CAPITOLO 2.
ANALISI DELLE TEORIE SEMANTICHE

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato le motivazioni generali del revisionismo logico di Dummett e Prawitz, motivazioni connesse all'adozione di una particolare concezione del significato e *conseguentemente* della realtà, e che conducono ad adottare certe leggi logiche e a rifiutarne altre. Il revisionismo logico ha però, nelle mani dei nostri autori, un secondo fondamentale aspetto: la determinazione del modo corretto di definire i principi di giustificazione delle leggi logiche, ossia quale assetto teorico debba assumere una semantica logica che voglia essere soddisfacente da un punto di vista filosofico, oltre che matematico. Come vedremo, in positivo ciò significa articolare in maniera precisa la distinzione tra prova canonica e dimostrazione — che abbiamo già visto essere di importanza fondamentale nella teoria del significato da un punto di vista verificazionistico — inserendola in uno specifico quadro teorico e connettendola con altre nozioni rilevanti, quali quella di conseguenza logica e di armonia. D'altra parte, queste proposte possono essere viste nella loro giusta prospettiva solo alla luce della specificazione degli aspetti insoddisfacenti delle teorie semantiche tradizionali, che si basano sulla nozione di modello e attribuiscono fondamentale importanza alla nozione di metalinguaggio. Sembra pertanto opportuno esaminare le ragioni *interne* che, mettendo in discussione il valore esplicativo del concetto di modello rispetto alle nozioni intuitive di verità e conseguenza logica, per un verso, e la dipendenza delle definizioni semantiche dalle nozioni assunte a livello metalinguistico, per altro verso, conducono a ricercare un assetto teorico alternativo.

2.1. Teorie sensibili al metalinguaggio

Una delle principali preoccupazioni di Dummett è quella di rigettare l'idea secondo cui i significati delle costanti logiche vengano fissati scegliendo l'insieme delle leggi logiche che le governano, per cui non ci sarebbe alcuna possibilità di decidere, mediante l'analisi del significato, quali leggi sia legittimo assumere, visto che se il significato è determinato proprio dalla scelta delle leggi logiche, la scelta non può che essere arbitraria. Questa concezione è strettamente connessa col principio secondo cui nel formulare una teoria semantica il metalinguaggio deve avere la stessa logica del linguaggio oggetto: le leggi che risultano valere in quest'ultimo dipendono dall'assunzione delle stesse leggi a livello metateorico. Ora, la tesi di Dummett è che questo principio è scorretto, perché in realtà le teorie che, per la loro struttura interna, sono legate essenzialmente alla logica del metalinguaggio, non sono delle teorie semantiche autentiche.

Secondo Dummett, una teoria semantica deve spiegare come viene determinata la verità o meno di un enunciato, sulla base della sua composizione ((1991), 25). A questo scopo, devono essere soddisfatte tre condizioni (ibid., 35, 51).
(i) La teoria deve specificare anzitutto che tipo di *valore semantico* ogni categoria sintattica possieda, dove il valore semantico di un'espressione è ciò che va a determinare la verità di qualsiasi enunciato in cui essa occorra. In tal modo si definisce il primo compito di una ST, ossia stabilire che cos'è un'*interpretazione*.
(ii) La teoria deve mostrare come il valore semantico di una formula è determinato a partire da quello dei suoi componenti. Qui è essenziale una sintassi composizionale di tipo fregeano.
(iii) Infine, la teoria deve definire cosa vuol dire per una formula esser vera sotto un'interpretazione. Ciò è banale in una ST in cui la verità è uno fra i possibili *valori enunciativi* (statement values), dove il valore enunciativo è il valore semantico di un enunciato.

Abbiamo due principi di classificazione per le teorie semantiche. In primo luogo, esse si distinguono a seconda che accettino o meno il principio della bivalenza, cioè che identifichino o meno il valore enunciativo con la verità o la falsità. L'unica teoria semantica che accetta questo principio è quella classica. Fra le altre, vi sono da un lato le semantiche a più valori (che, pur non accettando la bivalenza, mantengono l'idea che ogni enunciato possieda un determinato valore di verità), e dall'altro quelle con valori di verità *relativizzati*: assunto un certo spazio strutturato da una relazione d'ordine, la verità o meno di un enunciato risulta relativa ad un certo punto dello spazio. Simili semantiche sono per esempio quelle modali, temporali, e i modelli di Beth e di Kripke per la logica intuizionistica. Vi sono comunque altre semantiche che non rientrano in queste due categorie (esempi: l'interpretazione BHK in termini di prova e costruzione, la semantica di Hintikka in termini di giochi).

In secondo luogo, possiamo distinguere tra semantiche in cui le stipulazioni che governano le costanti logiche sono *dirette* (straightforward), e quelle in cui non lo sono. Le stipulazioni dirette, altrimenti dette “decitazionali" (disquotational), sono quelle in cui la spiegazione del significato delle costanti logiche viene data semplicemente impiegando le corrispondenti costanti logiche nel metalinguaggio, e nient'altro: esse sono decitazionali perché la parte destra del bicondizionale elimina le virgolette presenti nella parte sinistra. Per esempio: “se α, allora β" è vera sse se α, allora β. Questa è una stipulazione *assolutamente* diretta, ed è caratteristica della semantica classica. Ma vi possono essere anche stipulazioni *relativamente* dirette, nel caso in cui la semantica adotti una nozione relativizzata di verità. Un esempio è costituito dalla semantica modale: “α o β" è vera in un mondo possibile w sse α è vera in w o β è vara in w. Si noti che ciò è ancora in accordo con la definizione di stipulazione diretta, perché tutto quello che si è usato è la costante logica corrispondente nel metalinguaggio; per il resto, si è semplicemente relativizzata la nozione di verità. Un esempio di stipulazione non diretta (nemmeno relativamente) è quello dell'implicazione nei modelli di Beth e di Kripke per la logica intuizionistica: “se α, allora β" è vera ad un nodo p sse per ogni nodo $q \geq p$, se α è vera a q, allora β è vera a q (dove $\geq$ è una relazione d'ordine parziale, e i nodi rappresentano stati di informazione). Qui la stipulazione non è diretta perché si è fatto ricorso, nella definizione dell'implicazione, ad una quantificazione metalinguistica sui nodi, e quindi non soltanto all'operatore metalinguistico corrispondente. Con ciò si mostra anche che una spiegazione può essere *circolare*, nel senso che utilizza la costante logica a cui si riferisce, senza essere diretta. Dummett afferma che nel caso in cui le spiegazioni delle costanti logiche siano tutte relativamente dirette, si ha una semantica non classica per una sottostante logica classica. Nel caso invece in cui vi sia almeno una spiegazione non diretta, si ha una logica non classica. In questo caso non vale più che semantica segua banalmente una volta fissata la struttura sintattica. Secondo Dummett la linea di distinzione tra logica e semantica è dunque data dal fatto che la prima è definita dalla natura delle stipulazioni concernenti le costanti logiche, mentre la seconda viene specificata dalla particolare nozione di verità (assoluta, relativa, bivalente, epistemica, ecc.) che viene adottata.

Si potrebbe obiettare, però, che il carattere diretto delle stipulazioni non è una peculiarità della logica classica, perché anche per la logica intuizionistica è possibile fornire un'interpretazione diretta. In tal modo si avrebbe una semantica standard per la logica intuizionistica, che finora manca perché la spiegazione BHK, che dà i significati intesi delle costanti logiche, non si presta ad un'adeguata trattazione matematica, e i modelli di Beth e di Kripke non rendono fedelmente i significati intesi (cfr. § 2.2.). Tale interpretazione diretta, che Dummett chiama *interpretazione interna* (cfr. (1977), 215; (1991), 27), avrebbe le seguenti caratteristiche. Specifichiamo anzitutto una “specie abitata" (la nozione di specie è il corrispettivo intuizionistico della nozione classica di insieme; una specie è abitata se possiamo trovare almeno un oggetto di cui possiamo mostrare che è un elemento di essa) come dominio delle variabili, e associamo elementi del dominio alle costanti individuali, sottospecie del dominio ai predicati, ecc. Una formula atomica $P(a)$ sarà vera in un'interpretazione se l'elemento del dominio associato ad a appartiene alla specie associata a P. Per le formule complesse ricorriamo semplicemente alle stipulazioni dirette. E' qui essenziale che le costanti logiche del metalinguaggio che occorrono nelle stipulazioni siano intese intuizionisticamente: ciò assicura che i significati delle costanti logiche definite siano quelli intesi, e che possiamo ottenere solo leggi intuizionisticamente valide.

Alcuni logici, per esempio van Dalen, hanno sostenuto che una interpretazione interna così definita sia l'analogo intuizionistico della nozione classica. Secondo Dummett ciò non può essere corretto, perché l'interpretazione interna *non* è affatto un'interpretazione *semantica.* Abbiamo visto che la prima parte di una ST consiste nella determinazione del valore semantico di ogni categoria sintattica, stabilendo, in tal modo, che cos'è un'interpretazione semantica. Ora, l'interpretazione interna non soddisfa nemmeno questo primo requisito, perché non specifica qual'è il valore semantico degli enunciati. Il punto chiave è rappresentato dalla nozione di specie. Mentre nel caso classico abbiamo una caratterizzazione positiva della nozione di insieme (esso è determinato, nel senso che ogni elemento del dominio gli appartiene o non gli appartiene, ed è estensionale, vale a dire che l'insieme resta esaustivamente caratterizzato dagli elementi che gli appartengono), nel caso intuizionistico manca un'analoga caratterizzazione positiva per la nozione di specie. Ciò che si può dire è che una specie è una funzione effettiva che va da elementi del dominio su proposizioni, così come un insieme è una funzione da elementi del dominio su valori di verità. Ma con ciò si è detto solo che il valore semantico di un enunciato è una proposizione, cosa che nel contesto di un'interpretazione interna è del tutto generica. E' infatti vero che la spiegazione intuizionistica delle costanti logiche fornisce una caratterizzazione positiva della nozione di proposizione, e conseguentemente anche della nozione di specie: una proposizione è una classificazione effettiva di costruzioni in quelle che la dimostrano e quelle che non la dimostrano. Ma questa caratterizzazione presuppone la BHK, che consta di stipulazioni non dirette, e pertanto non può essere parte di un'interpretazione interna. L'interpretazione interna non è dunque un'interpretazione semantica, ma semplicemente *programmatica*, perché si riferisce a nozioni puramente programmatiche dei valori semantici di enunciati e predicati (se è indeterminato per gli enunciati qual'è il valore semantico, lo è anche per i predicati) ((1991), 32).

Un'interpretazione programmatica diventa semantica quando viene specificato il valore semantico degli enunciati. Diremo allora che abbiamo tutto ciò che è necessario per soddisfare i requisiti di una teoria semantica? Dummett nota che “it is essential to the notion of an internal interpretation that what corresponds to the second part of a genuine semantic theory should consist solely of straightforward stipulations in terms of truth" ((1991), 57). Ossia, un'interpretazione programmatica utilizza esclusivamente stipulazioni dirette e la nozione di verità (ibid., 62). Ciò significa che anche se un'interpretazione programmatica viene convertita automaticamente in un'interpretazione semantica per mezzo di una scelta dei valori enunciativi, questa scelta non determina la nozione di verità sotto un'interpretazione semantica; non determina, cioè, come debbano essere specificati i valori semantici degli enunciati complessi formati per mezzo degli operatori logici. Dunque tale interpretazione non può giungere all'obiettivo di ogni teoria semantica, cioè mostrare come viene determinata la verità o meno di un enunciato secondo la sua composizione. Credere il contrario significa per Dummett semplicemente confondere la definizione delle condizioni della verità di un enunciato *in termini* dei suoi costituenti, con il mostrare che la sua verità (o meno) è *determinata* dalla verità (o meno) dei suoi costituenti (ibid., 37-38). Rispetto a questo secondo compito, un'interpretazione programmatica è in generale inadeguata, perché la verità di un enunciato non è normalmente determinata soltanto dalla verità dei suoi componenti. Per esempio, in una semantica modale la verità di "$\Box\alpha$" non è determinata dalla sola verità di α; e nella semantica intuizionistica la verità di "$\alpha \rightarrow \beta$" non è determinata solo dalla verità dei componenti. Entrambe le condizioni di verità, però, possono essere date *in termini* della verità dei costituenti. Se dalla semplice conoscenza dei valori di verità dei componenti di un enunciato non possiamo desumere il valore di verità dell'enunciato, allora i valori semantici dei componenti non possono consistere semplicemente nella loro verità o meno, e quindi, in generale, il valore semantico di un enunciato non può consistere in ciò (ibid., 59). Pertanto una specificazione delle condizioni di verità di un enunciato complesso solo in termini della verità o meno dei suoi componenti non ci fornirà una teoria semantica vera e propria.

E' solo nel caso classico che la verità o la falsità di un enunciato complesso viene decisa esclusivamente dal valore di verità dei componenti. Dobbiamo allora concludere che l'interpretazione programmatica fornisce una teoria semantica adeguata almeno per la logica classica? La risposta di Dummett è ancora una volta negativa, perché nemmeno nel caso classico le stipulazioni dirette mostrano il meccanismo semantico del linguaggio, ossia come la verità o la falsità di un enunciato è determinata secondo la sua composizione. Il motivo di ciò è che non si può non fare appello, oltre che alle stipulazioni dirette, alle leggi classiche che governano le costanti logiche del metalinguaggio. Ciò si mostra chiaramente nel caso delle tavole di verità: è solo facendo appello al principio metalinguistico della bivalenza che si può assumere che esse siano esaustive rispetto a tutti i casi. Dummett può quindi trarre la conclusione generale che "a straightforward stipulation, in terms of truth, will not, *of itself*, reveal the way in which a complex sentence is determined as true when it is true, in accordance with its composition" (ibid., 36; corsivi nostri). Tuttavia questa risposta potrebbe non convincere. Si potrebbe infatti avanzare la naturale obiezione secondo cui se partiamo da un'interpretazione puramente programmatica, e assumiamo che le leggi logiche classiche valgano nel metalinguaggio, possiamo *derivare* i principi della semantica a due valori; e dunque, nel caso classico, la distinzione tra una teoria semantica e un'interpretazione programmatica si riduce alla banale distinzione tra ciò che è ancora da estrarre e ciò che è già reso esplicito (ibid., 60). La risposta di Dummett a quest'obiezione conduce al cuore della sua concezione di una teoria semantica (ibid., 72-82). Il punto sta nel distinguere il principio della bivalenza dalla legge del terzo escluso. Mentre quest'ultimo asserisce semplicemente che per ogni enunciato α, vale "$\alpha \vee \neg\alpha$" — e ciò è quindi vero in ogni linguaggio la cui teoria semantica abbia la forma di un'algebra di Boole — , il principio della bivalenza dice molto di più, ossia che ogni enunciato è *determinatamente* vero o falso. Questo principio vale per un linguaggio in cui valga il terzo escluso e in cui la nozione di verità *assoluta* sia distributiva rispetto alla disgiunzione e alla negazione. Ciò è espresso dall'avverbio "determinatamente": esso sottolinea il fatto che se α è determinatamente vero o falso, allora c'è un enunciato, che può essere α o $\neg\alpha$, che è più informativo dell'enunciato $\alpha \vee \neg\alpha$; ossia, c'è una risposta, che non ci è necessariamente nota, alla domanda: quale dei due vale? Detto altrimenti: "the disjunction is determinate provided that not only is the disjunctive statement true absolutely, but at least one of the two disjoined sentences is true absolutely" (ibid., 76).

Notiamo anzitutto che, dato un linguaggio avente una logica classica, non è detto che per esso valga anche la bivalenza: per esempio, in un linguaggio in cui vi siano dei predicati vaghi, valgono le leggi della logica classica ma non il principio della bivalenza. Consideriamo il predicato "è arancione": esso è vago perché ci possono essere dei casi in cui non risulta definito se qualcosa è arancione o di qualche altro colore, diciamo rosso. Gli enunciati "a è rosso" e "a è arancione" possono quindi non essere determinatamente veri o falsi, mentre risulta esserlo l'enunciato "a è rosso o non è rosso". Il motivo di ciò è che, per ipotesi, a è un caso limite di rosso e arancione, e di nessun altro colore (è determinato che a non è blu, verde, ecc.), e quindi è vero l'enunciato "a è rosso o arancione"; ma poiché i due predicati sono incompatibili, "arancione" implica "non rosso", e dunque risulta valere "a è rosso o non è rosso". In generale, è plausibile che per ogni predicato vago P ed ogni nome a di un oggetto di cui P non è determinatamente né vero né falso, si possa trovare un predicato incompatibile Q tale che l'enunciato "$P(a) \vee Q(a)$" sia determinatamente vero, e quindi lo sia anche "$P(a) \vee \neg P(a)$". Pertanto abbiamo che per ogni α, vale $\alpha \vee \neg\alpha$, anche se né α né $\neg\alpha$ è determinatamente vero. Ora, per decidere se vale la bivalenza, bisogna indagare la teoria semantica che governa il metalinguaggio, e questo può essere fatto solo mediante un meta-metalinguaggio. Ma ciò esula completamente dall'ambito di un'interpretazione programmatica. Abbiamo visto che essa fa uso soltanto di stipulazioni dirette, ed è quindi essenziale che il linguaggio oggetto ed il metalinguaggio abbiano la stessa logica. Ma la logica del metalinguaggio permette solo di derivare, per il linguaggio oggetto, il principio che ogni enunciato è vero o falso (che vale $\alpha \vee \neg\alpha$). Per poter aggiungere l'avverbio "determinatamente" — ossia, per ottenere la semantica classica — bisogna fare appello non semplicemente alla logica del metalinguaggio, ma alla sua semantica, e ciò è proprio quanto non può essere fatto mediante un'interpretazione programmatica, che come abbiamo visto fa assunzioni solo sulla logica del metalinguaggio, e non anche sulla nozione di verità ivi impiegata. Né, d'altra parte, potrebbe farlo, visto che altrimenti si vanificherebbe l'idea di fondo secondo cui la nozione di verità per un certo linguaggio debba essere specificata mediante un metalinguaggio. Ciò che quindi si può concludere è che la derivazione del principio della bivalenza, a partire dalla specificazione di un'interpretazione programmatica, è spuria: non possiamo ottenere la semantica classica semplicemente affidandoci a stipulazioni dirette.

Credere il contrario significa per Dummett fraintendere completamente la natura di una teoria semantica. Data un'interpretazione programmatica, facendo appello alle leggi logiche classiche possiamo ricavare principi che sono *formalmente indistinguibili* da quelli della semantica a due valori. Ma, come già accennato nel § 1.2., secondo Dummett l'aspetto algebrico-formale non può caratterizzare una ST; l'essenziale è piuttosto che una teoria semantica impieghi una nozione di verità che si connetta all'impiego effettivo degli enunciati del linguaggio naturale. In altri termini, perché qualcosa sia una teoria semantica deve essere almeno plausibile che possa essere estesa ad una MT completa per un linguaggio naturale. Quest'idea è in parte condivisa anche da Prawitz: "Semantics and logic, as I understand them, are not abstract, mathematical theories but disciplines with a concrete subject matter, namely the empirically given linguistic and deductive practices that we are already engaged in. [...] What semantics and logic have to do is to explain this practice by giving a systematic account of it" ((1978), 26). Come vedremo nel capitolo successivo, Prawitz è però interessato prevalentemente alla pratica *deduttiva*, e non a tutti gli usi in cui vengono coinvolte le costanti logiche.

Cosa dobbiamo concludere da quest'argomento? E' importante precisare che per Dummett esso non conduce a negare ogni valore alle interpretazioni programmatiche: al contrario, mediante esse è possibile ottenere risultati tecnici fondamentali. Ciò che l'argomento è inteso a mostrare è che le interpretazioni programmatiche non hanno il ruolo filosofico che spesso si attribuisce loro. Una prima conseguenza è che una teoria tarskiana della verità *non* è una teoria semantica autentica. Essa è infatti caratterizzata da stipulazioni dirette in termini di valori di verità, ossia è un'interpretazione programmatica nel senso sopra definito. Pertanto, non è in grado di mostrare il modo in cui è determinata la verità o meno di un enunciato secondo la sua composizione, se la logica del linguaggio in questione è non classica. Non solo, ma la conclusione precedente ci permette anche di dire che una teria tarskiana non è adeguata nemmeno se la logica del linguaggio è classica. Essa non può dunque essere estesa a costituire una MT, e questo indipendentemente da quale sia la logica del linguaggio naturale. Con ciò si mostra che la condizione che una ST produca come teoremi ogni esempio dello schema (T) è inessenziale rispetto all'edificazione di una MT. Se la nozione di verità è quella centrale in una MT, allora ciò che conta è un'adeguata teoria composizionale e un'adeguata caratterizzazione extralogica (non formale-algebrica) di verità (cfr. Dummett (1991), 62-65). In ogni caso, una teoria tarskiana della verità è inadeguata a costruire una MT anche per un'altra ragione. Abbiamo visto che una MT non deve fare appello ad una precedente comprensione del linguaggio oggetto — perché ciò equivarrebbe a postulare nei parlanti delle capacità che la teoria non può spiegare —, mentre una teoria tarskiana fa precisamente una simile presupposizione: non potrei sapere che un solo esempio dello schema «"β" è vera sse α» è vero, se non sapessi che β è una traduzione di α, cioè se non capissi il linguaggio oggetto di cui β è parte. Se quindi si assume che il concetto di verità è determinato esaustivamente dalla conoscenza delle T-equivalenze (teoria *ridondantista* della verità), poiché tale conoscenza presuppone la comprensione del linguaggio oggetto, non si può spiegare per suo mezzo la comprensione del linguaggio stesso (cfr. Dummett (1959); (1978), $xx - xxi$; (1991), 67-72): per Dummett, una teoria ridondantista rende dunque impossibile una teoria del significato. Ma si noti che quest'argomento vale soltanto grazie all'ulteriore assunzione che una teoria della verità debba spiegare il significato.

La teoria tarskiana, in virtù del suo status di interpretazione programmatica, ha anche un altro grosso difetto. Abbiamo visto che un'interpretazione programmatica, essendo caratterizzata da stipulazioni dirette, dipende essenzialmente dalle leggi logiche che abbiamo assunto nel metalinguaggio. Il problema è che in questo modo veniamo privati di ogni possibilità di discutere su *quali* leggi dovremmo accettare, perché una legge vale nel linguaggio oggetto solo se vale nel metalinguaggio, e che valga o meno nel metalinguaggio sembra il risultato di una mera assunzione arbitraria. La teoria tarskiana, essendo un'interpretazione programmatica, rende pertanto impossibile determinare la logica corretta. Ciò di cui bisogna disporre è una semantica per quanto possibile indipendente dalla logica del metalinguaggio, in modo da assicurarsi una base comune di discussione. Secondo Dummett un buon candidato a costituire questa base comune è proprio la logica intuizionistica (cfr. cap. 3).

2.2. Semantiche modellistiche per gli operatori intuizionistici

Nella prospettiva di Dummett è essenziale accertare l'effettiva adeguatezza delle usuali semantiche per la logica intuizionistica rispetto all'interpretazione costruttivistica delle costanti logiche, visto che questa esplicita i significati intesi, e dunque una semantica può essere considerata corretta solo se incorpora tale spiegazione, o quantomeno può essere ricondotta ad essa (cfr. Dummett (1977), 389). I modelli di Beth e di Kripke, d'altra parte, si basano sull'idea di *stato di informazione*, e quindi sembrano a prima vista divergere concettualmente dall'interpretazione BHK. Dummett si limita comunque ad esaminare i modelli di Beth, presumibilmente per la “traducibilità" dei modelli di Kripke in questi ultimi (cfr. Dummett (1977), 190-193, 403-418; (1991), 151-154).

Introduciamo anzitutto alcuni concetti. Una *sequenza di scelta* è una successione infinita (per esempio, di numeri naturali) che può essere definita da una regola effettiva o principio di generazione (*lawlike sequence*), oppure può essere costruita mediante una libera scelta degli elementi (*lawless sequence*); tra questi due estremi vi possono poi essere dei casi intermedi in cui si impongono delle restrizioni parziali. Useremo le lettere φ, χ, ψ, come variabili per sequenze di scelta. Con $\bar{\varphi}(n)$ indicheremo un segmento iniziale di φ, ossia la sequenza finita $<\varphi(0),...,\varphi(n\text{-}1)>$ dei primi n elementi di φ; $\varphi(0)$ rappresenta la sequenza vuota $< >$. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, sono variabili per sequenze finite di numeri naturali, e u_{n-1} è l'n-esimo termine di $\vec{u}$. Se definiamo una funzione *lg* che misura la lunghezza delle sequenze finite, ponendo

$$lg(\vec{u}) = k \text{ sse } \vec{u} = <u_0,...,u_{k-1}>,$$

possiamo estendere le sequenze medante concatenazione:

$$\vec{u}*\vec{v} = <u_0,...,u_{j-1}, v_0,...,v_{k-1}>,$$

dove $lg(\vec{u}) = j$ e $lg(\vec{v}) = k$. Per ogni numero naturale n, scriveremo $\vec{u}\,\hat{}\,n = \vec{u}*<n>$. Per ogni $\vec{u}$ e $\vec{v}$, è ora definibile la relazione $\vec{u} \sqsubseteq \vec{v}$ ($\vec{v}$ è un'estensione di $\vec{u}$), nel seguente modo:

$$\vec{u} \sqsubseteq \vec{v} \;\leftrightarrow\; \exists \vec{w}(\vec{v} = \vec{u}*\vec{w}).$$

Uno *spiegamento* (spread) è un albero i cui rami infiniti sono sequenze di scelta e i cui nodi sono sequenze finite di numeri naturali, ossia ogni nodo è il segmento iniziale comune a tutte le sequenze di scelta (a tutti i rami) che passano per quel nodo. Poiché ogni nodo $\vec{u}$ determina la specie delle sequenze di scelta che hanno $\vec{u}$ come segmento iniziale, possiamo definire:

$$\varphi \in \vec{u} \;\leftrightarrow\; \exists n(\vec{u} = \bar{\varphi}(n)).$$

Più precisamente, uno spiegamento è definito mediante una funzione calcolabile s, detta *legge di spiegamento*, che determina quali sequenze finite fanno parte dello spiegamento. Per ogni sequenza finita, s assegna valore 0 se la sequenza è ammissibile, altrimenti assegna valore 1. Abbiamo allora la seguente

DEFINIZIONE. $\mathrm{sp}(s) \;\leftrightarrow\; s(< >) = 0 \;\wedge$
$$\forall \vec{u}(s(\vec{u}) = 0 \;\rightarrow\; \exists k\, s(\vec{u}\,\hat{}\,k) = 0) \;\wedge$$
$$\forall \vec{u}\forall \vec{v}(\vec{v} \sqsubseteq \vec{u} \;\wedge\; s(\vec{u}) = 0 \;\rightarrow\; s(\vec{v}) = 0) \;\wedge$$
$$\forall \vec{u}(s(\vec{u}) = 0 \;\vee\; s(\vec{u}) =1).$$

Essa afferma che (i) ogni spiegamento contiene almeno la sequenza vuota, (ii) ogni sequenza ammissibile ha almeno un'estensione ammissibile, (iii) un'estensione di una sequenza non è ammissibile se non lo è la sequenza stessa, e (iv) s è una funzione decidibile. Uno spiegamento può essere descritto come una coppia < K, $\sqsubseteq$ >, dove K è la collezione dei nodi, e $\sqsubseteq$ è la relazione d'ordine (parziale) sopra definita. Possiamo ora definire la nozione di sequenza di scelta come *elemento* di uno spiegamento:

$$\varphi \in s \; \leftrightarrow \; \forall n \; s(\bar{\varphi}(n)) = 0.$$

Uno spiegamento è detto *finitario* quando ogni nodo ha al massimo un numero finito di nodi immediatamente sotto di esso. Uno spiegamento finitario è chiamato *ventaglio* (fan). Infine, abbiamo bisogno della nozione di *sbarramento*.

DEFINIZIONE. Una specie A di sequenze finite di uno spiegamento *s sbarra* un nodo $\vec{u}$ sse

$$\forall \varphi_{\varphi \in s,\, \varphi \in \vec{u}} \; \exists n \; \bar{\varphi}(n) \in \mathrm{A}.$$

Essa afferma che qualsiasi percorso si scelga a partire da $\vec{u}$, si troverà un nodo che appartiene ad A. Nel seguito, per semplicità useremo *j, k, k',...* come variabili per i nodi.

DEFINIZIONE. Un *modello di Beth* per un linguaggio predicativo del primo ordine $\mathcal{L}$ è una struttura $\mathcal{B} \equiv$ < K, $\sqsubseteq$, D, $\models$, $\mathbb{F}$ > tale che

(i) < K, $\sqsubseteq$ > è uno spiegamento;

(ii) D è una specie abitata (assumiamo un dominio costante);

(iii) $\models$ è una relazione binaria tra elementi di K ed enunciati;

(iv) $\mathbb{F}$ è una funzione che ad ogni formula atomica α assegna una collezione $\mathbb{F}(\alpha)$ di nodi di K, con le condizioni seguenti:

(a) $k \models \alpha$ sse $k \in \mathbb{F}(\alpha)$;

(b) se $k \sqsubseteq k'$ e $k \models \alpha$, allora $k' \models \alpha$;

(c) se $\forall \varphi_{\varphi \in k} \; \exists m(\bar{\varphi}(m) \models \alpha)$, allora $k \models \alpha$.

Si noti che la (c) equivale a richiedere che, se esiste uno sbarramento A per k tale che per ogni $k' \in$ A, vale $k' \models \alpha$, allora α è vera già al nodo k. Per le formule complesse, $\models$ resta definita nel seguente modo:

$$k \models \alpha \wedge \beta \;:=\; k \models \alpha \text{ e } k \models \beta;$$

$$k \models \alpha \vee \beta \;:=\; \forall \varphi_{\varphi \in k} \; \exists n(\bar{\varphi}(n) \models \alpha \text{ oppure } \bar{\varphi}(n) \models \beta);$$

$$k \models \alpha \rightarrow \beta \;:=\; \forall k'_{k \sqsubseteq k'}(\text{se } k' \models \alpha \text{ allora } k' \models \beta);$$

$$k \models \neg \alpha \;:=\; \forall k'_{k \sqsubseteq k'} \text{ non } k' \models \alpha;$$

$k\models\exists x\alpha(x) := \forall\varphi_{\varphi\in k}\ \exists n\exists d_{d\in\mathrm{D}}(\bar{\varphi}(n)\models\alpha(d))$;

$k\models\forall x\alpha(x) := \forall d_{d\in\mathrm{D}}(k\models\alpha(d))$.

In un modello di Beth, l'estensione dei nodi può essere vista come evoluzione temporale: un nodo superiore corrisponde ad un momento successivo (un successivo stato di informazione), e nodi inconfrontabili rappresentano possibilitaà alternative di estendere la nostra conoscenza nel futuro. Le condizioni riguardanti le formule atomiche, la disgiunzione e il quantificatore esistenziale affermano allora che possiamo già considerare vera una proposizione avente una delle forme suddette quando, comunque evolva la nostra informazione, otterremo tali proposizioni in un lasso di tempo finito. E' inoltre rilevante notare che la relazione $k\models\alpha$, per k e α arbitrari, non è in generale decidibile, perché abbiamo definito i modelli di Beth sulla base della nozione di spiegamento e gli spiegamenti si compongono di rami infiniti.

Nel tentativo di ricondurre le definizioni dei modelli di Beth ad un quadro quanto più fedele possibile all'interpretazione costruttivistica delle costanti logiche, e in particolare alla distinzione prova canonica/dimostrazione, Dummett ha proposto una riformulazione delle definizioni, distinguendo tra *verificazione*-prova canonica da un lato (che noi indicheremo con il segno $\Vdash$), e *verità*-dimostrazione dall'altro (per cui manteniamo il segno $\models$). A questo scopo, il primo passo è modificare la stessa definizione di verità data in precedenza: la condizione (iv.a) diventa ora

$k\Vdash\alpha$ sse $k \in \mathbb{F}(\alpha)$,

ovvero l'assegnazione di formule atomiche ai nodi rappresenta il prototipo di ciò che conta come prova canonica. Riguardo a $\Vdash$ (con α atomica), richiediamo inoltre:

(a) se $k \sqsubseteq k'$ e $k\Vdash\alpha$, allora $k'\Vdash\alpha$;

(b) per ogni k e α, $k\Vdash\alpha$ oppure non $k\Vdash\alpha$.

La definizione induttiva di $\models$ viene ora data nel seguente modo: per α atomica, α è vera ad un nodo k quando esiste uno sbarramento per k in cui tutti i nodi *verificano* α:

$k\models\alpha\ := \forall\varphi_{\varphi\in k}\ \exists m(\bar{\varphi}(m)\Vdash\alpha)$;

per α non atomica, le definizioni rimangono invariate. In questo modo la nozione di verità è definita in termini della verificazione di enunciati atomici, in conformità con la preminenza delle prove canoniche per la determinazione del significato. Sapere che un certo enunciato atomico sarà verificato in un tempo finito non costituisce ancora una verificazione di esso, ma ci permette già di asserirlo (di considerarlo vero). Il secondo passo consiste nello specificare in cosa consista la verificabilità anche per gli enunciati

complessi. Ciò è dato dalla seguente
DEFINIZIONE.

$k \Vdash \alpha \wedge \beta \ := k \Vdash \alpha$ e $k \Vdash \beta$;

$k \Vdash \alpha \vee \beta \ := k \Vdash \alpha$ oppure $k \Vdash \beta$;

$k \Vdash \alpha \rightarrow \beta \ := \forall k'_{k \sqsubseteq k'}$(se $k' \Vdash \alpha$ allora $\forall \varphi_{\varphi \in k'}\ \exists n(\bar{\varphi}(n) \Vdash \beta)$);

$k \Vdash \neg \alpha \ := \forall k'_{k \sqsubseteq k'}$ non $k' \Vdash \alpha$;

$k \Vdash \forall x \alpha(x) \ := \forall d_{d \in \mathrm{D}}\ \forall \varphi_{\varphi \in k}\ \exists n(\bar{\varphi}(n) \Vdash \alpha(d))$;

$k \Vdash \exists x \alpha(x) \ := \exists d_{d \in \mathrm{D}}(k \Vdash \alpha(d))$.

LEMMA. Se $k \Vdash \alpha$ e $k \sqsubseteq k'$, allora $k' \Vdash \alpha$.
Dimostrazione. Per induzione sulla complessità di α. La base vale per la condizione (a). Per il passo induttivo, consideriamo alcuni esempi. Sia $\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$, e supponiamo $k \Vdash \beta \rightarrow \gamma$. Per la definizione, ciò vuol dire che $\forall k'_{k \sqsubseteq k'}$(se $k' \Vdash \beta$ allora $\forall \varphi_{\varphi \in k'}\ \exists n(\bar{\varphi}(n) \Vdash \gamma)$), e assumendo $k' \Vdash \beta$, per ipotesi di induzione abbiamo, per ogni k'' tale che $k' \sqsubseteq k''$, $k'' \Vdash \beta$. Poiché $k \sqsubseteq k' \sqsubseteq k''$, k'' estende k, e dunque deve accadere che per ogni sequenza di scelta ψ che passa per k'', esista un m tale che il nodo $\bar{\psi}(m)$ verifica γ. Ossia, abbiamo: $\forall k''_{k' \sqsubseteq k''}$(se $k'' \Vdash \beta$ allora $\forall \psi_{\psi \in k''}\ \exists m(\bar{\psi}(m) \Vdash \gamma)$), e quindi $k' \Vdash \beta \rightarrow \gamma$.
Sia $\alpha \equiv \exists x \beta(x)$, e $k \Vdash \exists x \beta(x)$. Allora esiste un $d \in \mathrm{D}$ tale che $k \Vdash \beta(d)$, e per ipotesi di induzione abbiamo che $k' \Vdash \beta(d)$ (con $k \sqsubseteq k'$), per un certo d, e dunque $k' \Vdash \exists x \beta(x)$. $\square$

TEOREMA. $k \models \alpha$ sse $\forall \varphi_{\varphi \in k}\ \exists n(\bar{\varphi}(n) \Vdash \alpha)$.
Dimostrazione. Per induzione sulla complessità di α. Se α è atomica, il teorema vale per la definizione di verità. Consideriamo alcuni casi in cui α non sia atomica. Sia $\alpha \equiv \beta \vee \gamma$. Per la definizione, $k \models \beta \vee \gamma$ sse $\forall \psi_{\psi \in k}$ $\exists m(\bar{\psi}(m) \models \beta$ oppure $\bar{\psi}(m) \models \gamma)$, e dunque, per l'ipotesi induttiva, sse $\forall \varphi_{\varphi \in k}\ \exists n(\bar{\varphi}(n) \Vdash \beta$ oppure $\bar{\varphi}(n) \Vdash \gamma)$, che equivale a $\forall \varphi_{\varphi \in k}\ \exists n(\bar{\varphi}(n) \Vdash \beta \vee \gamma)$. Sia $\alpha \equiv \forall x \beta(x)$. Per la definizione, abbiamo $k \models \forall x \beta(x)$ sse $\forall d_{d \in \mathrm{D}}(k \models \beta(d))$, ossia, per ipotesi di induzione, sse $\forall d_{d \in \mathrm{D}}\ \forall \varphi_{\varphi \in k}\ \exists n(\bar{\varphi}(n) \Vdash \beta(d))$, e quindi $k \Vdash \forall x \beta(x)$, per la definizione di $\Vdash$. Dal lemma sappiamo che $\forall x \beta(x)$ è verificata ad ogni nodo che estende k, e dunque sicuramente esiste uno sbarramento i cui elementi verificano tutti $\forall x \beta(x)$: $\forall \varphi_{\varphi \in k}\ \exists n(\bar{\varphi}(n) \Vdash \forall x \beta(x))$. $\square$
A questo punto possiamo assumere la definizione di verificazione come fondamentale, e definire la verità di α nel seguente modo: α è vera a k sse esiste uno sbarramento per k i cui elementi verificano α.

Questo teorema mostra in che senso le definizioni date risultino in accordo con i significati intesi: una proposizione α di complessità arbitraria è vera a k quando, dopo un numero finito di passi temporali, si otterrà una sua verificazione. Anche nel caso dell'implicazione, abbiamo una definizione intuitivamente corretta: $\beta \to \gamma$ è verificata a k quando sappiamo che, una volta ottenuta una verificazione di β, in un tempo finito otterremo anche una verificazione di γ; e analogamente per il quantificatore universale. Ciò non coincide ancora con l'interpretazione costruttivistica e con i concetti di prova canonica e dimostrazione, perché per avere una dimostrazione non si richiede che si possa ottenere una prova canonica in un tempo futuro: avere un metodo per ottenere una prova canonica non costituisce ancora alcuna garanzia che la otterremo davvero, e allo stesso modo avere un metodo per passare da una prova di β ad una prova di γ non ci assicura che questo passaggio possa avvenire di fatto. Questa difficoltà può essere superata modificando l'interpretazione intuitiva dei modelli di Beth: anziché intendere la relazione di accessibilità tra stati di informazione come lo scorrere del tempo, per cui il passaggio da uno stato all'altro risulta ineluttabile, si può pensare tale passaggio come il tentativo (non necessariamente coronato dal successo) di ottenere nuova informazione, per cui se non facciamo alcun tentativo, rimaniamo per sempre allo stesso stadio. In questo modo, avere uno sbarramento per k tale che tutti gli elementi dello sbarramento verificano α, non significa che giungeremo senz'altro alla verificazione di α, ma solo che abbiamo un metodo per arrivare ad uno dei nodi che la verificano.

Tuttavia, secondo Dummett i modelli di Beth non possono costituire una teoria semantica per la logica intuizionistica, essendovi dei punti fondamentali di divergenza con l'interpretazione intesa. Un assunto essenziale di quest'ultima è che la relazione di dimostrabilità sia decidibile, ovvero, deve potersi decidere se una certa costruzione costituisce o meno una prova (canonica) di un dato enunciato. Ciò ha l'importante conseguenza che nella spiegazione delle costanti logiche non si assume altro che la comprensione di enunciati e predicati decidibili, e dunque essa evita la circolarità tipica della spiegazione classica, che invece assegna certi significati alle costanti logiche solo assumendo di averli già compresi. L'interpretazione costruttivistica è dunque un'autentica spiegazione, perché per capirla non è necessario conoscere l'intero significato delle costanti logiche, ma solo i significati in contesti ristretti in cui vale la decidibilità; e poiché la decidibilità assicura la manifestabilità, si capisce che questa è per Dummett una solida garanzia del possesso di un'interpretazione pienamente intelligibile e non circolare. Nel caso dei modelli di Beth, come abbiamo accennato, in generale non è invece decidibile se una certa formula è vera o è verificata ad un certo nodo, e quindi abbiamo qui essenzialmente la stessa forma di circolarità presente nella logica classica: la definizione di verificazione (o di verità) relativa ad un certo nodo non si può considerare un'autentica spiegazione, perché presuppone che si sia già compreso l'intero significato delle costanti logiche. Inoltre, la definizione di verità è tale che tutte le conseguenze logiche di una certa proposizione vera ad un nodo sono anch'esse vere a quel nodo, e poiché noi non conosciamo tutte le conseguenze di ciò che abbiamo dimostrato, non possiamo nemmeno identificare la verità ad un nodo con il possesso effettivo di una dimostrazione nello stato di informazione corrispondente. Dummett conclude pertanto che i modelli di Beth, benché importanti strumenti per studiare la logica intuizionistica, non possono essere visti come spiegazioni dei significati intesi delle costanti logiche, e che questa spiegazione può essere data *solo* in termini della nozione di costruzione e del riconoscimento di una costruzione come prova di un certo enunciato (cfr. (1977), 418).

In ogni caso, i modelli di Beth non sono per Dummett una teoria semantica autentica anche a prescindere dalle restrizioni imposte dal punto di vista intuizionistico. Sostanzialmente, il motivo di ciò è che in essi viene violata la condizione (iv) della teoria del senso, che afferma che il riferimento di una certa espressione *mostra* qual'è il suo senso (cfr. § 1.2.). Possiamo costrure un modello tale che la proposizione $\neg\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ (per un certo predicato F) risulta vera, considerando un albero binario (tale, cioè, che per ogni nodo ci sono due rami che si dipartono da esso) e stipulando che $F(x)$ è verificata ad un certo nodo sse per raggiungere quel nodo dal vertice dobbiamo fare almeno $n+1$ passi a destra, non necessariamente in successione: a nessun nodo di livello n la formula $F(n) \vee \neg F(n)$ sarà allora verificata, e quindi la formula $\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ non risulta verificata a nessun nodo; dunque, $\neg\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ è verificata al vertice. Tuttavia, avere specificato un modello (il riferimento) per la formula in questione non ci permette di sapere qual'è il significato (il senso) del predicato F, perché di fatto non abbiamo idea di come costruire un simile predicato, e non sappiamo nemmeno se esso *esiste*. Ciò vuol dire che “no guarantee has been given that any Beth tree we like to construct will represent a genuinely possible situation" (Dummett (1991), 153): i modelli di Beth sono soltanto lo scheletro o la forma astratta di una ST. Per avere una semantica autentica, dovremmo avere un metodo per *identificare* gli stati di informazione, che non sia soltanto la specificazione della posizione nell'albero dei nodi corrispondenti e delle formule atomiche assegnate a quei nodi. “This means that we should be able to specify, for each atomic sentence, in what a verification of it will consist. [...] The Beth tree itself [...] gives only the abstract structure of the situation; what will determine specific sense for the predicates and sentences will be the statement of what, concretely, is to count as a verification of each atomic sentence" (ibid., 154).

2.3. Il programma di Prawitz e la nozione di conseguenza logica

Benché nella sua definizione di teoria semantica Dummett non faccia riferimento alla nozione di conseguenza logica, è sua opinione che la logica non sia una teoria assiomatica i cui teoremi sono le leggi logiche, ma che essa sia piuttosto la scienza che studia i nessi di conseguenza tra proposizioni: “The use, before Gentzen, of axiomatic formalisations of logic had [...] unfortunate effects. It was, in the first place, conceptually misleading. It diverted attention from the obvious fact that, whereas in a *theory* our concern is to establish true statements, and the derivation of statements from others is only a means to this end, in *logic* the process of derivation is itself the object of study. Axiomatic formalisations, unlike natural deduction, tempt us to regard logic as a search for logical truths" ((1977), 168). Ciò va contro la tradizione che parte da Frege e Russell e che ha ancora oggi prestigiosi esponenti, quali per esempio Quine. Il suo libro sulla filosofia della logica (1970) non fa infatti alcun riferimento alla nozione di conseguenza, e in apertura reca l'affermazione programmatica secondo cui “logic is the systematic study of the logical truths" (*vii*).

Prawitz ha affrontato in più occasioni il problema di dare una caratterizzazione soddisfacente della relazione di conseguenza, mettendo in discussione l'adeguatezza sia intensionale che estensionale della definizione modellistica. L'analisi di Prawitz può essere compresa appieno solo nel contesto del suo programma di ricerca logico, di cui ora esamineremo anzitutto le motivazioni filosofiche.

2.3.1. DAL PROGRAMMA DI HILBERT ALLA TEORIA GENERALE DELLA DIMOSTRAZIONE

Il modo migliore per valutare la posizione complessiva di Prawitz sembra quello di descriverla come risultato della riflessione sulla problematica fondazionale sollevata da Hilbert. L'obiettivo del programma di Hilbert era quello di fornire una fondazione *finitistica* della matematica, nel senso che le proposizioni matematiche che fanno riferimento a totalità infinite — dette proposizioni *ideali* —, essendo prive di significato, devono venire ricondotte alle proposizioni finitarie — dette proposizioni *reali* —, che sono invece completamente significanti. Il valore epistemologico della riduzione eè dato dal fatto che le proposizioni reali sono chiare ed affidabili, essendo connesse a procedure di calcolo, mentre le proposizioni ideali non lo sono allo stesso modo, in quanto non direttamente significanti: data questa caratterizzazione, nulla ci assicura che il loro impiego non faccia sorgere delle contraddizioni, visto che una proposizione reale può essere dimostrata facendo ricorso alla parte ideale, e dato il senso non perspicuo di quest'ultima, non sappiamo se tale ricorso non faccia sorgere conflitti con le dimostrazioni ottenute nella parte reale. Il programma di Hilbert, pertanto, si traduce nel tentativo di una dimostrazione di consistenza: assunta come corretta la parte reale di una teoria, e dimostrando, *nella parte reale*, la consistenza della teoria stessa, ci si convince che l'impiego di metodi non finitari non conduce ad alcun conflitto, e che pertanto li si può legittimamente adottare come utili strumenti. Per ottenere la dimostrazione di consistenza, è sufficiente dimostrare che la parte ideale è un'*estensione conservativa* della parte reale, ossia che per ogni proposizione esprimibile nel linguaggio della parte reale e dimostrabile dalla teoria può essere dimostrata senza impiegare metodi infinitari. Chiaramente, in questo modo abbiamo una dimostrazione di consistenza *relativa*: se la parte reale è consistente, allora estenderla mediante aggiunzione della parte ideale non ci fa perdere la consistenza, dato che nella teoria estesa non si può dimostrare nessuna proposizione che sia esprimibile nella sola parte reale e che non sia dimostrabile in essa. In questo modo si mostra che ogni riferimento al transfinito è eliminabile quando siamo interessati soltanto alle proposizioni reali. Poiché per Hilbert non era importante solo l'obiettivo della dimostrazione di consistenza, ma anche il modo in cui questa dimostrazione deve essere condotta, ossia mediante l'uso di strumenti finitari, l'operazione preliminare doveva essere quella di formalizzare la teoria indagata, e di studiare le dimostrazioni ottenibili nei sistemi formali.

Come è noto, per effetto dei teoremi di Gödel il programma di Hilbert non è realizzabile nella sua forma originaria. Le critiche di Prawitz sono rivolte però non all'idea della dimostrazione di consistenza, che è invece fonte di importanti risultati, ma alle motivazioni che reggono quest'intento. Egli sottolinea come la posizione di Hilbert non possa essere identificata con l'*ultraformalismo* (strict formalism), ossia con la concezione secondo la quale la matematica è un'attività governata da regole formali, cosicché essa sarebbe assimilabile ad un gioco piuttosto che ad una scienza: nelle proposizioni matematiche non sarebbe rinvenibile alcun significato più profondo di quello che è attribuito loro dalle regole del gioco. Che l'ultraformalismo sia del tutto estraneo alle idee si Hilbert si vede già dal fatto che esso è incompatibile con il carattere *matematico* del problema della consistenza. Se stabilire la consistenza di una certa teoria vuol dire stabilire una verità sulla teoria data, e se la dimostrazione è una dimostrazione matematica, allora vi è almeno un ambito della matematica che non è descrivibile in termini ultraformalistici; ma non si vede perché le uniche proposizioni matematiche di cui si possa dire che sono vere in un senso non banale debbano essere quelle usate nella dimostrazione di consistenza. In effetti, Hilbert adottò una posizione formalistica solo rispetto alle proposizioni ideali, mentre le proposizioni reali erano da lui considerate perfettamente significanti: la sua concezione è pertanto descrivibile come *formalismo moderato* (cfr. Prawitz (1981), 252-254; (1993), 90-91). Il difetto principale di una simile posizione è secondo Prawitz che il significato delle proposizioni ideali resta totalmente inspiegato: "A reasonable foundation of mathematics cannot treat the transfinite part of mathematics as an instrument, a black box, that happens to give correct results; the weakness of such an instrumentalistic position, i. e. the position of moderate formalism taken literally, is obvious since the foundational task must be to explain why the instrument works, i. e. to explain it. [...] In short, to make Hilbert's program at all credible, one must require that it yields an interpretation of also the ideal sentences" ((1981), 268). Secondo Prawitz, il programma di Hilbert mette assieme due motivazioni inconciliabili: l'esigenza di fornire una fondazione finitistica della matematica, da un lato, e l'esigenza di giustificare l'uso di tutte le nozioni classiche, dall'altro. Ma in questo modo si lascia totalmente inspiegato il significato dei metodi infinitari.

Di fatto, nota Prawitz, nessun esponente della scuola di Hilbert accettò alla lettera il formalismo moderato, e nello stesso Hilbert sono presenti forti oscillazioni a questo proposito (cfr. (1993), 95). L'opinione di Gentzen, in particolare, era che le proposizioni ideali hanno sì un significato, ma che questo non è del tutto chiaro e determinato. Dato questo punto di vista, l'obiettivo del programma si rivela allora troppo modesto, perché la dimostrazione di consistenza non garantisce che non si manifestino altri fenomeni indesiderati, quali ad esempio l'ω-inconsistenza: la teoria può dimostrare una certa proposizione esistenziale benché essa sia falsa, non soltanto secondo un'interpretazione finitaria, ma anche secondo il punto di vista transfinito. E se anche le proposizioni ideali hanno significato, si deve senz'altro richiedere che una fondazione della matematica mostri come i risultati sulle proposizioni ideali siano in accordo con questo significato (cfr. (1981), 259; (1993), 97). Prawitz conclude pertanto che "the crucial foundational problem is thus not the truth of the provable real sentences or the eliminability of ideal elements from proofs of real sentences but *the problem of the meaning of the so-called ideal sentences*" ((1981), 269; corsivi nostri). Mantenendo la premessa che una fondazione della matematica deve attenersi a principi costruttivistici, la soluzione diventa allora quella di sviluppare la matematica costruttivisticamente fin dove è possibile, e abbandonare quegli ambiti che non sono spiegabili in questo modo.

Secondo Prawitz il grande merito del programma di Hilbert è stato d'altra parte quello di aver messo in risalto il fatto che si danno modi differenti di dimostrare una stessa proposizione, e che questi modi non devono entrare in conflitto tra loro. Questo punto fu chiarificato dal fondamentale lavoro di Gentzen, con il quale si gettarono le basi di una teoria della *struttura* delle dimostrazioni, e quindi di una teoria della dimostrazione non strumentale rispetto ad altri scopi, come era concepita da Hilbert. Una teoria alla Hilbert è chiamata da Prawitz teoria *riduttiva* della dimostrazione, nel senso che essa è intesa come strumento per la riduzione di una certa teoria T_1 ad un'altra teoria T_2, ritenuta più fondamentale. Da essa egli distingue una *teoria generale* della dimostrazione, che assume le dimostrazioni stesse come oggetto di studio, indipendentemente da scopi riduttivi, e che è caratterizzata da due elementi fondamentali. In primo luogo, essendo rivolta a determinare la natura strutturale ed epistemologica delle dimostrazioni, ossia il loro carattere di mezzi per ottenere verità e conseguenze logiche da certe premesse, la teoria generale non può riferirsi alle dimostrazioni ottenibili all'interno di un sistema formale, per il teorema di incompletezza di Gödel. L'obiettivo della teoria, in altri termini, è quello di pervenire ad una *nozione assoluta di dimostrabilità*, non ristretta ai mezzi dimostrativi di un certo sistema ed ai mezzi espressivi di un dato linguaggio formale, che sia paragonabile alla definizione di algoritmo della teoria della ricorsività o a quella di conseguenza logica della teoria dei modelli. Il teorema di Gödel mostra soltanto che questa nozione assoluta non può essere identificata con la nozione di dimostrabilità in un sistema formale, ma non esclude che una simile definizione sia possibile (cfr. Prawitz (1981), 236-237, 251). In secondo luogo, lo studio delle dimostrazioni intese come mezzi per giungere a delle verità non può essere scissa da una teoria del significato per gli enunciati coinvolti nelle dimostrazioni (ibid., 237). Poiché questa teoria assumerà, nei suoi tratti generali, la forma di una teoria verificazionista quale proposta da Dummett, e poiché la definizione modellistica di conseguenza logica è solidale invece con una teoria verocondizionale, che trascura i modi o processi attraverso i quali da certe premesse si giunge a certe conclusioni, diventa naturale proporre la nozione (assoluta) di dimostrabilità come spiegazione della relazione di conseguenza, alternativa a quella data da Tarski in termini di modelli.

2.3.2. LA DEFINIZIONE DI TARSKI

Tarski (1936) pone le seguenti condizioni di adeguatezza di una analisi del concetto di conseguenza logica.

CONDIZIONE GENERALE. La definizione deve essere conforme, sia intensionalmente che estensionalmente, al concetto intuitivo o ordinario di conseguenza logica: che una proposizione segua logicamente da altre proposizioni non può dipendere, infatti, dalla decisione arbitraria di qualcuno. D'altra parte, poiché l'uso linguistico è per lo più vago, Tarski ammette che in ogni definizione rigorosa saranno presenti dei caratteri arbitrari, per cui un certo margine di scostamento dall'uso ordinario è inevitabile.

Benché questa condizione sia a sua volta del tutto vaga, Tarski ritiene che essa sia sufficiente ad escludere che la relazione di conseguenza possa essere identificata con la relazione di derivabilità in un certo sistema formale, in quanto ciò conduce ad una definizione *estensionalmente* inadeguata (egli non muove a questa identificazione alcuna critica di inadeguatezza concettuale). Per il teorema di incompletezza di Gödel, infatti, ogni sistema formale sufficientemente potente (in cui sia possibile, cioè, sviluppare l'aritmentica ricorsiva primitiva) è ω-incompleto, ossia esiste una proposizione α tale che, per ogni numero naturale n, il sistema dimostra $\alpha(n)$, ma non la proposizione universale $\forall x \alpha(x)$. Poiché da un punto di vista intuitivo quest'ultima segue logicamente dalle proposizioni $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), ...,$ l'ω-incompletezza mostra che la derivabilità in un sistema non coincide con l'idea comune di conseguenza logica. Né, d'altra parte, è possibile superare quest'ostacolo aumentando la potenza deduttiva del sistema mediante nuovi assiomi, perché nel nuovo sistema sarà ancora possibile costruire proposizioni non dimostrabii ma che seguono logicamente, nel senso intuitivo, dagli assiomi della teoria. Da ciò si conclude che sulla base di una definizione adeguata ogni enunciato di Gödel deve risultare conseguenza logica degli assiomi della teoria. Un simile argomento ha ripercussioni ancor più generali, perché esso implica che ogni definizione di conseguenza che sia equivalente alla derivabilità in un certo sistema formale, ossia ogni definizione per la quale si possa dimostrare un teorema di completezza, è estensionalmente inadeguata, perché lascia fuori proposizioni che sono, secondo il concetto intuitivo, conseguenza logica di altre proposizioni.

Il contenuto della condizione generale viene precisato dalle tre condizioni seguenti, che si propongono come necessarie e sufficienti per una definizione adeguata.

CONDIZIONE 1. Se l'enunciato α segue logicamente da un insieme di enunciati Γ, allora non può accadere che tutti gli enunciati appartenenti a Γ siano veri e α sia falso.

CONDIZIONE 2. Poiché la relazione di conseguenza che qui è in questione è quella logico-formale, essa deve essere determinata unicamente dalla forma degli enunciati tra i quali sussiste, e dunque non può essere influenzata da una qualche conoscenza empirica. In particolare, deve essere irrilevante la conoscenza degli oggetti a cui si riferiscono gli enunciati $\beta_1,...,\beta_n$, α (dove $\beta_i \in \Gamma$, con $1 \leq i \leq n$), cioè deve essere possibile sostituire le designazioni degli oggetti a cui questi enunciati si riferiscono, con le designazioni di altri oggetti qualsivoglia.

Mettendo assieme le condizioni 1. e 2., otteniamo la seguente asserzione:

Dato un insieme di enunciati Γ e un enunciato α, se sostituiamo tutte le costanti non logiche con altre costanti (appartenenti alla stessa categoria grammaticale), e denotiamo con Γ' l'insieme degli enunciati così ottenuti a partire da Γ, e con α' l'enunciato ottenuto da α, allora l'enunciato α' deve essere vero se tutti gli enunciati di Γ' sono veri.

In altri termini, α è conseguenza logica di Γ solo se, per tutte le sostituzioni delle costanti non logiche di Γ e α, $\Gamma' \rightarrow \alpha'$ è vero. Chiaramente, presupposto essenziale di quest'analisi è la distinzione tra costanti logiche e non logiche. Tuttavia questa distinzione non ha per Tarski un fondamento oggettivo, e ciò costituisce un grave problema irrisolto nella sua teoria. Stando così le cose, sembra di dover relativizzare la definizione ad una particolare scelta di espressioni fissate $\mathfrak{F}$, senza che per tale scelta sia possibile fornire dei criteri oggettivi. Come casi limite, se tutte le espressioni del linguaggio fossero incluse in $\mathfrak{F}$, il concetto di conseguenza formale si ridurrebbe a quello di conseguenza materiale (e quello di verità logica a quello di verità materiale), mentre se $\mathfrak{F}$ fosse vuoto, nessuna proposizione α

sarebbe conseguenza logica di un qualche insieme di proposizioni Γ, a meno che la stessa α non fosse contenuta in Γ. Ciò non vuol dire, naturalmente, che non si abbia alcuna idea di quali espressioni debbano appartenere a $\mathfrak{F}$ (se escludessimo $\rightarrow$ e $\forall$, per esempio, otterremmo dei risultati che contraddirebbero l'uso ordinario), ma che non esiste un argomento oggettivamente fondato che dimostri che una certa scelta di $\mathfrak{F}$ è quella estensionalmente adeguata.

CONDIZIONE 3. Il concetto di conseguenza logica deve essere indipendente dalla potenza espressiva del linguaggio rispetto al quale questo concetto viene definito. Senza questa condizione, una certa proposizione α potrebbe risultare conseguenza logica di Γ pur non essendolo nel senso intuitivo, ossia il test di sostituzione potrebbe non falsificare l'argomento in nessun caso soltanto perché il linguaggio non ha sufficienti mezzi espressivi.

La soluzione di Tarski è quella di ricorrere alla nozione di *soddisfazione*. Supponendo dati i domini di definizione delle espressioni del linguaggio (ossia quali categorie di oggetti le varie espressioni denotano: individui per i nomi, insiemi di n-uple ordinate per le relazioni, ecc.), possiamo chiederci se tra gli oggetti appartenenti a tali domini e le funzioni proposizionali del linguaggio sussiste una relazione di soddisfazione, cioè se, data un'attribuzione di valori alle variabili di una funzione proposizionale (in cui tutte le costanti non logiche siano state sostituite da variabili del tipo appropriato), le relazioni assegnate alle variabili predicative sussistono tra gli oggetti assegnati alle variabili individuali. L'attribuzione di valori avviene mediante una *sequenza f*, ossia una funzione che assegna un oggetto del dominio appropriato a ciascuna variabile; si dirà allora che una sequenza soddisfa, o meno, una funzione proposizionale. Una volta fornita una definizione ricorsiva di soddisfazione, si può definire il concetto di verità e conseguenza logica. Sia α' la funzione proposizionale ottenuta sostituendo uniformemente tutte le costanti non logiche di α (per una scelta $\mathfrak{F}$ di costanti logiche) con variabili del tipo appropriato. Allora abbiamo la seguente

DEFINIZIONE. α è *logicamente vera rispetto a* $\mathfrak{F}$ sse α' è soddisfatta da ogni sequenza.

Sia $<\Gamma, \alpha>$ un *argomento* che si conclude con l'enunciato α a partire dall'insieme di premesse Γ, e sia $<\Gamma', \alpha'>$ la *forma d'argomento* ottenuta sostituendo tutte le costanti non logiche presenti in Γ, α con le opportune variabili.

DEFINIZIONE. $<\Gamma', \alpha'>$ è *conservativo della soddisfazione rispetto alla sequenza f* sse *f* soddisfa α' posto che *f* soddisfi tutti i membri di Γ'.

DEFINIZIONE. $<\Gamma, \alpha>$ è *logicamente valido rispetto ad* $\mathfrak{F}$ sse $<\Gamma', \alpha'>$ è conservativo della soddisfazione rispetto a tutte le sequenze.

DEFINIZIONE. Un enunciato α è *conseguenza logica, rispetto ad* $\mathfrak{F}$, di un insieme Γ sse il corrispondente argomento $<\Gamma, \alpha>$ è logicamente valido rispetto ad $\mathfrak{F}$.

Se chiamiamo *modello di* Γ una sequenza f che soddisfi ogni funzione proposizionale di Γ', possiamo dire, seguendo più fedelmente la definizione data da Tarski, che α segue logicamente da Γ sse ogni modello di Γ è anche modello di α. Stando a questa definizione, la verità logica può essere vista come un caso limite di conseguenza logica: α è logicamente vera quando è conseguenza dell'insieme vuoto di premesse, o è conseguenza di un insieme qualunque.

Questa definizione soddisfa la condizione 3, perché la soddisfazione si riferisce ai domini di definizione già fissati, indipendentemente dal fatto che nel linguaggio vi siano le espressioni denotanti tutti gli oggetti possibili. In questo modo, la relazione di conseguenza logica dipende solo dal rapporto tra oggetti e funzioni proposizionali, e non anche dalle espressioni denotanti questi oggetti. Le condizioni 1-2 sono banalmente soddisfatte.

Una questione interessante è come la critica di Tarski alla conseguenza logica e derivabilità in un sistema si inquadri in quest'analisi. Affermare che le condizioni 1-3 sono sufficienti a caratterizzare il concetto di conseguenza logica equivale a sostenere che tutto il contenuto esplicitabile della condizione generale si traduce nella seguente asserzione:

TESI DI TARSKI. α è conseguenza logica di Γ sse, posto che tutte le proposizioni di Γ siano vere, allora α è vera, e inoltre ciò vale indipendentemente da ogni circostanza extralogica e dalla particolare configurazione del linguaggio cui α e Γ appartengono.

Perché l'argomento di Tarski sia consistente con questa tesi, bisogna che gli enunciati di Gödel seguano logicamente dagli assiomi delle relative teorie senza riferimento a fatti non logici. Nel contesto della presente analisi, tuttavia, chiedersi cosa rientri nell'ambito della logica significa chiedersi quale debba essere l'estensione dell'insieme delle espressioni fissate $\mathfrak{F}$, e abbiamo visto che questo problema non ammette una risposta conclusiva. Perché gli enunciati in questione risultino conseguenza logica degli assiomi, bisognerebbe inserire in $\mathfrak{F}$ espressioni che normalmente non sono considerate costanti logiche, e ciò comporta il rischio di ottenere verità logiche che intuitivamente non lo sono. A causa di queste difficoltà, Tarski ha in seguito abbandonato il suo argomento basato sui risultati di Gödel (cfr. Etchemendy (1988)), e la sua analisi è andata a costituire la definizione standard della teoria dei modelli.

2.3.3. EVIDENZA, FONDAMENTO E NECESSITA' DELLA CONSEGUENZA LOGICA

L'aspetto dell'analisi di Tarski che Prawitz ritiene pienamente corretto è proprio la critica all'identificazione della conseguenza logica con la derivabilità in un certo calcolo logico (cfr. (1974), (1985)): essa è inadeguata sia perché in questo modo gli enunciati di Gödel non risultano conseguenza logica degli assiomi, e sia perché ciò non fornisce alcuna reale analisi del concetto di conseguenza, essendo frutto di una decisione arbitraria quale calcolo logico debba essere scelto. Anche trascurando il primo problema, tutto quello che si può ottenere è una corrispondenza estensionale tra derivabilità e conseguenza logica, ma non un'analisi intensionale di quest'ultima. La conclusione è pertanto che la definizione di conseguenza non deve fare riferimento ad un linguaggio o ad un calcolo particolari.

D'altra parte, se si assume, come fa Prawitz, che della verità debba essere data una caratterizzazione epistemica, un ovvio motivo di insoddisfazione nei confronti della definizione tarskiana è il fatto che essa non dice nulla riguardo a *come giungiamo a conoscere* le verità logiche: “In model theory, one concentrates on questions like what sentences are logically valid and what sentences follow logically from other sentences. But one disregards questions concerning *how we know* that a sentence is logically valid or follows logically from another sentence. General proof theory would thus be an attempt to supplement model theory by studying also the *evidence* or the *process* — i. e., in other words, the proofs — by which we come to know logical validities and logical consequences" ((1974), 66; corsivi nostri). E' chiaro infatti che, data la definizione di Tarski, non c'è modo di ottenere informazioni rilevanti circa i processi che permettono di determinare un rapporto di conseguenza tra proposizioni: “there is no direct route from the [model-theoretic] notion of logical consequence to the notion of proof: a proof may correctly be said to consist of a number of valid inferences, but the condition that the conclusion is a logical consequence of the premisses is clearly only a sufficient condition for the appearance of an inference in a proof; nobody counts just some axioms immediately followed by a non-trivial theorem as a proof even if a theorem happens to follow logically from the axioms. Obviously, some kind of evidence is also required of the inferences of the proof; one must in some way take seriously that the conclusion is *seen* to be true" ((1981), 237-238).

Un secondo difetto della definizione di Tarski è che essa non spiega qual'è il *fondamento* (ground) della verità logica, ossia non costituisce alcuna riduzione di questo concetto ad altri concetti interessanti. Supponiamo per esempio di chiederci se la proposizione $\exists x \neg\alpha(x)$ segue logicamente da $\neg\forall x\alpha(x)$: dalla definizione, sappiamo che ciò accade quando $\exists x \neg\alpha(x)$ è vera in tutti i modelli in cui $\neg\forall x\alpha(x)$ è vera. Ma ciò equivale a chiedersi se in ogni modello <D, ρ> esiste un elemento $e \in$ D che non appartiene a $\rho(\alpha)$ ogniqualvolta non tutti gli elementi $e \in$ D appartengono a $\rho(\alpha)$, ossia, siamo di fatto tornati alla questione se $\exists x \neg\alpha(x)$ segue logicamente da $\neg\forall x\alpha(x)$ (cfr. Prawitz (1974), 67). La spiegazione è dunque circolare, non, naturalmente, nel senso che usa il definiens nel definiendum, ma nel senso che non spiega le nozioni di verità e conseguenza logica in termini di altri concetti. Prawitz ammette che una vera riduzione non è possibile: non si può richiedere che la nozione di conseguenza logica debba essere definita senza assumere implicitamente di sapere quando un enunciato segue logicamente da altri enunciati. Ciò che si richiede è che la definizione sia informativa, nel senso che deve connettere la nozione definita ad altre nozioni interessanti, quali significato, verità, argomento valido. Accettando gli argomenti di Dummett, è comprensibile che Prawitz trovi insoddisfacenti le nozioni di significato e verità associate in maniera naturale alle definizioni modellistiche; ma anche il concetto di argomento valido che ne risulta è privo di ogni capacità esplicativa. Data la definizione di Tarski, il modo più ovvio di definire questo concetto è di darlo in maniera derivata: D è un argomento (logicamente) valido sse la sua conclusione segue logicamente dalle premesse. Ma in questo modo si tratta un argomento come una scatola nera, trascurando completamente la *struttura interna* che conduce dalle premesse alla conclusione. Prawitz propone quindi di definire la nozione di conseguenza logica in termini di argomento valido, anziché viceversa: in tal modo si spiegherebbe la relazione di conseguenza in termini di struttura. E' evidente comunque che il semplice rovesciamento di priorità non è sufficiente, visto che nella sezione 2.3.2. abbiamo definito la conseguenza logica in termini di argomento valido, e tuttavia tale definizione è soggetta alla stessa critica. Quello che Prawitz sta affermando è quindi che le nozioni semantiche usuali non sono esplicative rispetto alla relazione di conseguenza, perché esse trascurano del tutto le connessioni di significato tra le proposizioni.

Si noterà allora che la posizione di Prawitz è da questo punto di vista molto più radicale di quella di Dummett, il quale non rigetta affatto il valore teorico delle semantiche modellistiche, ed anzi per teorie semantiche intende proprio le semantiche di questo tipo. Anche riguardo alla questione della circolarità, l'atteggiamento di Dummett è molto più cauto. Egli ritiene che la circolarità non costituisca una ragione di principio per l'impossibilità di una giustificazione filosofica della deduzione, qualora la si intenda nel modo giusto. Il motivo per cui comunemente si pensa che una giustificazione della deduzione sia impossibile, rileva Dummett, è che essa dovrà avere la forma di un argomento deduttivo, e allora non si può evitare di fare appello, in maniera più o meno diretta, a quelle stesse leggi che si vogliono giustificare. Tuttavia non sempre abbiamo la stessa forma di circolarità: è solo nel caso in cui si sia assunta fra le premesse la legge che si intende giustificare, che non si potrà non riuscire nell'intento, e quindi in questo modo non si otterrà alcun vero risultato; nel caso invece in cui non si sia assunto il principio da giustificare tra le premesse, ma al più lo si impieghi in un passaggio della procedura argomentativa, abbiamo una forma debole di circolarità, che Dummett chiama “pragmatica". Questa forma di circolarità non invalida la giustificazione, purché il contesto teorico in cui la giustificazione viene effettuata non sia quello di un'interpretazione programmatica (in cui se assumiamo un certo principio a livello metalinguistico, varrà automaticamente anche nel linguaggio oggetto): se abbiamo una teoria solo debolmente sensibile al metalinguaggio, infatti, assumere una certa legge non ci garantisce in partenza di poterla giustificare relativamente al linguaggio oggetto. In questo caso abbiamo un'autentica spiegazione, perché nel giustificare una legge logica lo scopo del filosofo non è quello di fugare il dubbio scettico sulla sua validità, che è invece data per scontata, ma solo quello di trovare la legittimazione teorica a ragionare secondo tale legge. Se invece l'obiettivo è quello di persuadere qualcuno che ancora non creda alla validità della legge, allora anche la circolarità pragmatica risulta un ostacolo insormontabile. (cfr. Dummett (1973b); (1991), 200-204). Come ha osservato Haack (1982), questo argomento va incontro a grosse difficoltà, prima fra tutte la dipendenza da ciò che noi *crediamo che valga*: in questo modo ogniqualvolta abbiamo una credenza accettata, possiamo adottare una giustificazione pragmaticamente circolare e giustificarla, anche se in realtà si tratta di una falsa credenza. Dunque il metodo di giustificazione sostenuto da Dummett non à nemmeno in grado di distinguere la validità dalla presunzione di validità.

Secondo Prawitz, una definizione di conseguenza logica dovrebbe inoltre fornire una risposta alla domanda: in cosa consiste la *necessità* delle verità logiche? Diciamo anzitutto che un certo enunciato α è un *enunciato fattuale* quando è della forma $\alpha(\mathrm{c}_1,...,\mathrm{c}_n)$, ossia contiene delle costanti descrittive $\mathrm{c}_1,...,\mathrm{c}_n$; se sostituiamo tutte le costanti descrittive con variabili del tipo appropriato, la chiusura universale

$$(\forall x_1 \in \mathrm{D}_1)...(\forall x_n \in \mathrm{D}_n)\ (\alpha(x_1,...,x_n))$$

della formula $\alpha(x_1,...,x_n)$ così ottenuta è detta un *enunciato logico*, perché in esso compaiono soltanto costanti logiche. Diciamo inoltre che un dominio D è *indipendente* quando esso risulta fissato senza riferimento ad alcun altro dominio (p. es. il dominio delle variabili individuali), mentre esso è *dipendente* quando è indotto a partire da un altro dominio (p. es. il dominio delle variabili predicative). La definizione di Tarski può essere allora riformulata dicendo che $\beta(\mathrm{c}_1,...,\mathrm{c}_n)$ segue logicamente da $\alpha(\mathrm{c}_1,...,\mathrm{c}_n)$ sse l'enunciato logico

$$(\forall x_1 \in \mathrm{D}_1)...(\forall x_n \in \mathrm{D}_n)\ (\alpha(x_1,...,x_n) \rightarrow \beta(x_1,...,x_n))$$

è vero per ogni scelta dei domini indipendenti. In questo modo risulta che un enunciato α è logicamente vero sse l'enunciato logico corrispondente è vero comunque si scelgano i domini indipendenti. Ciò significa che nel caso in cui α sia esso stesso un enunciato logico, la definizione dice soltanto che esso è logicamente vero sse è (materialmente) vero (per ogni scelta del dominio indipendente). E poiché la verità o la falsità di un enunciato logico è definita allo stesso modo di quella di un enunciato fattuale, con la definizione di Tarski non viene fornita nessuna analisi del carattere di *necessità* che contraddistingue la verità logica. Prawitz conclude pertanto che “a variation of descriptive constants, which is the whole point in the idea of Bolzano and Tarski, cannot be a main step in the analysis of logical consequence (and logical truth) — all the more so when not even any importance is attached to the distinction between logical and nonlogical constants" ((1985), 154).

Si tratta di un punto che merita di essere approfondito, perché sfruttando questa caratterizzazione, Etchemendy (1990) ha rivolto aspre critiche alla definizione tarskiana, ed è giunto alla conclusione che essa è semplicemente sbagliata. Etchemendy chama *principio di riduzione* la seguente asserzione: se un enunciato universale è vero, e le uniche espressioni che compaiono nella matrice sono costanti logiche e variabili vincolate (cioè, nella terminologia di Prawitz, se è un enunciato logico vero), allora tutti i suoi esempi sono logicamente veri. Egli sostiene poi che la definizione di Tarski (1936) diverge in maniera essenziale dalla definizione standard della teoria dei modelli (che lo stesso Tarski in seguito adotterà) per il fatto che nel suo articolo Tarski non considera la variazione del dominio della quantificazione, ma assume che il dominio (o universo) sia fissato una volta per tutte. Ma in questo modo certi enunciati risultano essere delle verità logiche, pur non essendolo intuitivamente. Consideriamo infatti i seguenti esempi:

$$\exists x \exists y (x \neq y)$$
$$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z)$$
$$\vdots$$

Per ogni *n*, abbiamo dunque un enunciato che asserisce l'esistenza di almeno *n* oggetti: si tratta evidentemente di asserzioni sostanziali, che nulla hanno a che fare con la logica. Se consideriamo l'identità come una costante logica, allora i corrispondenti enunciati logici sono gli stessi enunciati in questione, ed essi risultano logicamente veri sse sono veri. Se l'universo è infinito, allora tutti i nostri enunciati saranno veri, e quindi logicamente veri; e anche se l'universo è finito, ci saranno comunque delle verità logiche che non siamo disposti a riconoscere come tali. La definizione dipende pertanto da fatti extralogici, ossia da quanti oggetti vi sono nell'universo.

Questo problema, prosegue Etchemendy, rimane inalterato, anche se in maniera dissimulata, qualora adottiamo la semantica standard e facciamo variare il dominio della quantificazione. Un modo per descrivere questo passaggio, egli sostiene, è quello di trattare il quantificatore esistenziale come un'espressione variabile, *E*, il cui dominio di definizione consiste di sottoinsiemi dell'universo (ancora inteso come fissato una volta per tutte): variare il dominio della quantificazione significa allora reinterpretare E. In questo caso, gli enunciati considerati in precedenza non vengono più classificati erroneamente come verità logiche, perché i corrispondenti enunciati logici

$$\forall E (ExEy(x \neq y))$$
$$\forall E (ExEyEz(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z))$$
$$\vdots$$

affermano che ogni sottoinsieme dell'universo contiene almeno due (tre, quattro,...) elementi: ma questo è evidentemente falso, essendoci sottoinsiemi contenenti un solo elemento. Tuttavia, la difficoltà si ripresenta in un'altra forma. Consideriamo le negazioni degli enunciati originari:

$$\neg\exists x\exists y(x \neq y)$$

$$\neg\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z)$$

$$\vdots$$

Per ogni *n*, abbiamo un enunciato che dice che nell'universo vi sono meno di *n* oggetti. Gli enunciati logici corrispondenti sono allora i seguenti:

$$\forall E(\neg ExEy(x \neq y))$$

$$\forall E(\neg ExEyEz(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z))$$

$$\vdots$$

L'enunciato logico α_n così ottenuto, per ogni *n*, afferma che ogni sottoinsieme dell'universo contiene meno di *n* oggetti. Esso sarà vero se l'universo stesso (il più grande sottoinsieme) contiene meno di *n* oggetti, e dunque, se l'universo è finito, infiniti enunciati che non sono verità logiche verranno considerati tali per effetto della definizione. Che gli enunciati in questione non risultino delle verità logiche non è dunque assicurato dalla definizione stessa, ma solo dall'avere un universo che contiene infiniti elementi. E questo, a sua volta, dipende dall'aver assunto una teoria degli insiemi tra i cui assiomi figura quello dell'infinito: è solo grazie ad esso che abbiamo dei modelli infiniti che falsificano α_n, per ogni *n*. La conclusione di Etchemendy è allora che la definizione di Tarski è erronea, non riuscendo a catturare il concetto intuitivo di conseguenza logica — i cui tratti caratteristici, egli afferma, sono la *necessità*, l'*aprioricità* e l'*analiticità* — in quanto fa addirittura dipendere l'attribuzione del carattere di verità logica agli enunciati da assunzioni esistenziali, di natura evidentemente extralogica, quali gli assiomi della teoria degli insiemi. Il principio di riduzione è pertanto da considerarsi falso: anche limitando la scelta delle espressioni fissate a quelle che sono unanimemente riconosciute come costanti logiche, non si riesce ad eliminare la presenza determinante di assunzioni esistenziali, che minano alla radice la semantica standard.

Per giustificare quest'ultimo punto, Etchemendy considera la seguente obiezione: l'argomento sopra esposto è bloccato per il semplice fatto che l'identità non è una costante logica; quando la si consideri come un'espressione variabile, ogni assunzione esistenziale viene meno. Ma ancora una volta, risponde Etchemendy, lo stesso problema si ripresenta in altra forma. Consideriamo i seguenti enunciati, dove R è la relazione di "essere più alto di":

$$\alpha: \quad \forall x\forall y\forall z(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$$

β: $\forall x \neg (Rxx)$

γ: $\forall x \exists y (Ryx)$

Poiché il terzo enunciato afferma che non esiste un oggetto più alto di tutti, esso è falso, e quindi la negazione della congiunzione dei tre enunciati sarà vera:

$\neg(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$

Pur essendo vero, quest'enunciato non è chiaramente una verità logica: potrebbe infatti darsi un universo in cui per ogni oggetto, ce n'è sempre uno più alto. Sostituiamo ora nel nostro enunciato le occorrenze di $\forall v$ con l'equivalente $\neg \exists v \neg$, e chiamiamo δ l'enunciato così ottenuto. L'enunciato logico sarà allora

$\forall E \forall X \subseteq E \times E(\delta(R/X, \exists/E))$

che afferma che ogni relazione transitiva e riflessiva tratta da un sottoinsieme qualsiasi dell'universo ha un elemento minimo (dove un elemento minimo della relazione di "essere più alto di" è un elemento alto almeno quanto ogni altro elemento). Ancora una volta, dunque, il principio di riduzione fa dipendere la verità logica da un enunciato avente natura sostanziale, extralogica: se l'universo è finito, in particolare, l'enunciato logico sarà vero, ma questo non sembra un motivo sufficiente a farci concludere che l'enunciato di partenza sia una verità logica. Se poi l'enunciato logico risulta falso, avremo una definizione estensionalmente corretta, ma solo in virtù della particolare natura dell'universo. La conclusione è quindi la stessa: comunque si scelga l'insieme delle costanti logiche, la definizione di Tarski risulta viziata da assunzioni esistenziali.

Questo argomento è stato criticato da più parti. Esso riposa, in effetti, sull'assunzione che la semantica standard sia correttamente descritta dicendo che i domini della quantificazione sono sottoinsiemi di un universo fissato, di cui, mediante gli assiomi della teoria degli insiemi, si ammette l'esistenza, e che inoltre gli enunciati logici sono veri (o falsi) relativamente a quest'universo: lo stesso principio di riduzione dipende quindi da quest'assunzione. Ma l'assunzione è piuttosto dubbia. Anzitutto, essa discende sostanzialmente dal modo in cui Etchemendy interpreta la definizione originaria di Tarski, che non ammetterebbe la variazione dei domini. Ma di fatto, l'unico argomento che egli ha per la sua interpretazione è che Tarski (1936) non menziona esplicitamente questo punto, e l'argomento risulta allora del tutto privo di consistenza, se si osserva che quest'omissione è perfettamente motivata: Tarski riteneva che il suo articolo dovesse avere carattere informale, e considerava la variazione dei domini come un aspetto puramente tecnico che è invece contemplato nella sua precedente monografia sul concetto di verità (cfr. Hodges (1985)). In secondo luogo, come sostengono Mariani e Moriconi (199?), nel quadro teorico della definizione tarskiana far dipendere la verità logica degli enunciati dalla semplice verità dei corrispondenti enunciati logici richiederebbe che si fosse specificato, una volta per tutte, il modello in cui gli enunciati logici sono veri (o falsi), e questo è proprio quanto non viene fatto. Il punto rilevante è piuttosto, essi concludono, che un certo enunciato possa essere riconosciuto vero *soltanto sulla base delle condizioni di verità*, ossia della definizione induttiva di soddisfazione.

Qual'è dunque la corretta nozione di modello che è in gioco nella definizione di Tarski? Garcia-Carpintero Sanchez-Miguel (1993) ha proposto una caratterizzazione “modale" del concetto di modello. Secondo questa concezione, le definizioni semantiche contengono già, in maniera informale, le nozioni insiemistiche che poi vengono specificate mediante l'adozione di una particolare teoria assiomatica degli insiemi. L'idea di modello è quindi anzitutto un'idea preteorica o preformale, ed è tutto quanto è necessario per poter affermare che un enunciato è logicamente vero sse è vero in tutti i modelli: ciò vuol dire che quando si fa appello a degli insiemi infiniti non si sta facendo un'asserzione extralogica, ma si sta ricorrendo soltanto alla conoscenza semantica che ci è data dalle definizioni dei significati delle costanti logiche, la quale include la conoscenza di cosa vale come modello *possibile*. Consideriamo infatti l'enunciato $\forall x(P(x) \rightarrow P(x))$: dalle sole definizioni semantiche non sappiamo qual'è il modello inteso, né qual'è l'estensione di P; tuttavia sappiamo cos'è un possibile dominio della quantificazione, e cos'è una possibile estensione di P, e questa conoscenza è sufficiente per stabilire che l'enunciato è vero qualsiasi dominio e qualsiasi estensione del predicato si scelga. La conclusione è allora che “The model-theoretic account [...] does not rely on what domains of quantification *consisting of actual entities there are.* It relies on what domains of quantification are *available, on what domains it makes sense to quantify over* [...]. Set theory, as an adequate device for the building of logical theories, *comes after the semantic theory of the language whose logic we are investigating* (perhaps just the same language in which we develop set theory itself). Set theory, by itself, cannot determine what models there are [...]. The semantics of the language *reveals* what is a possible domain of quantification, what a possible extension for the sentential functions, etc. [...] Set theory is only a tool to give us a more precisely defined sense of model" (ibid., 122-123; corsivi nostri).

A questo punto possiamo osservare che in realtà la caratterizzazione data da Prawitz non coincide affatto con quella di Etchemendy. Ripetiamo: Prawitz afferma che un enunciato $\alpha(c_1,...,c_n)$ è logicamente vero sse l'enunciato logico

$$(\forall x_1 \in D_1)...(\forall x_n \in D_n)\ (\alpha(x_1,...,x_n))$$

è vero comunque si scelgano i domini indipendenti. Il principio di riduzione di Etchemendy afferma invece che un enunciato $\alpha(c_1,...,c_n)$ è logicamente vero sse l'enunciato logico

$(\forall X_1)...(\forall X_n)\ ((\forall x_1 \in X_1)...(\forall x_n \in X_n)\ (\alpha(x_1,...,x_n)))$

(in cui omettiamo la specificazione dei rapporti di dipendenza tra i domini) è vero. La differenza sta quindi nella nozione di enunciato logico (ma ricordiamo che questo termine non è usato da Etchemendy): mentre nel primo caso la variazione dei domini è un fatto metalinguistico, nel secondo diventa intralinguistico. La conseguenza di ciò è che Etchemendy deve ricorrere ad un dominio fissato, rispetto al quale l'enunciato logico (con la prima serie di quantificatori che spaziano sui domini, intesi come sottoinsiemi del dominio fissato) può essere vero o falso, mentre la descrizione di Prawitz non presuppone un dominio fissato una volta per tutte e non viene pertanto colpita dalle critiche precedenti. Il “principio di riduzione" di Prawitz è più debole: da esso non si può concludere che la definizione di Tarski è erronea perché dipendente da assunzioni esistenziali, visto che non assume altro che la disponibilità dei domini, ed è pertanto compatibile, per esempio, con una concezione “modale" quale quella esaminata in precedenza. L'obiezione di Prawitz è non che la definizione dipende da come è il mondo, ma che essa non fornisce nessuna *analisi* della necessità delle verità logiche, perché la verità o la falsità degli enunciati logici è definita allo stesso modo di quella degli enunciati fattuali. Un enunciato logico rappresenta il massimo di generalità: se esso è vero (in tutti i domini), allora è logicamente vero, e lo sono anche tutti i suoi esempi; ma la teoria non esibisce alcun tratto distintivo della sua verità rispetto ad un enunciato fattuale.

Un'obiezione che colpisce sia Prawitz sia Etchemendy è invece quella di Hart (1991): mentre si critica la definizione tarskiana in nome della nozione di necessità, non viene fornita alcuna vera spiegazione di cosa si intenda con ciò.

2.4. Abbiamo un'intuizione adeguata dei modelli?

E' indubbiamente un problema di vasta portata quello di fornire una giustificazione generale della tesi secondo la quale gli enunciati di Gödel debbano risultare conseguenza logica degli assiomi delle rispettive teorie. La discussione che segue non ha alcun valore esegetico, visto che Prawitz non spende nemmeno una parola su questo punto; tuttavia sembra essenziale tentare di chiarire la questione, perché essa ha degli importanti risvolti concernenti il problema dell'armonia (cfr. cap. 3). Come abbiamo visto, la motivazione fornita da Tarski è il fenomeno dell'ω-incompletezza. Sia Δ la congiunzione infinita degli enunciati $\alpha(1)$, $\alpha(2)$,..., e sia Γ l'insieme degli assiomi di Peano. Allora, tutte le volte che vale $\Gamma \models \Delta$, deve anche valere $\Gamma \models \forall x \alpha(x)$, perché *intuitivamente* l'enunciato universale segue dalla congiunzione di tutti gli esempi. Il ricorso all'intuizione solleva il problema della possibilità della formalizzazione di caratterizzare in maniera adeguata la nostra comprensione intuitiva degli oggetti e delle proprietà matematiche. Chiaramente, il teorema di Gödel rappresenta a prima vista una forte limitazione di questa possibilità, dimostrando che vi sono proposizioni intuitivamente vere che tuttavia non sono derivabili in un sistema formale. La questione è però quale sia l'interpretazione corretta di questo risultato, questione alla quale Dummett ha più volte diretto la sua attenzione (cfr. Dummett (1963) e (1967)). L'interpretazione che Dummett esamina e critica, e che noi chiameremo "tesi dell'intuizione dei modelli" (abbr. TIM), è la seguente: la proposizione γ, non essendo dimostrabile, deve essere falsa in qualche modello, e dunque quando affermiamo di riconoscerla come vera ci stiamo riferendo ad un modello ben preciso, il modello *standard* del sistema formale. Ciò significa (i) che abbiamo un'idea perfettamente definita di quale sia la struttura matematica di cui intendiamo parlare quando facciamo asserzioni sui numeri naturali; (ii) che l'intuizione di questa struttura astratta non è riducibile ad un insieme di regole per manipolare simboli, ossia non è mai completamente caratterizzabile mediante un sistema formale (mediante la specificazione di un insieme di enunciati che riteniamo veri dei numeri naturali), proprio perché ogni sistema formale ammette interpretazioni non intese; (iii) che pertanto l'espressione "numero naturale" costituisce un controesempio alla tesi della coestensività di uso e significato: "what we cannot do, on this view, is to characterise completely the meaning of 'natural number' by specifying which arithmetical statements we are prepared to assert and which forms of inference within arithmetic we are prepared to accept. Everyone who is familiar with the expression 'natural number' has a perfectly clear intuitive grasp of its meaning; but its meaning is such (on this view) that no account of our — or any possible — use of this expression can exhaustively explain what it is for it to have that meaning" ((1963), 187).

Com'è facile immaginare, è quest'ultimo punto che presta il fianco alle obiezioni di Dummett: l'intuizione postulata dalla TIM, essendo trascendente rispetto all'uso, risulta essenzialmente privata e incomunicabile, e ciò conduce alla vanificazione dell'idea stessa di una simile intuizione, perché essa non è nemmeno in grado di assicurarci che ciò a cui gli altri si riferiscono quando parlano di modello standard sia davvero isomorfo al modello standard che noi abbiamo in mente. L'errore della TIM è per Dummett quello di aver fatto uso di una nozione impropria di modello, inteso come una struttura astratta che ci è data nell'intuizione in maniera diretta, *indipendente da ogni descrizione*: "This has nothing to do with the concept of a model as that concept is legitimately used in mathematics. There is no way in which we can be 'given' a model save by being given a description of that model. If we cannot be given a complete characterisation of a model for number theory, then there is not any other way in which, in the absence of such a complete description, we could nevertheless somehow gain a complete conception of its structure" (ibid., 190). Una volta riconosciuto ciò, diventa anche chiaro che la comprensione delle nostre asserzioni sui numeri naturali non è spiegabile facendo riferimento alla comprensione (conception) del modello standard, perché il modello — se intendiamo questa nozione nel modo corretto — ci è dato attraverso una qualche descrizione, e la descrizione stessa dovrà necessariamente impiegare nozioni quali 'numero naturale', o qualche altra nozione equivalente o più forte: sarebbe quindi circolare assumere la comprensione del modello come base della spiegazione. Detto altrimenti, la distinzione tra modello standard e modelli non-standard non è una distinzione primitiva, capace di spiegare il significato, ma è a sua volta parte della pratica matematica: “the apprehension of a model is just as much a part of the use of mathematical language as anything else, rather than something outside it, motivating and justifying it. [...] Intuition is not a special source of ineffable insight: it is the womb of articulated understanding" ((1967), 212-214).

Al fondo della TIM sta per Dummett l'assunzione platonistica secondo cui, una volta che si sia specificata una certa totalità (mediante la definizione dei criteri che permettono di riconoscere se un certo oggetto le appartiene o meno), e un'interpretazione di un linguaggio $\mathcal{L}$ su quella totalità, resta con ciò anche fissata la nostra comprensione delle condizioni di verità degli enunciati di $\mathcal{L}$ che quantificano sulla totalità data. E poiché il fenomeno dell'incompletezza sembra implicare che il sistema formale ci lasci incerti quanto alla precisa determinazione della totalità, mentre d'altra parte è chiaro che non c'è alcuna ambiguità riguardo all'*estensione* del concetto di numero naturale, appare necessario concludere che la nostra intuizione trascende ogni possibilità di precisazione formale. Ma ciò, osserva Dummett, viene meno qualora si riconosca che la definitezza dell'estensione del concetto di numero naturale non implica la definitezza di ciò che conta come motivo per asserire che una certa proprietà vale di tutti i numeri naturali, ossia, la determinazione di una totalità non ci fornisce una comprensione completa del contenuto della quantificazione su quella totalità. La conclusione è allora che il concetto di numero naturale non è specificato in maniera esaustiva determinando la sua estensione, ma che rispetto ad esso sono inoltre rilevanti i criteri di attribuzione di proprietà a tutti i numeri naturali; e poiché questi criteri, per il teorema di Gödel, non sono determinabili una volta per tutte, ma sono estendibili indefinitamente, il concetto di numero naturale si rivela come *intrinsecamente vago* (inherently vague) ((1963), 194). Più precisamente, il motivo di questa vaghezza è spiegato da Dummett nel seguente modo: (i) una caratteristica centrale del concetto di numero naturale è la validità dell'induzione rispetto ad ogni proprietà ben definita; (ii) la nozione di proprietà ben definita è a sua volta indefinitamente estendibile, nel senso che, per ogni caratterizzazione definita, esiste un'estensione naturale di essa che produce un concetto più inclusivo: dato un linguaggio le cui proprietà sono tutte riconosciute come ben definite, possiamo specificare, in riferimento alle espressioni del linguaggio, una nuova proprietà, che riconosciamo ancora come ben definita, ma che non è esprimibile nel linguaggio (un esempio è dato dalla proprietà di essere un enunciato vero di un sistema formale: non essendo esprimibile nel sistema, facendo induzione su di essa possiamo ottenere dei risultati non dimostrabili nel sistema stesso); (iii) dato che ogni concetto che sia indefinitamente estendibile è anche intrinsecamente vago, il concetto di numero naturale è intrinsecamente vago. In sintesi, secondo Dummett la ragione per cui il teorema di Gödel vale è non che i sistemi formali sono difettosi rispetto alla nostra intuizione, ma che il concetto di numero naturale è vago e quindi non può essere caratterizzato esaustivamente da un sistema formale: “The use of a mathematical expression could be characterised by means of a single formal system only if the sense of that expression were perfectly definite; when, as with 'natural number', the expression has an inherently vague meaning, it will be essential to the characterisation of its use to formulate the general principle according to which any precise formal characterisation can always be extended" (ibid., 198).

Ci sembra tuttavia che questa analisi sia soggetta ad un'obiezione decisiva. Essa, lo ripetiamo, afferma che il concetto di numero naturale è vago, non perché sia indeterminata la sua estensione, ma perché i criteri di asseribilità degli enunciati quantificati sono estendibili indefinitamente: dunque non dobbiamo aspettarci che il concetto intuitivo (nel senso banale di concetto non definito in maniera rigorosa, cfr. (1967), 214) possa essere esaustivamente catturato da una qualche precisazione formale. Possiamo però osservare un fatto curioso: la controparte formale del concetto intuitivo risulta indeterminata non tanto a livello dei criteri di asseribilità, ma proprio a livello dell'estensione, perché nessun sistema formale (espresso in un linguaggio del primo ordine) può caratterizzare tale estensione a meno di isomorfismo. Chiaramente, per ogni teoria formale i cui criteri di asseribilità siano determinati, esiste una nuova teoria formale avente criteri di asseribilità estesi, e quindi si può dire che anche a livello formale i suddetti criteri rimangono intrinsecamente vaghi: in effetti, è proprio da ciò che Dummett trae la conclusione che non solo il concetto formale, ma, e più fondamentalmente, anche il concetto intuitivo è intrinsecamente vago. Tuttavia resta il fatto che nessuna teoria formale determina univocamente l'estensione del concetto di numero naturale: dunque, stando all'analisi di Dummett, ci deve essere qualche senso in cui la vaghezza, che per il concetto intuitivo è imputabile ai criteri di asseribilitè, si riverbera a livello formale anche sull'estensione, che nel concetto intuitivo è invece completamente definita. Ora, si noti che lo sfasamento tra caratterizzazione formale e concetto intuitivo, da cui abbiamo preso le mosse, era dovuto proprio alla possibilitè di costruire modelli non-standard, modelli, cioè, in cui sono presenti degli oggetti chiaramente non ottenibili da 0 mediante la funzione successore. Quello che ci turbava, in altri termini, era la tensione originata dalla non caratterizzabilità con mezzi formali dell'*estensione* del concetto intuitivo di numero naturale. Ma se questo era il problema, la spiegazione di Dummett non lo ha risolto, perché nulla ci viene detto sul perché la vaghezza dei criteri di asseribilità diventi a livello formale indeterminatezza dell'estensione. Si vorrebbe dire: l'estensione diventa indeterminata proprio perché i criteri di asseribilitè sono indefinitamente estendibili, ossia per il semplice fatto che per ogni sistema formale avente certe proprietà è definibile una proposizione γ *vera* ma non dimostrabile. Ma questa mossa a Dummett non è concessa, perché equivarrebbe a reintrodurre nella sua analisi lo stesso principio di spiegazione che egli critica: la verità di γ dovrebbe infatti essere riferita al modello standard, e in tal modo avremmo di nuovo assunto come primitiva la distinzione tra modello standard e modelli non standard. Più precisamente, intraprendere una simile mossa equivarrebbe a ragionare nel modo seguente: γ è vera nel modello standard, ma non è dimostrabile, e dunque devono esserci dei modelli non standard in cui è falsa; essendoci tali modelli, anche l'estensione del concetto formale risulta non univoca. E' evidente, allora, che si è fatto appello alla nozione di modello standard per spiegare la scissione tra concetto intuitivo e caratterizzazione formale, e ciò è proprio quanto Dummett nega che si possa fare. Non solo, ma se accettiamo questo modo di argomentare, la spiegazione di Dummett appare come un'inutile deviazione, perché riposa sulla stessa (o su una variante della) concezione da cui abbiamo preso le mosse. Dunque l'idea di vaghezza intrinseca lascia la tensione inspiegata.

Si osservi che la nostra critica non presuppone l'assunzione della TIM, perché parlare di concetti intuitivi non conduce necessariamente alla postulazione di una super-intuizione intellettuale dei modelli, né quindi alla priorità dell'intuizione (così intesa) nello spiegare la comprensione. Dummett nega che la nozione di modello standard abbia valore esplicativo, indipendentemente dal fatto che la si interpreti come data in termini di un'intuizione intellettuale alla maniera della TIM o di una descrizione matematica: nel primo caso, perché postuliamo una misteriosa facoltà che trascende l'uso; nel secondo, perché la comprensione del modello presuppone che si abbia già il concetto di numero. Rimane però una terza possibilità che Dummett non considera: il modello standard è dato *anzitutto* come un concetto informale, come idea embrionale non precisata rigorosamente (questo è in effetti anche per Dummett il solo senso in cui è legittimo parlare di intuizione, cfr. (1967), 214). In altri termini, il concetto di numero è un concetto intuitivo che presumibilmente tutti abbiamo e per il quale non è necessaria una descrizione matematica rigorosa, ossia la definizione del modello standard per gli assiomi di Peano, e avere questo concetto è sufficiente a farci constatare che i sistemi formali non lo “catturano" fedelmente. Questo vuol dire che è *legittimo* rilevare l'inadeguatezza dei sistemi formali rispetto all'intuizione, evitando sia di caricare quest'ultima di significati metafisici, sia di classificare i concetti come *intrinsecamente* vaghi; abbiamo visto infatti che entrambe le soluzioni non sono esplicative.

Notiamo per inciso che il nostro problema presenta interessanti analogie con la discussione originata dal paradosso di Skolem. Per il teorema di Cantor, ogni modello della teoria degli insiemi deve essere più che numerabile; per i teoremi di completezza e di Löwenheim-Skolem, d'altra parte, se la teoria degli insiemi (assiomatizzata al primo ordine) è consistente, deve avere un modello numerabile. Di qui il paradosso: se la teoria è consistente, esiste un modello che è al contempo numerabile e più che numerabile. La soluzione di Skolem è ben nota: i concetti di insieme, infinito, più che numerabile, ecc. sono non assoluti ma *relativi* alla teoria assiomatica; in particolare, il teorema di Cantor dimostra che non esiste una corrispondenza biunivoca tra la gli elementi di N e quelli della potenza di N *all'interno* di (ossia, relativamente a) un dato modello, ma ciò non toglie che il modello possa essere numerabile "in realtà": ciò accade quando esiste una corrispondenza biunivoca tra N e *P*(N) *fuori* dal modello dato. Un insieme può dunque essere numerabile in un certo modello e più che numerabile in un altro modello. Un simile punto di vista presuppone l'assolutezza del metodo assiomatico: le idee matematiche devono essere sviluppate all'interno dei sistemi formali, perché gli oggetti matematici non sono altro che dei pensieri umani, e dunque l'esistenza di questi oggetti è limitata come lo sono le operazioni logiche possibili (cfr. Skolem, "Une relativisation des notions mathématiques fondamentales", in *Selected Works on Logic*, 636). Ciò presuppone, a sua volta, che la strutturazione formale-assiomatica delle operazioni logiche sia l'unica possibile: ma in tal modo abbiamo spiegato un'assunzione di assolutezza mediante un'altra ed analoga assunzione di assolutezza.

All'estremo opposto si colloca la TIM, secondo cui l'esistenza di modelli non intesi mostra che l'intuizione del concetto di insieme non è catturata dal sistema formale. Diversi autori (cfr. p. es. Putnam (1980), e Shapiro (1992), cap. 8) che sostengono la tesi del significato come uso, hanno assunto una posizione analoga a quella di Dummett. Nelle mani di Shapiro, in particolare, ciò conduce a rigettare entrambe le alternative: la TIM presuppone che la comprensione di un linguaggio derivi dall'intuizione di un modello standard per quel linguaggio, ma ciò è falso perché il linguaggio viene compreso attraverso l'uso; il relativismo di Skolem, a sua volta, rigetta l'idea di interpretazione intesa e assume — come lo scettico di Kripke — che sia sempre lecito reinterpretare un linguaggio, ma la costruzione di modelli per un linguaggio formale non ha nulla a che fare con l'uso del linguaggio informale, e quindi con il significato e la comprensione. In ogni caso, nel presente contesto possiamo tralasciare i problemi connessi al paradosso di Skolem, perché per un costruttivista esso non sorge nemmeno. Come risulta dal lavoro di McCarty e Tennant (1987), il teorema di Löwenheim-Skolem non è infatti dimostrabile intuizionisticamente: "So, ironically, although being able to 'say' much more by virtue of his stronger logical methods, the classicist appears to speak to less pointed effect than the intuitionist" (ibid., 167).

Alla luce di quanto detto finora, come è caratterizzabile la posizione di Prawitz? Possiamo sicuramente escludere che egli intenda l'intuizione alla maniera della TIM: il ricorso all'intuizione è qui piuttosto un esempio del primato dei concetti informali rispetto a quelli formali (cosa che lo accomuna, per esempio, anche a Martin-Löf). Secondo il formalismo, osserva Prawitz, “one may speak about proofs only relative to a logical calculus with its given set of inference rules. On this view — and this is its obvious weakness — one cannot even ask the question whether the proofs of a given formal system adequately represent *real* proofs. A formal system has to be looked upon, I think, as a codification of an already deductive practice, and to be able to discuss whether a codification is adequate, it must be meaningful to speak about proofs not only relative to an already given system" ((1978), 25; corsivo nostro). Si può allora forse argomentare come segue. La nostra intuizione non trascende l'uso, ma va ugualmente presa sul serio: in particolare, dunque, è intuitivamente vero, e in accordo con l'uso del quantificatore universale, che quando tutti gli oggetti di un certo dominio godono della proprietà P, allora deve valere anche la proposizione universale corrispondente. Nel nostro caso specifico, però, assumere che questo sia sufficiente a dar luogo ad una relazione di conseguenza logica, *presuppone* che si sia già escluso che possano esserci dei modelli non-standard dell'aritmetica: quando facciamo delle asserzioni sui numeri naturali, vogliamo parlare di oggetti ottenibili per applicazione reiterata della funzione successore allo 0, e di nient'altro. Escludere i modelli non-standard equivale, d'altra parte, a far risultare la proposizione γ conseguenza logica degli assiomi. Ma allora la spiegazione è circolare: la ragione per la quale γ deve risultare conseguenza logica degli assiomi appare essere semplicemente che γ *deve* risultare conseguenza logica degli stessi. Il ricorso all'intuizione non va quindi riferito in primo luogo alla proposizione universale che non segue dalla verità di tutti gli esempi: il fatto davvero controintuitivo è che ci siano modelli non intesi.

La diagnosi di Prawitz potrebbe essere allora questa: la causa del conflitto con la nostra intuizione è non tanto un difetto intrinseco dei sistemi formali, quanto piuttosto *un difetto della nostra semantica.* Non sono i sistemi formali, ma è la semantica standard che ci consente di costruire modelli non intesi; le cose si ristabilizzano non appena mutiamo semantica. Si noti che l'intuizione, se usata in questo modo, diverge sicuramente dal senso che da Dummett è ritenuto lecito: qui l'intuizione dei numeri naturali assume valore fondante rispetto alla comprensione delle asserzioni sui numeri naturali stessi, se è vero che un'asserzione numerica non può essere riferita ad un dominio che contenga oggetti non ottenibili mediante 0 e successore. Detto altrimenti, nella terminologia di Dummett, l'estensione del concetto è più importante dei (mutevoli) criteri di asseribilità degli enunciati quantificati. Dummett può ancora obiettare che tutto ciò è circolare, perché i modelli ci sono dati per descrizione e la descrizione presuppone lo stesso concetto di numero; abbiamo però suggerito che ci possa essere un'accezione legittima e non circolare di comprensione informale: senza ricadere nella creazione mitologica dell'intuizione intellettuale della TIM, sembra possibile tuttavia attribuire all'intuizione un ruolo più rilevante di quanto Dummett non sia disposto a riconoscerle.

Ci troviamo dunque di fronte ad un dilemma: o eliminiamo i modelli non-standard, e allora dobbiamo rinunciare alla possibilità di dimostrare un teorema di completezza, oppure ci teniamo la completezza ma lasciamo inalterata la tensione tra concetto intuitivo e concetto formale di numero. L'opzione teorica di Prawitz, data la preminenza dei concetti informali e la non dimostrabilità della completezza per la logica intuizionistica se non facendo ricorso ad una metateoria classica, appare allora, dal suo punto di vista, pienamente motivata.