrm{E})
\end{array}
\quad \rhd_1 \quad
\begin{array}{c}
\mathcal{D}'[a/b] \\
\lightning\ \left.\begin{array}{c} \forall x P(x,b) \\ \hline P(b,b) \\ \hline \forall y P(y,b) \end{array}\right\} = \mathcal{D}[a/b] \\ \hline
P(b,b)
\end{array}
$$

Warum ist die resultierende Ableitung *nicht* korrekt?

> Von $P(b,b)$ darf mit $(\forall\,\mathrm{I})$ nicht zu $\forall y P(y,b)$ übergegangen werden.

Stellen Sie in der linken Ableitung Parameterseparierheit her, und kontrahieren Sie die Ableitung, um das maximale Formelvorkommen $\forall z P(z,z)$ zu beseitigen.

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{D}' \\
\left.\begin{array}{c} \forall x P(x,a) \\ \hline P(b,a) \\ \hline \forall y P(y,a) \end{array}\right\}\mathcal{D} \\ \hline
P(a,a) \\ \hline
\boxed{\forall z P(z,z)} \\ \hline
P(b,b)
\end{array}
\quad \underset{\rightsquigarrow}{\begin{array}{c}\text{Parameter-}\\\text{separierung}\end{array}} \quad
\begin{array}{c}
\mathcal{D}' \\
\forall x P(x,a) \\ \hline P(b,a) \\ \hline \forall y P(y,a) \\ \hline
P(a,a) \\ \hline
\boxed{\forall z P(z,z)} \\ \hline
P(c,c)
\end{array}
\quad \rhd_1 \quad
\begin{array}{c}
\mathcal{D}'[a/c] \\
\left.\begin{array}{c} \forall x P(x,c) \\ \hline P(b,c) \\ \hline \forall y P(y,c) \end{array}\right\} = \mathcal{D}[a/c] \\ \hline
P(c,c)
\end{array}
$$

> Die resultierende Ableitung ist korrekt. (Parameterseparierheit läge jedoch nicht mehr vor, falls c Eigenparameter von $\forall x P(x,c)$ wäre, d. h. falls $\forall x P(x,c)$ Konklusion von $(\forall\,\mathrm{I})$ statt von $(\perp)_c$.) $\lhd$

Theorem 3.4 (Normalisierungssatz)
Zu jeder NK-Ableitung $\mathcal{D}$ gibt es ein $\mathcal{D}'$ mit $\mathcal{D} \rhd \mathcal{D}'$, so dass $\mathcal{D}'$ normal. (Das heißt, jede Ableitung in NK hat eine Normalform.)

Beweis.
Per Induktion über der Anzahl $\langle g(\mathcal{D}), n(\mathcal{D})\rangle$, wobei

$$\begin{aligned} g(\mathcal{D}) &= \text{größter Grad einer Maximalformel in } \mathcal{D} \\ n(\mathcal{D}) &= \text{Anzahl der Maximalformeln vom Grad } g(\mathcal{D}) \text{ in } \mathcal{D}. \end{aligned}$$

(Der *Grad* einer Formel ist die Anzahl der Vorkommen an logischen Zeichen.)

Betrachte die Teilableitung

$$\mathcal{D}'' \left\{ \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_a \quad \mathcal{D}_b}{A}\text{ I-Regel} \qquad \mathcal{D}_c}{B}\text{ E-Regel} \right.$$

von $\mathcal{D}$, so dass A Maximalformel von größtem Grad und oberhalb von B sonst keine Maximalformel von größtem Grad ist. (In der Teilableitung $\mathcal{D}''$ können $\mathcal{D}_b$ und $\mathcal{D}_c$ je nach Regel auch leer sein.)

Reduziere $\mathcal{D}$ durch Kontraktion von $\mathcal{D}''$. Das Ergebnis sei $\mathcal{D}_1$. Das heißt, $\mathcal{D} \rhd_1 \mathcal{D}_1$.

Die Maximalformel A verschwindet, und möglicherweise neu entstehende Maximalformeln haben einen kleineren Grad als A.

Beispiel.
Es ist

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{A \to B \quad A}{B} \\ \mathcal{D}_1 \\ C\end{array}}{(A \to B) \to C} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ B\end{array}}{A \to B}}{C} \qquad \rhd_1 \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ B\end{array}}{A \to B} \quad A}{B} \\ \mathcal{D}_1 \\ C \end{array}$$

Die durch Kontraktion erhaltene Ableitung enthält die neu entstandene Maximalformel $A \to B$. Sie hat einen kleineren Grad als $(A \to B) \to C$; die Anzahl der Maximalformeln bleibt gleich.

Das heißt, es gilt: Entweder $g(\mathcal{D}_1) < g(\mathcal{D})$, oder $g(\mathcal{D}_1) = g(\mathcal{D})$, aber $n(\mathcal{D}_1) < n(\mathcal{D})$. □

Bemerkungen.
(i) Wir haben die sog. *schwache Normalisierung* gezeigt. Das heißt, wir haben ein spezifisches Reduktionsverfahren angegeben („wähle stets Maximalformel mit größtem Grad und kontrahiere"), das zu einer Normalform führt.

(ii) Es gilt auch die *starke Normalisierung*, wonach jedes *beliebige* Reduktionsverfahren zu einer Normalform führt. Das heißt, es ist beliebig, welche Maximalformel gewählt wird.

(iii) Des Weiteren gilt für Reduktionen die sog. *Church–Rosser-Eigenschaft* (*confluence*): Wenn $\mathcal{D} \rhd \mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D} \rhd \mathcal{D}_2$, dann existiert eine Ableitung $\mathcal{D}'$, so dass $\mathcal{D}_1 \rhd \mathcal{D}'$ und $\mathcal{D}_2 \rhd \mathcal{D}'$. Daraus folgt, dass jede Ableitung eine *eindeutige* Normalform hat.
Eine Formel kann jedoch mehr als eine normale Ableitung haben, z. B.:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^{(1)} \qquad A^{(2)}}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{A}\,(\bot)_c\,{\scriptstyle (1)}}{A \to A}\,(\to \mathrm{I})\,{\scriptstyle (2)} \qquad\qquad \dfrac{A^{(1)}}{A \to A}\,(\to \mathrm{I})\,{\scriptstyle (1)}$$

(Das Beispiel zeigt auch, dass aus der Existenz einer normalen Ableitung für A, die eine Anwendung von $(\bot)_c$ enthält bei der eine Annahme gelöscht wird, nicht $\nvdash_{\mathrm{NI}} A$ folgt; hierbei bedeutet $\nvdash_{\mathrm{NI}} A$ die Nichtableitbarkeit von A in NI.)

Definition 3.5
Eine Folge von Formeln $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in einem Formelbaum $\mathcal{T}$ ist ein *Faden* (oder *Zweig*) *in* $\mathcal{T}$, wenn

(i) A_1 ein Blatt in $\mathcal{T}$ ist,

(ii) A_i unmittelbar über A_{i+1} steht für alle $i < n$,

(iii) A_n Endformel in $\mathcal{T}$ ist.

Ein *Pfad* ist ein maximales Anfangsstück eines Fadens, das entweder

(i) mit der ersten Nebenprämisse einer Anwendung von $(\to \mathrm{E})$ endet:

$$\dfrac{A \to B \qquad \begin{matrix} \vdots \\ A \end{matrix}}{B}$$

(ii) oder mit der Endformel der Ableitung endet, falls es keine Nebenprämisse einer Anwendung von $(\to \mathrm{E})$ im Faden gibt.

Ein Pfad hat *Ordnung* 0, wenn er mit der Endformel endet. Er hat Ordnung $n + 1$, wenn er neben einer Formel endet, die zu einem Pfad der Ordnung n gehört.

Arbeitsblatt.
$\vdash_{\mathrm{NK}} ((A \to B) \to A) \to A$ (Peircesche Formel)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^{(2)} \qquad \dfrac{(A \to B) \to A^{(3)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A^{(2)} \qquad A^{(1)\ \text{(Ordnung 3)}}}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{B}\,(\bot)_c}{A \to B^{\ \text{(Ordnung 2)}}}\,(\to \mathrm{I})\,{\scriptstyle (1)}}{A^{\ \text{(Ordnung 1)}}}\,(\to \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{A}\,(\bot)_c\,{\scriptstyle (2)}}{((A \to B) \to A) \to A^{\ \text{(Ordnung 0)}}}\,(\to \mathrm{I})\,{\scriptstyle (3)}$$

Wie viele Fäden hat obige Ableitung? Notieren Sie diese.

Die Ableitung hat 4 Fäden (von links nach rechts):

(1) $\neg A, \bot, A, ((A \to B) \to A) \to A$

(2) $(A \to B) \to A, A, \bot, A, ((A \to B) \to A) \to A$

(3) $\neg A, \bot, B, A \to B, A, \bot, A, ((A \to B) \to A) \to A$

(4) $A, \bot, B, A \to B, A, \bot, A, ((A \to B) \to A) \to A$

Wie viele Pfade enden mit der Endformel? Notieren Sie diese(n).

1 Pfad endet mit der Endformel, nämlich $\neg A, \bot, A, ((A \to B) \to A) \to A$.

Notieren Sie die Ordnungen der Pfade neben den Formeln wo diese enden.

„(Ordnung n)“ bedeutet, dass ein Pfad der Ordnung n dort endet. $\lhd$

Lemma 3.6
Sei ein Pfad $A_1, \ldots, A_n$ in einer normalen Ableitung gegeben. Dann gibt es ein A_i $(1 \leq i \leq n)$, so dass gilt:

(i) *Alle A_j mit $j < i$ sind Hauptprämissen von Beseitigungsregeln (E-Regeln).*

(ii) *A_i ist $\bot$ und Prämisse von $(\bot)_c$ oder A_i ist Prämisse einer Einführungsregel (I-Regel), falls $i \neq n$.*

(iii) *Alle A_j mit $i < j < n$ sind Prämissen von I-Regeln.*

Das heißt, Pfade in normalen Ableitungen entsprechen folgendem Schema:

$$\dfrac{\left.\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \end{matrix}\right\} \textit{E-Regeln}}{\left.\begin{matrix} A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{matrix}\right\} \textit{I-Regeln}} \, (\bot)_c \textit{ oder I-Regel}$$

BEWEIS.
Hauptprämissen von E-Regeln müssen vor Prämissen von I-Regeln stehen, sonst kann die Ableitung nicht normal sein. Sie müssen auch vor Prämissen von $(\bot)_c$ stehen, da die Konklusion von $(\bot)_c$ atomar ist. Prämissen von $(\bot)_c$ müssen vor Prämissen von I-Regeln stehen, da $\bot$ nicht eine Konklusion einer I-Regel sein kann. Da $(\bot)_c$ eine atomare Konklusion hat, also insbesondere nicht $\bot$, kann $(\bot)_c$ nur einmal vorkommen. Nebenprämissen von $(\to \mathrm{E})$ brauchen nicht berücksichtigt zu werden, da damit der Pfad endet. $\square$

Theorem 3.7 (Teilformeleigenschaft)
Jede Formel in einer normalen Ableitung ist Teilformel der Endformel oder einer offenen Annahme mit Ausnahme von Annahmen $\neg A$, die bei einer Anwendung von $(\bot)_c$ gelöscht werden und Formeln $\bot$, die unmittelbar unter einer solchen Annahme stehen.

BEWEIS.
Wir beweisen die Behauptung für beliebige Pfade $A_1, \ldots, A_n$ durch Induktion über deren Ordnung.

(i) A_n ist entweder Endformel oder ist Teilformel von $A_n \to B$, das links daneben steht, und zu einem Pfad kleinerer Ordnung gehört. A_n erfüllt damit auf jeden Fall die Bedingung. Also erfüllen alle A_j $(i < j < n)$ ebenfalls die Bedingung (A_i ist diejenige Formel, die gemäß Lemma 3.6 den Pfad in einen Beseitigungs- und einen Einführungsabschnitt teilt).

(ii) Falls A_1 nicht bei einer Anwendung von $(\bot)_c$ gelöscht wird, dann ist A_1 offene Annahme oder wird im selben Pfad oder einem Pfad kleinerer Ordnung durch $(\to \mathrm{I})$ gelöscht.
Also erfüllt A_1 und damit alle A_j $(1 < j \leq i)$ die Bedingung.

(iii) Falls A_1 bei einer Anwendung von $(\bot)_c$ gelöscht wird, trifft einer der folgenden drei Unterfälle zu.

(a) A_1 ist Prämisse einer I-Regel. Dann ist (i) anwendbar.

(b) $A_1 \equiv A_n$. Dann ist (i) ebenfalls anwendbar.

(c) Es verbleibt der Fall $\dfrac{\neg B \quad B}{\bot}$ wobei $\neg B \equiv A_1$. Das ist genau die im Theorem formulierte Ausnahme. □

Bemerkungen.

(i) Im NK haben wir also kein volles Teilformelprinzip; anders als in dem Sequenzenkalkül LK (hier nicht behandelt).

(ii) Natürliches Schließen ist eher auf intuitionistische Logik (siehe Kapitel 4) zugeschnitten.

Definition 3.8
Eine Formelmenge X ist *konsistent*, falls $X \nvdash_{\mathrm{NK}} \bot$. Andernfalls ist X *inkonsistent*. (Entsprechend für NI und NM.)

Lemma 3.9
Sei X eine Formelmenge. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(i) *X ist konsistent, d. h. $X \nvdash_{\mathrm{NK}} \bot$.*

(ii) *Es gibt keine Formel A, so dass $X \vdash_{\mathrm{NK}} A$ und $X \vdash_{\mathrm{NK}} \neg A$.*

(iii) *Es gibt eine Formel B, so dass $X \nvdash_{\mathrm{NK}} B$.*

Beweis.
Es genügt zu zeigen, dass (ii) $\Longrightarrow$ (iii), (iii) $\Longrightarrow$ (i), und (i) $\Longrightarrow$ (ii). (Jeweils durch Kontraposition.)

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Angenommen $X \vdash_{\mathrm{NK}} B$ für beliebige Formeln B. Dann $X \vdash_{\mathrm{NK}} A$ für $B \equiv A$ und $X \vdash_{\mathrm{NK}} \neg A$ für $B \equiv \neg A$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Angenommen $X \vdash_{\mathrm{NK}} B$ für beliebige Formeln B. Dann $X \vdash_{\mathrm{NK}} \bot$ für $B \equiv \bot$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Angenommen es gibt eine Formel A, so dass $X \vdash_{\mathrm{NK}} A$ und $X \vdash_{\mathrm{NK}} \neg A$. Dann ist mit $(\to \mathrm{E})$ auch $\bot$ ableitbar, d. h. $X \vdash_{\mathrm{NK}} \bot$. □

Bemerkung.
Worin unterscheiden sich die Aussagen $\nvdash_{\mathrm{NK}} A \wedge \neg A$ und $\vdash_{\mathrm{NK}} \neg(A \wedge \neg A)$?
Aus der ersten folgt Konsistenz, aus der zweiten nicht.

Korollar 3.10
Die Quantorenlogik (d. h. die Formelmenge $\{A \mid \vdash_{\mathrm{NK}} A\}$) ist konsistent.

Beweis.
Angenommen $\vdash_{\mathrm{NK}} \perp$, dann gibt es eine normale Ableitung, die mit $\perp$ endet, und in der alle Annahmen geschlossen sind. Da $\perp$ nicht Konklusion einer I-Regel sein kann, gibt es einen Pfad zur Endformel $\perp$, in dem keine I-Regeln vorkommen (und da $\perp$ nicht atomar ist, kann $\perp$ auch nicht Konklusion der hier auf atomare Konklusionen beschränkten Regel $(\perp)_c$ sein). Also muss es eine offene Annahme geben. Widerspruch. Also $\nvdash_{\mathrm{NK}} \perp$. □

Korollar 3.11
Die Quantorenlogik ist eine konservative Erweiterung der Junktorenlogik. Das heißt, alle quantorenlogisch ableitbaren quantorenfreien Formeln sind junktorenlogisch ableitbar.

Beweis.
Sei $\mathcal{D}$ eine quantorenlogische Ableitung der quantorenfreien Formel A. Dann gibt es eine Ableitung $\mathcal{D}'$ in Normalform, die aufgrund der Teilformeleigenschaft nur quantorenfreie Formeln enthält. Folglich ist $\mathcal{D}'$ eine junktorenlogische Ableitung. □

4 Intuitionistische Logik

Literatur

Dummett, M. (2000). *Elements of Intuitionism* (2nd edition). Oxford: Clarendon Press.

Mancosu, P., Hrsg. (1998). *From Brouwer to Hilbert*. Oxford: Oxford University Press.

Moschovakis, J. (2010). *Intuitionistic Logic*. In Zalta, E. N. (Hrsg.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2010 Edition), http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/logic-intuitionistic/.

Troelstra, A. & van Dalen, D. (1988). *Constructivism in Mathematics. An Introduction. Volume I*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 121. Amsterdam: North-Holland.

van Dalen, D. (2008). *Logic and Structure* (Fourth Edition). Berlin: Springer.

4.1 Schwache Gegenbeispiele

Beispiel.
Betrachte die Aussage A_7

> *Die Dezimalexpansion von π enthält die Folge 7777777.*

Angenommen es ist nicht bekannt, ob es eine solche Folge gibt. Für die Aussage A_6

> *Die Dezimalexpansion von π enthält die Folge 777777*

gilt dann zwar $A_7 \to A_6$, jedoch gilt nicht $\neg A_7 \vee A_6$, obgleich die beiden Formeln klassisch äquivalent sind.

Beispiel.
Die Aussage

> *Es gibt zwei irrationale Zahlen x und y, so dass x^y rational*

lässt sich leicht so beweisen: Angenommen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational. Dann gibt es zwei irrationale Zahlen x und y, so dass x^y rational. Angenommen $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist irrational. Dann ist $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ rational. Unter Verwendung des *tertium non datur* ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational oder nicht rational, d. h. irrational) kann dann auf obige Aussage geschlossen werden.
Es handelt sich jedoch nicht um einen *konstruktiven* Beweis, da wir keine zwei Zahlen x und y vorweisen können, so dass x^y rational.

Bemerkung.
Das letzte Beispiel ist ein *schwaches Gegenbeispiel* für das *tertium non datur*. Aus konstruktivistischer Sicht sagt das *tertium non datur* $A \vee \neg A$ aus, dass wir für jede beliebige Aussage A einen Beweis für A oder einen Beweis für $\neg A$, d. h., eine Konstruktion die einen hypothetischen Beweis von A in einen Beweis von $\perp$ überführt, haben. Damit wären wir in der Lage, für beliebige Aussagen zu entscheiden, ob diese gelten oder nicht. Doch ein Beispiel wie die Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge", deren Gültigkeit noch nicht entschieden ist, zeigt, dass dies nicht der Fall ist.

Es handelt sich dabei nur um ein schwaches Gegenbeispiel, da das *tertium non datur* nicht widerlegt wurde, die Annahme des *tertium non datur* also nicht zu einem Widerspruch geführt wurde. Es wurde lediglich gezeigt, dass das *tertium non datur* aus konstruktivistischer Sicht kein akzeptables logisches Prinzip ist.

Es ist (aus konstruktivistischer Sicht) auch nicht möglich, das *tertium non datur* durch Auffinden einer Aussage A, für die $\neg(A \vee \neg A)$ gilt, zu widerlegen, da $\neg\neg(A \vee \neg A)$ für alle Aussagen A konstruktiv gilt.

4.2 Die BHK-Interpretation

Die Bedeutung der logischen Zeichen soll durch die folgende *Beweisinterpretation*, bzw. *Brouwer–Heyting–Kolmogorov-Interpretation* (kurz: *BHK-Interpretation*) angegeben werden:

(H1) a ist ein Beweis von $A \wedge B$ genau dann, wenn a ein Paar $\langle b, c\rangle$ ist, so dass b ein Beweis von A ist und c ein Beweis von B ist.

(H2) a ist ein Beweis von $A \vee B$ genau dann, wenn a ein Paar $\langle b, c\rangle$ ist, so dass $b \in \{0, 1\}$ und c ein Beweis von A ist, falls $b = 0$, und c ein Beweis von B ist, falls $b = 1$.

(H3) a ist ein Beweis von $A \to B$ genau dann, wenn a eine Konstruktion ist, die einen Beweis b von A in einen Beweis $a(b)$ von B überführt.

(H4) Es gibt keinen Beweis a für $\perp$. Ein Beweis a von $\neg A$ ist eine Konstruktion, die einen hypothetischen Beweis b von A in einen Beweis $a(b)$ von $\perp$ überführt.

(H5) a ist ein Beweis von $\forall x A(x)$ genau dann, wenn a eine Konstruktion ist, so dass für alle $k \in U$ $a(k)$ ein Beweis von $A(k)$ ist.

(H6) a ist ein Beweis von $\exists x A(x)$ genau dann, wenn a ein Paar $\langle k, c\rangle$ ist, so dass $k \in U$ und c ein Beweis von $A(k)$ ist.

BEISPIELE.
Die folgenden Formeln sind unter der BHK-Interpretation gültig:

(i) $A \to (B \to A)$: Gesucht ist eine Konstruktion c, die einen Beweis a von A in einen Beweis von $B \to A$ überführt. Für einen gegebenen Beweis a von A ist $c(b) = a$ die gesuchte Konstruktion; sie ordnet jedem Beweis b von B den Beweis a von A zu.

(ii) $(A \wedge B) \to A$: Sei $\langle a, b\rangle$ ein Beweis von $A \wedge B$. Dann überführt die Konstruktion c, so dass $c(a, b) = a$, den Beweis von $A \wedge B$ in einen Beweis von A. Nach (H3) ist c dann ein Beweis von $(A \wedge B) \to A$.

(iii) $\neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$: Sei a eine Konstruktion, die einen Beweis von $\exists x A(x)$ in einen Beweis von $\perp$ überführt. Gesucht ist eine Konstruktion c die für jedes $k \in U$ einen Beweis von $A(k) \to \perp$ liefert, d. h. eine Konstruktion die einen Beweis von $A(k)$ in einen Beweis von $\perp$ überführt. Sei b ein Beweis von $A(k)$. Dann ist $\langle k, b\rangle$ ein Beweis von $\exists x A(x)$ und $a(k, b)$ ist ein Beweis von $\perp$. Somit ist c, so dass $(c(k))(b) = a(k, b)$, ein Beweis von $\forall x \neg A(x)$. Man erhält eine Konstruktion die a in c überführt, und somit $\neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$ beweist.

4.3 Verhältnis von klassischer zu intuitionistischer Logik

Definition 4.1
Für quantorenlogische Formeln ist die (*Gödel–Gentzen*) *negative translation* $^{\mathrm{g}}$ wie folgt induktiv definiert:

(i) $\bot^{\mathrm{g}} := \bot$,

(ii) $A^{\mathrm{g}} := \neg\neg A$ für atomare Formeln A,

(iii) $(A \wedge B)^{\mathrm{g}} := A^{\mathrm{g}} \wedge B^{\mathrm{g}}$,

(iv) $(A \vee B)^{\mathrm{g}} := \neg(\neg A^{\mathrm{g}} \wedge \neg B^{\mathrm{g}})$,

(v) $(A \to B)^{\mathrm{g}} := A^{\mathrm{g}} \to B^{\mathrm{g}}$,

(vi) $(\forall x A(x))^{\mathrm{g}} := \forall x A(x)^{\mathrm{g}}$,

(vii) $(\exists x A(x))^{\mathrm{g}} := \neg\forall x \neg A(x)^{\mathrm{g}}$.

Vorkommen von $\neg\neg\neg$ dürfen durch $\neg$ ersetzt werden, da $\vdash_{\mathrm{NI}} \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$ gilt (Übungsaufgabe).

Beispiele.
Wir betrachten atomare Formeln A, B.

(i) $(A \vee \neg A)^{\mathrm{g}} = \neg(\neg A^{\mathrm{g}} \wedge \neg\neg A^{\mathrm{g}}) = \neg(\neg\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg\neg A) = \neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$

(ii) $(\neg\neg A \to A)^{\mathrm{g}} = \neg\neg A^{\mathrm{g}} \to A^{\mathrm{g}} = \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A = \neg\neg A \to \neg\neg A$

(iii)
$$\begin{aligned}\big(((A \to B) \to A) \to A\big)^{\mathrm{g}} &= ((A \to B) \to A)^{\mathrm{g}} \to A^{\mathrm{g}}\\ &= ((A \to B)^{\mathrm{g}} \to A^{\mathrm{g}}) \to A^{\mathrm{g}}\\ &= ((A^{\mathrm{g}} \to B^{\mathrm{g}}) \to A^{\mathrm{g}}) \to A^{\mathrm{g}}\\ &= ((\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg A) \to \neg\neg A\end{aligned}$$

Es ist $\nvdash_{\mathrm{NI}} A \vee \neg A$, $\nvdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg A \to A$ und $\nvdash_{\mathrm{NI}} ((A \to B) \to A) \to A$, aber für beliebige Formeln A, B gilt $\vdash_{\mathrm{NI}} (A \vee \neg A)^{\mathrm{g}}$, $\vdash_{\mathrm{NI}} (\neg\neg A \to A)^{\mathrm{g}}$ und $\vdash_{\mathrm{NI}} \big(((A \to B) \to A) \to A\big)^{\mathrm{g}}$.

Lemma 4.2
Wenn $\vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg A^{\mathrm{g}}$, *dann* $\vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}}$.

Beweis.
Per Induktion über der Komplexität von A unter Verwendung von

$$\vdash_{\mathrm{NI}} \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A \tag{1}$$
$$\vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \tag{2}$$
$$\vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B) \tag{3}$$
$$\vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg\forall x A(x) \to \forall x \neg\neg A(x) \tag{4}$$

Induktionsanfang (IAF): (i) A atomar: $\vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg A^{\mathrm{g}} \overset{\mathrm{g}}{\rightsquigarrow} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg\neg\neg A \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg A \overset{\mathrm{g}}{\rightsquigarrow} \vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}}$

(ii) $A \equiv \bot$: Es ist $\vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg\bot^{\mathrm{g}} \overset{\mathrm{Def.}\,\neg}{\rightsquigarrow} \vdash_{\mathrm{NI}} (\bot^{\mathrm{g}} \to \bot) \to \bot \overset{\mathrm{g}}{\rightsquigarrow} \vdash_{\mathrm{NI}} (\bot \to \bot) \to \bot$, und wegen

$$\dfrac{(\bot \to \bot) \to \bot \qquad \dfrac{\bot^{(1)}}{\bot \to \bot}\,(\to \mathrm{I})\,(1)}{\bot}\,(\to \mathrm{E})$$

gilt mit $\vdash_{NI} (\bot \to \bot) \to \bot$ auch $\vdash_{NI} \bot \overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \bot^g$.

Der Induktionsanfang ist also erfüllt.

Induktionsannahme (IA): Die zu beweisende Behauptung gelte für Formeln B und C.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass die Behauptung dann auch für $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \to C$, $\exists x B(x)$ und $\forall x B(x)$ gilt.

(i) $A \equiv \neg B$:

$$\begin{aligned} \vdash_{NI} \neg\neg(\neg B)^g &\overset{\text{Def.}\neg}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg(B \to \bot)^g \overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg(B^g \to \bot^g) \\ &\overset{(3)}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg B^g \to \neg\neg\bot^g \overset{\text{IA, IAF}}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} B^g \to \bot^g \\ &\overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} (B \to \bot)^g \overset{\text{Def.}\neg}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} (\neg B)^g \end{aligned}$$

(ii) $A \equiv B \wedge C$:

$$\begin{aligned} \vdash_{NI} \neg\neg(B \wedge C)^g &\overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg(B^g \wedge C^g) \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg B^g \wedge \neg\neg C^g \\ &\overset{\text{IA}}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} B^g \wedge C^g \overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} (B \wedge C)^g \end{aligned}$$

(iii) $A \equiv B \vee C$:

$$\begin{aligned} \vdash_{NI} \neg\neg(B \vee C)^g &\overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg\neg(\neg B^g \wedge \neg C^g) \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg(\neg B^g \wedge \neg C^g) \\ &\overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} (B \vee C)^g \end{aligned}$$

(Induktionsannahme nicht benutzt.)

(iv) $A \equiv B \to C$:

$$\begin{aligned} \vdash_{NI} \neg\neg(B \to C)^g &\overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg(B^g \to C^g) \overset{(3)}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg B^g \to \neg\neg C^g \\ &\overset{\text{IA}}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} B^g \to C^g \overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} (B \to C)^g \end{aligned}$$

(v) $A \equiv \exists x B(x)$:

$$\begin{aligned} \vdash_{NI} \neg\neg(\exists x B(x))^g &\overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg\neg\forall x \neg B(x)^g \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\forall x \neg B(x)^g \\ &\overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} (\exists x B(x))^g \end{aligned}$$

(Induktionsannahme nicht benutzt.)

(vi) $A \equiv \forall x B(x)$:

$$\begin{aligned} \vdash_{NI} \neg\neg(\forall x B(x))^g &\overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \neg\neg\forall x B(x)^g \overset{(4)}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \forall x \neg\neg B(x)^g \\ &\overset{\text{IA}}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} \forall x B(x)^g \overset{g}{\rightsquigarrow} \vdash_{NI} (\forall x B(x))^g \end{aligned}$$

In den Fällen (i), (ii), (iv) und (vi) kann die Induktionsannahme auf die Formeln $\neg\neg B^g \to \neg\neg\bot^g$, $\neg\neg B^g \wedge \neg\neg C^g$, $\neg\neg B^g \to \neg\neg C^g$ und $\forall x \neg\neg B(x)^g$ angewendet werden, da deren normale Ableitungen mit der jeweiligen Einführungsregel enden, für deren Prämissen die Induktionsannahme formuliert ist. Das heißt, durch Betrachtung der entsprechenden Normalformen weiß man, dass es Teilableitungen geben muss, die mit den Formeln $\neg\neg B^g$, $\neg\neg\bot^g$, $\neg\neg C^g$ bzw. $\neg\neg B(x)^g$ enden, auf welche die Induktionsannahme angewendet werden kann. □

BEMERKUNG.
$\vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}} \implies \vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg A^{\mathrm{g}}$ gilt auch, da wegen

$$\dfrac{\dfrac{\neg A^{(1)} \qquad A}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg\neg A}\,(\to \mathrm{I})\,(1)$$

für beliebige Formeln A gilt: $\vdash_{\mathrm{NI}} A \implies \vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg A$.

Theorem 4.3
Wenn $X \vdash_{\mathrm{NK}} A$, dann $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}}$, wobei $X^{\mathrm{g}} := \{B^{\mathrm{g}} \mid B \in X\}$.

BEWEIS.
Per Induktion über dem Aufbau von Ableitungen der Formel A aus der Menge von Annahmen X.

(i) Sei $A \in X$, dann ist auch $A^{\mathrm{g}} \in X^{\mathrm{g}}$. Somit gilt $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}}$.

(ii) $\mathcal{D}$ endet mit einer junktorenlogischen Regel. Wir betrachten als Beispiel die Fälle $(\to \mathrm{I})$ und $(\vee \mathrm{E})$:

(a) Betrachte die Ableitung

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,(\to \mathrm{I})$$

(wobei in $\mathcal{D}$ die offenen Annahmen X^{g} vorkommen können). Nach Induktionsannahme gelte $X^{\mathrm{g}}, A^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} B^{\mathrm{g}}$. Dann gilt mit $(\to \mathrm{I})$, dass $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}} \to B^{\mathrm{g}}$, und somit aufgrund Definition von $^{\mathrm{g}}$ auch $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} (A \to B)^{\mathrm{g}}$.

(b) Betrachte die Ableitung

$$\dfrac{\begin{matrix}\\ \mathcal{D}\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \mathcal{D}_1\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \mathcal{D}_2\\ C\end{matrix}}{C}\,(\vee \mathrm{E})$$

(wobei in $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ die offenen Annahmen X vorkommen können). Nach Induktionsannahme gelte Folgendes: $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} (A \vee B)^{\mathrm{g}}$, $X^{\mathrm{g}}, A^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} C^{\mathrm{g}}$ sowie $X^{\mathrm{g}}, B^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} C^{\mathrm{g}}$. Dann gilt nach Definition von $^{\mathrm{g}}$: $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg(\neg A^{\mathrm{g}} \wedge \neg B^{\mathrm{g}})$, und mit $(\to \mathrm{I})$ gilt $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}} \to C^{\mathrm{g}}$ sowie $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} B^{\mathrm{g}} \to C^{\mathrm{g}}$.
Mit

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \neg(\neg A^{\mathrm{g}} \wedge \neg B^{\mathrm{g}})\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg C^{\mathrm{g}}]^{(3)} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1'\\ A^{\mathrm{g}} \to C^{\mathrm{g}}\end{matrix} \quad [A^{\mathrm{g}}]^{(1)}}{C^{\mathrm{g}}}\,(\to \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg A^{\mathrm{g}}}\,(\to \mathrm{I})\,(1) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg C^{\mathrm{g}}]^{(3)} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2'\\ B^{\mathrm{g}} \to C^{\mathrm{g}}\end{matrix} \quad [B^{\mathrm{g}}]^{(2)}}{C^{\mathrm{g}}}\,(\to \mathrm{E})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg B^{\mathrm{g}}}\,(\to \mathrm{I})\,(2)}{\neg A^{\mathrm{g}} \wedge \neg B^{\mathrm{g}}}\,(\wedge \mathrm{I})}{\bot}\,(\to \mathrm{E})}{\neg\neg C^{\mathrm{g}}}\,(\to \mathrm{I})\,(3)}{C^{\mathrm{g}}}\,(\text{Lemma } 4.2)$$

(wobei in $\mathcal{D}', \mathcal{D}_1', \mathcal{D}_2'$ die offenen Annahmen X^{g} vorkommen können) gilt dann $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} C^{\mathrm{g}}$.

(iii) $\mathcal{D}$ endet mit einer quantorenlogischen Regel. Wir betrachten als Beispiel die Fälle $(\forall\,\mathrm{I})$ und $(\exists\,\mathrm{E})$:

(a) Betrachte die Ableitung

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}\ (\forall\,\mathrm{I})$$

(wobei in $\mathcal{D}$ die offenen Annahmen X vorkommen können). Nach Induktionsannahme gelte $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} A(a)^{\mathrm{g}}$. Dann gilt mit $(\forall\,\mathrm{I})$, dass $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \forall x A(x)^{\mathrm{g}}$, und somit aufgrund Definition von $^{\mathrm{g}}$ auch $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} (\forall x A(x))^{\mathrm{g}}$.

(b) Betrachte die Ableitung

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \exists x A(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A(a)]\\ \mathcal{D}_1\\ C\end{array}}{C}\ (\exists\,\mathrm{E})$$

(wobei in $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1$ die offenen Annahmen X vorkommen können). Nach Induktionsannahme gelte $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} (\exists x A(x))^{\mathrm{g}}$ und $X^{\mathrm{g}}, A(a)^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} C^{\mathrm{g}}$. Dann gilt nach Definition von $^{\mathrm{g}}$: $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg\forall x \neg A(x)^{\mathrm{g}}$, und mit $(\rightarrow\mathrm{I})$ und $(\forall\,\mathrm{I})$ gilt:

$$X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \forall x (A(x)^{\mathrm{g}} \rightarrow C^{\mathrm{g}}).$$

Mit

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \neg\forall x \neg A(x)^{\mathrm{g}}\end{array} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg C^{\mathrm{g}}]^{(2)} \qquad \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \forall x (A(x)^{\mathrm{g}} \rightarrow C^{\mathrm{g}})\end{array}}{A(a)^{\mathrm{g}} \rightarrow C^{\mathrm{g}}}\ (\forall\,\mathrm{E}) \qquad [A(a)^{\mathrm{g}}]^{(1)}}{C^{\mathrm{g}}}\ (\rightarrow\mathrm{E})}{\bot}\ (\rightarrow\mathrm{E})}{\neg A(a)^{\mathrm{g}}}\ (\rightarrow\mathrm{I})\ (1)}{\forall x \neg A(x)^{\mathrm{g}}}\ (\forall\,\mathrm{I})}{\cfrac{\bot}{\neg\neg C^{\mathrm{g}}}\ (\rightarrow\mathrm{I})\ (2)}\ (\rightarrow\mathrm{E})$$

$$\dfrac{\neg\neg C^{\mathrm{g}}}{C^{\mathrm{g}}}\ (\text{Lemma } 4.2)$$

(wobei in $\mathcal{D}', \mathcal{D}_1'$ die offenen Annahmen X^{g} vorkommen können) gilt dann $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} C^{\mathrm{g}}$.

In beiden Fällen wird das Vorkommen des Eigenparameters a von $(\forall\,\mathrm{I})$ in X^{g} durch die Induktionsannahme nicht ausgeschlossen. Aber da in der jeweiligen Ausgangsableitung der Eigenparameter a von $(\forall\,\mathrm{I})$, bzw. von $(\exists\,\mathrm{E})$, nicht in X vorkommen darf, und $^{\mathrm{g}}$ an in X vorkommenden Individuenparametern nichts ändert, kann in der Ableitung von $(\forall x A(x))^{\mathrm{g}}$, bzw. von C^{g}, aus den offenen Annahmen X^{g} bei der Anwendung von $(\forall\,\mathrm{I})$ die Eigenparameterbedingung nicht verletzt werden.

(iv) $\mathcal{D}$ endet mit $(\bot)_c$. Betrachte die Ableitung

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{A}\,(\bot)_c$$

Nach Induktionsannahme gelte $X^{\mathrm{g}}, (\neg A)^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \bot$. Dann gilt mit $(\to \mathrm{I})$ auch

$$X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg(\neg A)^{\mathrm{g}} \overset{\text{Def.}\,\neg}{\leadsto} X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg(A \to \bot)^{\mathrm{g}} \overset{\mathrm{g}}{\leadsto} X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg(A^{\mathrm{g}} \to \bot^{\mathrm{g}})$$
$$\overset{\mathrm{g}}{\leadsto} X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg(A^{\mathrm{g}} \to \bot) \overset{\text{Def.}\,\neg}{\leadsto} X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg A^{\mathrm{g}},$$

und unter Verwendung von Lemma 4.2 gilt $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}}$. □

BEMERKUNG.
Es gilt auch $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}} \implies X \vdash_{\mathrm{NK}} A$. Dazu beweist man zunächst $\vdash_{\mathrm{NK}} A \leftrightarrow A^{\mathrm{g}}$, und verwendet dann $X \vdash_{\mathrm{NI}} A \implies X \vdash_{\mathrm{NK}} A$.

Definition 4.4
Eine Formel A heißt *negativ*, falls alle in ihr vorkommenden Atome negiert sind, und weder $\vee$ noch $\exists$ in A vorkommen.

Korollar 4.5
Für negative Formeln A gilt: $\vdash_{\mathrm{NK}} A$ genau dann, wenn $\vdash_{\mathrm{NI}} A$.

BEMERKUNGEN.
(i) Das Korollar sagt aus, dass die intuitionistische Logik konsistent ist genau dann, wenn die klassische Logik konsistent ist.
(ii) Da jede in NK ableitbare Formel zu einer negativen Formel äquivalent ist, zeigt das Korollar außerdem, dass die klassische Logik (NK) in gewisser Weise in der intuitionistischen Logik (NI) enthalten ist, obgleich $\vdash_{\mathrm{NK}} A \implies \vdash_{\mathrm{NI}} A$ nicht für beliebige Formeln A gilt.

Theorem 4.6 (Glivenko)
Für quantorenfreie Formeln A gilt: $\vdash_{\mathrm{NK}} A$ genau dann, wenn $\vdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg A$.

BEWEIS.
Man beweist per Induktion über der Komplexität von A, dass $\vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}} \leftrightarrow \neg\neg A$, und verwendet, dass $X \vdash_{\mathrm{NK}} A$ genau dann, wenn $X^{\mathrm{g}} \vdash_{\mathrm{NI}} A^{\mathrm{g}}$ (Theorem 4.3 mit Bemerkung).□

BEMERKUNG.
Die Einschränkung auf quantorenfreie Formeln in Glivenkos Theorem ist wesentlich. Es ist z. B. $\vdash_{\mathrm{NK}} \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$, aber $\nvdash_{\mathrm{NI}} \neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$.

Theorem 4.7
$\vdash_{\mathrm{NK}} B$ genau dann, wenn $\neg\neg A \to A \vdash_{\mathrm{NI}} B$, wobei $\neg\neg A \to A$ für beliebige Annahmen dieser Form stehe, und B eine beliebige Formel ist. Das heißt, aus intuitionistischer Logik erhält man durch Hinzunahme der doppelten Negationsbeseitigung klassische Logik.

BEWEIS.
$\neg\neg A \to A \vdash_{\mathrm{NI}} B \implies \vdash_{\mathrm{NK}} B$ gilt, da $\neg\neg A \to A$ in NK ableitbar ist.

$\vdash_{\mathrm{NK}} B \implies \neg\neg A \to A \vdash_{\mathrm{NI}} B$ gilt, da Regelanwendungen von $(\bot)_c$ in der Ableitung von B in NK durch Teilableitungen der Form

$$\dfrac{\neg\neg A \to A \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^{(i)}\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\neg A}\,(\to \mathrm{I})\,(i)}{A}\,(\to \mathrm{E})$$

ersetzt werden können. NI und NK unterscheiden sich nur in der Regel für das *falsum*: $(\bot)$ in NI, bzw. $(\bot)_c$ in NK. Die resultierende Ableitung ist also eine Ableitung in NI mit offenen Annahmen der Form $\neg\neg A \to A$. □

BEMERKUNGEN.

(i) Entsprechende Aussagen gelten auch für Annahmen der Form $A \vee \neg A$ (*tertium non datur*) oder $((A \to B) \to A) \to A$ (Peircesche Formel), da diese klassisch äquivalent zu $\neg\neg A \to A$ (doppelte Negationsbeseitigung) sind. Jedes dieser logischen Prinzipien ist in diesem Sinne charakteristisch für die klassische Logik.

(ii) In intuitionistischer Logik sind diese Prinzipien jedoch *nicht* äquivalent. Es ist

$$\begin{aligned}&\vdash_{\mathrm{NI}} (A \vee \neg A) \to (\neg\neg A \to A),\\ &\vdash_{\mathrm{NI}} (A \vee \neg A) \to (((A \to B) \to A) \to A),\\ &\vdash_{\mathrm{NI}} (\neg\neg A \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A),\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}&\nvdash_{\mathrm{NI}} (\neg\neg A \to A) \to (A \vee \neg A),\\ &\nvdash_{\mathrm{NI}} (((A \to B) \to A) \to A) \to (A \vee \neg A),\\ &\nvdash_{\mathrm{NI}} (((A \to B) \to A) \to A) \to (\neg\neg A \to A).\end{aligned}$$

(iii) Durch Hinzunahme schwächerer Prinzipien erhält man sogenannte *superintuitionistische Logiken* (*intermediate logics*), die zwischen intuitionistischer und klassischer Logik liegen. Ein Beispiel ist *Dummetts Logik*, die man durch Hinzunahme von $(A \to B) \vee (B \to A)$ erhält.

4.4 Kripke-Semantik

MOTIVATION.
Bei einem schwachen Gegenbeispiel für das *tertium non datur* wird von einer bisher noch unentschiedenen Aussage A ausgegangen. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass zu einem späteren Zeitpunkt ein Beweis für A gefunden wird. Diese Situation lässt sich so darstellen:

$$\begin{tikzcd} k_1 \bullet \; A \\ k_0 \bullet \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Der Zustand k_0 repräsentiert unseren gegenwärtigen Wissensstand bezüglich A: Wir wissen weder ob A gilt noch ob $\neg A$ gilt. Der Zustand k_1 repräsentiert einen späteren Zeitpunkt, in dem ein Beweis für A vorliegt, wir also wissen, dass A gilt. In k_0 können wir somit A nicht behaupten. Wir können aber auch $\neg A$ nicht behaupten, da ein späterer Zustand k_1 in dem A gilt nicht ausgeschlossen ist. Folglich können wir in k_0 auch $A \vee \neg A$ nicht behaupten, da wir dazu in k_0 entweder A oder $\neg A$ behaupten können müssten.

Definition 4.8
Ein (junktorenlogisches) *Kripke-Modell* ist ein Tripel $\mathscr{K} := \langle K, \leq, \Vdash \rangle$, wobei $\langle K, \leq \rangle$ eine nicht-leere partiell geordnete Menge ist, und $\Vdash$ (lies: *forces*) eine zweistellige Relation zwischen Elementen k aus K und (junktorenlogischen) atomaren Formeln A ist, so dass die folgende Monotoniebedingung gilt:

$$\text{Wenn } k \Vdash A \text{ und } k \leq k', \text{ dann } k' \Vdash A.$$

Die Elemente k von K werden als *Zustände* oder *mögliche Welten* bezeichnet. $k \Vdash A$ liest man „*k forces A*“ oder „in k gilt A“.
Die Relation $\Vdash$ wird durch folgende Klauseln auf nicht-atomare Formeln erweitert:

(i) $k \Vdash A \wedge B := k \Vdash A$ und $k \Vdash B$,

(ii) $k \Vdash A \vee B := k \Vdash A$ oder $k \Vdash B$,

(iii) $k \Vdash A \to B :=$ Für alle $k' \geq k$: wenn $k' \Vdash A$, dann $k' \Vdash B$,

(iv) nicht $k \Vdash \bot$ (bzw. $k \nVdash \bot$), d. h., es gibt kein Element k aus K, so dass $\bot$ in k gilt.

BEMERKUNGEN.
(i) Aus der Definition folgt, dass $k \Vdash \neg A$ genau dann, wenn $\forall k' \geq k\ (k' \nVdash A)$.

(ii) Des Weiteren gilt $k \Vdash \neg\neg A$ genau dann, wenn $\forall k' \geq k\ \neg \forall k'' \geq k'\ (k'' \nVdash A)$, da dann $\forall k' \geq k\ (k' \nVdash \neg A)$ und somit $k \Vdash \neg\neg A$. Klassisch ist dies äquivalent zu $\forall k' \geq k\ \exists k'' \geq k'\ (k'' \Vdash A)$.

Lemma 4.9
Jede beliebige Formel A erfüllt die Monotoniebedingung, d. h., es gilt für alle $k, k' \in K$: Wenn $k \Vdash A$ und $k \leq k'$, dann $k' \Vdash A$.

BEWEIS.
Per Induktion über dem Formelaufbau. Betrachte als Beispiel den Fall $A \equiv B \to C$: Sei $k \Vdash B \to C$ und $k \leq k'$. Wenn $k' \leq k''$ und $k'' \Vdash B$, dann ist auch $k \leq k''$ und $k'' \Vdash B$. Wegen $k \Vdash B \to C$ gilt dann auch $k'' \Vdash C$. Somit gilt für alle $k'' \geq k'$: Wenn $k'' \Vdash B$, dann $k'' \Vdash C$, d. h. $k' \Vdash B \to C$. □

Definition 4.10
(i) Eine Formel A ist *gültig in k* in einem Kripke-Modell $\mathscr{K}$ genau dann, wenn $k \Vdash A$.

(ii) Eine Formel A ist *gültig in $\mathscr{K}$* genau dann, wenn $k \Vdash A$ für alle $k \in K$ (Notation: $\mathscr{K} \Vdash A$).

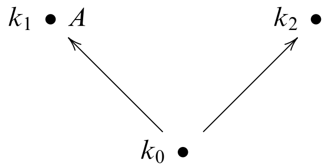
(iii) Für eine Menge X von Formeln gilt $X \Vdash A$ genau dann, wenn in jedem Kripke-Modell $\mathscr{K}$, in dem alle $B \in X$ gültig sind, auch A gültig ist, d. h., wenn für alle $B \in X$ gilt: Wenn $\mathscr{K} \Vdash B$, dann $\mathscr{K} \Vdash A$.

(iv) Eine Formel A ist *Kripke-gültig* (kurz: *gültig*) genau dann, wenn $X = \emptyset$, d. h. wenn $\emptyset \Vdash A$ (kurz: $\Vdash A$).

Bemerkung.
Ist k_0 der kleinste Zustand in der partiell geordneten Menge K, dann gilt aufgrund Monotonie (Lemma 4.9): A ist gültig in $\mathscr{K}$ genau dann, wenn A gültig in k_0 ist.

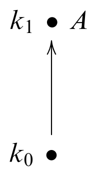
Beispiele.
Wir betrachten atomare Formeln A, B.

(i) $\neg\neg A \vee \neg A$ ist nicht Kripke-gültig. Sei $K = \{k_0, k_1, k_2\}$, $k_0 \leq k_1, k_0 \leq k_2$ und $k_1 \Vdash A$. $\mathscr{K} = \langle K, \leq, \Vdash \rangle$ kann durch folgendes Diagramm repräsentiert werden, wobei neben jedem Zustand $k \in K$ nur jene atomaren Formeln A notiert werden, für die $k \Vdash A$ gilt, und die Pfeile die partielle Ordnung durch $\leq$ auf K ausdrücken:



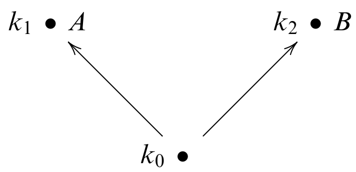
Wegen $k_1 \Vdash A$ gilt $k_0 \nVdash \neg A$, und da $k_2 \Vdash \neg A$, gilt $k_0 \nVdash \neg\neg A$.
Somit gilt $k_0 \nVdash \neg\neg A \vee \neg A$, und $\mathscr{K}$ ist ein Kripke-Gegenbeispiel für $\neg\neg A \vee \neg A$, d. h., $\neg\neg A \vee \neg A$ ist nicht Kripke-gültig.

(ii) $\neg\neg A \to A$ ist nicht Kripke-gültig. Im Kripke-Modell



gilt $k_0 \nVdash A$, und wegen $k_1 \Vdash A$ gilt $k_0 \Vdash \neg\neg A$ (vgl. Bemerkung (ii) zu Definition 4.8).
Somit gilt $k_0 \nVdash \neg\neg A \to A$, d. h., $\neg\neg A \to A$ ist nicht Kripke-gültig.

(iii) $(A \to B) \vee (B \to A)$ ist nicht Kripke-gültig. Das Kripke-Modell



ist ein Kripke-Gegenbeispiel für $(A \to B) \vee (B \to A)$: Da $k_1 \nVdash B$ ist $k_0 \nVdash A \to B$, und da $k_2 \nVdash A$ ist $k_0 \nVdash B \to A$. Folglich gilt $k_0 \nVdash (A \to B) \vee (B \to A)$, d. h., die Formel $(A \to B) \vee (B \to A)$ ist nicht Kripke-gültig.

(iv) $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$ ist nicht Kripke-gültig. Im Kripke-Modell

$$\begin{tikzcd}
 & k_3 \bullet\ A, B & \\
k_1 \bullet\ B \arrow[ur] & & k_2 \bullet\ A, B \arrow[ul] \\
 & k_0 \bullet \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

gilt $k_3 \Vdash A \to B$, und $k_1 \Vdash A \to B$ gilt wegen $k_1 \Vdash B$ und $k_3 \Vdash B$. Somit gilt mit $k_0 \nVdash A$ und wegen $k_2 \Vdash B$ auch $k_0 \Vdash A \to B$. Allerdings gilt $k_0 \nVdash \neg A$ wegen $k_2 \Vdash A$, und da $k_0 \nVdash B$, gilt $k_0 \nVdash \neg A \vee B$. Folglich gilt $k_0 \nVdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$. Somit ist $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$ nicht Kripke-gültig.

Literatur

[1] Bornat, R. (2005). *Proof and Disproof in Formal Logic. An Introduction for Programmers*. Oxford University Press.

[2] Dummett, M. (2000). *Elements of Intuitionism*, 2nd edition. Oxford: Clarendon Press.

[3] Gentzen, G. (1935). *Untersuchungen über das logische Schließen*. Mathematische Zeitschrift **39**, 176–210, 405–431. (Online: http://gdz.sub.uni-goettingen.de .)

[4] Jaśkowski, S. (1934). *On the Rules of Suppositions in Formal Logic*. Studia Logica **1**, 5–32.

[5] Mancosu, P., Hrsg. (1998). *From Brouwer to Hilbert*. Oxford: Oxford University Press.

[6] Moschovakis, J. (2010). *Intuitionistic Logic*. In Zalta, E. N. (Hrsg.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2010 Edition), http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/logic-intuitionistic/.

[7] Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*. Stockholm: Almqvist & Wiksell. Wiederabgedruckt 2006 (Mineola: Dover Publications).

[8] Schroeder-Heister, P. (2000). *Skriptum zur Vorlesung „Logik II: Sequenzenkalkül, Natürliches Schließen, Resolution“*. http://www.uni-tuebingen.de/en/30440.

[9] Schroeder-Heister, P. (2009). *Skriptum zur Vorlesung „Einführung in die Logik“*. http://www.uni-tuebingen.de/en/30440.

[10] Troelstra, A. S. & Schwichtenberg, H. (2002). *Basic Proof Theory* (2nd ed.). Cambridge University Press.

[11] Troelstra, A. & van Dalen, D. (1988). *Constructivism in Mathematics. An Introduction. Volume I*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 121. Amsterdam: North-Holland.

[12] van Dalen, D. (2008). *Logic and Structure* (Fourth Edition). Berlin: Springer.

Sachverzeichnis