3.2. Una nozione relativizzata di armonia

3.2.1. STABILITA'

Come risulta dal passo sopra citato, Gentzen non pensava soltanto che le E-regole siano giustificate dalle I-regole, ma anche che esse siano determinate *univocamente* una volta fissate le I-regole. In altri termini, egli riteneva possibile mostrare che le regole di eliminazione sono l'estensione massimale delle corrispondenti regole di introduzione, nel senso che permettono di sfruttare pienamente il significato delle costanti logiche fissato dalle modalità inferenziali canoniche. E' evidente d'altra parte che la sola nozione di armonia non è sufficiente a garantire che questo accada: che le regole di eliminazione siano in armonia con quelle di introduzione mostra soltanto che in base ad esse non traiamo conseguenze che non siamo autorizzati a trarre, ma non che esse permettano di trarre tutte le conseguenze che potremmo legittimamente trarre. Espresso nei termini del principio prawitziano di armonia, dovremmo disporre di un metodo per mostrare che le E-regole giustificate permettono di derivare *tutte* e sole le conseguenze che sono derivabili dalle premesse delle corrispondenti I-regole. Prawitz ha posto in più occasioni il problema di trovare un simile metodo (cfr. p. es. (1973) e (1978)), ma senza fornire alcuna risposta. La soluzione di Dummett si basa sull'idea di assumere come autogiustificanti le regole di eliminazione, e costrutire su questa base una procedura di giustificazione “verso il basso" delle leggi logiche, complementare a quella “verso l'alto" che assume come primitive le regole di introduzione. Questa nuova procedura, egli osserva, è basata su una teoria pragmatista del significato, che assume le conseguenze delle nostre asserzioni come determinanti il significato degli enunciati asseriti. Le regole di eliminazione diventano così i mezzi canonici per compiere inferenze, e la corrispondente *assunzione fondamentale* dovrà essere la seguente: ogni conseguenza di un dato enunciato *può* essere derivata per mezzo di un argomento la cui inferenza iniziale è data dall'applicazione delle regole di eliminazione che governano l'operatore principale dell'enunciato, e in cui l'enunciato figura come premessa maggiore. Il possesso delle due procedure di giustificazione permette di ottenere il metodo cercato, perché, come vedremo meglio fra breve, impiegandole entrambe e in successione è possibile vedere se si ritorna alle regole di partenza, ossia se esiste un rapporto di bilanciamento o “stabilità" tra i due tipi di regole. Il fatto che per fare ciò sia necessario ricorrere ad entrambe le procedure, esemplifica quanto dicevamo circa la relativizzazione dell'armonia: l'assunzione di certe regole come autogiustificanti costituisce solo un metodo per dimostrare un certo rapporto tra le regole, e non la pretesa di aver individuato un nucleo di base, e dunque assoluto, dei significati. Sotto questo aspetto diventa perfettamente legittimo chiedersi, in una prospettiva pragmatistica, se le regole di introduzione costituiscano l'estensione massimale delle regole di eliminazione, vale a dire se le I-regole consentano di asserire tutti gli enunciati le cui conseguenze sono garantite dalle E-regole.

Vediamo ora nelle linee essenziali la specificazione di queste procedure e il modo in cui vengono impiegate per verificare se nel linguaggio vige la stabilità. Dummett segue Prawitz nelll'adottare una definizione in termini globali di argomento valido, ma con essenziali modificazioni (cfr. (1991), capp. 11 e 13). Anzitutto, Dummett intende fornire una procedura più generale, che permetta di giustificare non soltanto le usuali regole del calcolo N ma regole di inferenza arbitarie. Ciò comporta un rafforzamento dell'assunzione fondamentale: non è sufficiente richiedere (considerando per ora la procedura verso l'alto) che solo l'ultimo passo di un argomento valido sia ottenibile mediante un'inferenza canonica, perché può essere necessario applicare l'assunzione fondamentale più volte in successione. Consideriamo per esempio la legge della distributività: $<\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)> \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$. Per giustificarla, dobbiamo applicare due volte l'assunzione fondamentale: anzitutto, dobbiamo supporre che la premessa possa essere ottenuta mediante la I-regola per la congiunzione, ossia $<\alpha, \beta \vee \gamma> \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$, e in secondo luogo, che la seconda premessa di quest'inferenza possa essere ottenuta mediante la I-regola della disgiunzione, vale a dire $<\beta> \Rightarrow \beta \vee \gamma$. In questo modo, possiamo ottenere la conclusione della legge distributiva a partire dalle premesse α e β, impiegando le sole regole di introduzione:

$$<<\alpha, \beta> \Rightarrow \alpha \wedge \beta> \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma).$$

Tuttavia, ci sono dei casi in cui non è possibile assumere che, tornando indietro nella dimostrazione, gli enunciati siano ottenuti mediante una regola di introduzione. Consideriamo per esempio una regola di introduzione che scarichi assunzioni, come la $(\rightarrow I)$: quella parte dell'argomento che si conclude con la premessa di tale regola e che dipende dall'assunzione scaricata è detta *deduzione subordinata*, e non si può richiedere che in una deduzione subordinata (nemmeno di un argomento in forma normale) compaiano solo regole di introduzione. Un altro esempio è dato dalle regole che vincolano variabili libere, come la $(\forall I)$: se volessimo applicare l'assunzione fondamentale non solo alla conclusione della regola, ma anche alla premessa con variabile libera, potremmo giustificare delle leggi non valide. Supponiamo di avere un argomento valido che si conclude con l'enunciato $\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$; applicando l'assunzione fondamentale, sappiamo che esso potrebbe essere stato inferito mediante la regola $<\alpha(x) \vee \beta(x)> \Rightarrow \forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$, e applicandola una seconda volta, la premessa di questa regola deve essere ottenibile mediante la $(\vee I)$-regola: $<\alpha(x)> \Rightarrow \alpha(x) \vee \beta(x)$. Ma allora, dalla premessa $\alpha(x)$, possiamo ottenere il seguente argomento canonico: $<<\alpha(x)> \Rightarrow \forall x \alpha(x)> \Rightarrow \forall x \alpha(x) \vee \forall x \beta(x)$. Ciò vuol dire che abbiamo giustificato una regola non valida, ossia $<\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))> \Rightarrow \forall x \alpha(x) \vee \forall x \beta(x)$. Dummett distingue pertanto tra giustificazione del *secondo grado*, che riguarda regole di introduzione che non coinvolgono variabili libere o scarico di assunzioni, e giustificazione del *terzo grado*, che riguarda invece argomenti che includono tali regole (la giustificazione del *primo grado* essendo quella che consiste nell'assumere certe leggi e derivarne altre nel modo usuale); corrispondentemente, egli fornisce due definizioni distinte di argomento valido. Le definizioni seguenti riguardano argomenti in cui compaiono enunciati veri e propri, e non lettere schematiche; in tali argomenti possono figuarare tre tipi di regole: I-regole, E-regole, e regole atomiche, le cui premesse e conseguenze non contengono nessuna delle costanti logiche di un dato insieme fissato. Perché una I-regola possa dirsi autogiustificante, nel caso della giustificazione del secondo grado Dummett impone due condizioni: (1) la regola deve essere “single-ended", cioè non deve essere al contempo di introduzione e di eliminazione; (2) la regola deve soddisfare la “complexity condition", cioè il risultato della sua applicazione deve avere una complessità logica maggiore di quella delle sue premesse e delle assunzioni scaricate.

DEFINIZIONE. Un argomento *canonico* è un argomento in cui nessuna premessa iniziale è un enunciato complesso, e in cui ogni inferenza è data dall'applicazione di una regola atomica o di una regola di introduzione.

Un argomento canonico è per ciò stesso valido.

DEFINIZIONE. Dato un argomento arbitrario $\mathbb{D}$, una *supplementazione* $\mathbb{D}^s$ di $\mathbb{D}$ è il risultato della sostituzione di ogni premessa iniziale complessa con un argomento canonico avente tale premessa come conclusione finale.

DEFINIZIONE. Un argomento arbitrario $\mathbb{D}$ è detto *valido* sse esiste un metodo effettivo per trasformare ogni supplementazione di $\mathbb{D}$ in un argomento canonico con la stessa conclusione e nessuna nuova premessa iniziale.

In questo modo, un argomento risulta valido quando siamo legittimati ad asserire in maniera canonica la conclusione ogniqualvolta possiamo asserire in maniera canonica le premesse. Poiché la definizione fa riferimento soltanto alle premesse iniziali e alla conclusione finale di un argomento valido, essa può essere vista come un metodo per rendere validi argomenti costituiti dall'applicazione una sola regola di inferenza, quella che permette di passare, appunto, dalle premesse alla conclusione dell'argomento.

DEFINIZIONE. Una regola di inferenza è *valida* sse esiste un metodo effettivo per mostrare che ogni sua applicazione è valida.

Una legge logica risulta giustificata quando è espressa da una regola valida.

Nel caso della giustificazione del terzo grado, Dummett pone un'ulteriore condizione sulle I-regole autogiustificanti: se una premessa di un'applicazione della regola (ma non la conclusione) contiene una varabile libera, allora tale variabile non deve occorrere in alcuna delle ipotesi da cui la conclusione dipende. Questa condizione (che è soddisfatta dalla $(\forall I)$-regola) assicura che, se è possibile asserire un enunciato chiuso, sia possibile derivarlo mediante le regole di introduzione a partire da premesse iniziali chiuse. Quando si ha a che fare con argomenti in cui compaiano regole di introduzione che scaricano premesse o che coinvolgano variabili libere, non è più possibile definire la nozione di argomento canonico in maniera tale che esso risulti automaticamente valido, perché, come abbiamo visto, l'assunzione fondamentale non può essere applicata senza restrizioni ed è possibile che esso contenga anche applicazioni di E-regole. La procedura di giustificazione risulta pertanto più complessa: dobbiamo definire simultaneamente la nozione di argomento canonico valido e di argomento (arbitrario) valido. Assumiamo inoltre che il linguaggio contenga un termine costante per ogni elemento del dominio.

DEFINIZIONE. Un *esempio* di un argomento $\mathbb{D}$ è un argomento $\mathbb{D}^*$ ottenuto a partire da $\mathbb{D}$ sostituendo uniformemente ogni variabile libera che occorre nella sua conclusione finale o in una qualsiasi premessa iniziale con un termine costante, in ogni sua occorrenza nell'argomento.

DEFINIZIONE. Un'occorrenza di un enunciato appartiene al *ramo principale* di un argomento sse esso e ogni enunciato che occorre tra esso e la conclusione finale dipendono solo da (tutte o alcune delle) premesse iniziali dell'argomento.

DEFINIZIONE. Un argomento è detto *canonico* sse:
(1) la sua conclusione finale è un enunciato chiuso;
(2) tutte le sue premesse iniziali sono enunciati atomici chiusi;
(3) ogni enunciato atomico nel ramo principale è una premessa iniziale o è derivato da una regola atomica;
(4) ogni enunciato chiuso complesso nel ramo principale è derivato per mezzo di una delle regole appartenenti all'insieme dato di regole di introduzione.

Questa definizione non pone restrizioni sulle derivazioni di enunciati aperti (come le premesse della $(\forall I)$-regola), o su enunciati che non appartengono al ramo principale (come la premessa di una $(\rightarrow I)$-regola).

DEFINIZIONE. Il *grado* di un argomento è il numero massimo di costanti logiche che occorrono in una sua premessa iniziale o nella sua conclusione finale.

DEFINIZIONE. Un sottoargomento di un argomento $\mathbb{D}$ è detto *critico* se la sua conclusione si trova immediatamente sopra un enunciato chiuso nel ramo principale di $\mathbb{D}$, ed essa è un enunciato aperto o un enunciato chiuso non appartenente al ramo principale.

DEFINIZIONE. Una *supplementazione* di un argomento è ottenuta dalla sostituzione di ogni premessa iniziale con un argomento canonico *valido* con tale premessa come conclusione finale.

DEFINIZIONE. Un argomento è detto *valido* sse esiste un metodo effettivo per trasformare ogni supplementazione di un esempio di esso in un argomento canonico valido con la stessa conclusione e le stesse premesse iniziali.

DEFINIZIONE. Un argomento canonico è *valido* sse ogni sottoargomento critico che esso contiene è valido.

E' importante notare che per riconoscere la validità di un argomento canonico di grado n, bisogna saper riconoscere soltanto la validità di argomenti arbitrari $< n$, perché un enunciato α che si trova immedeatamente sotto la conclusione γ di un sottoargomento critico di un argomento canonico deve essere di complessità superiore rispetto sia alla conclusione e sia alle premesse del sottoargomento. Questo vale perché α, essendo una formula chiusa nel ramo principale, deve essere derivata mediante una regola di introduzione, di cui γ deve essere dunque una delle premesse, e per la condizione della complessità, α ha un grado di complessità superiore rispetto a tutte le sue premesse. Le premesse del sottoargomento devono essere inoltre o premesse iniziali dell'intero argomento, nel qual caso sono atomiche, oppure sono premesse scaricate dall'applicazione della regola, e anche qui, per la condizione della complessità, devono essere di complessità inferore ad α. D'altra parte, per riconoscere la validità di un argomento arbitrario di grado n, si presuppone soltanto la capacità di riconoscere la validità di argomenti canonici di grado $\leq n$, perché la validità dell'argomento dipende da quella di un argomento canonico con la stessa conclusione e premesse atomiche.

Consideriamo ora la procedura di giustificazione verso il basso. Mentre il principio di base della procedura precedente era che un argomento è valido quando, se possiamo asserire le premesse in maniera canonica, allora possiamo asserire canonicamente anche la conclusione, il principio conduttore della nuova procedura è che un argomento è valido quando ogni conseguenza derivabile in maniera canonica dalla conclusione può già essere derivata in maniera canonica dalle premesse. Mentre lo strumento usato in precedenza era la nozione di supplementazione, ovvero il procedimento di sostituire argomenti canonici validi per le premesse, in questo caso ricorriamo alla nozione di *complementazione*, ossia prolunghiamo l'argomento $\mathbb{D}$ con un argomento canonico $\mathbb{D}^*$ valido che va dalla conclusione dell'argomento originario fino ad un enunciato atomico, dove la conclusione di $\mathbb{D}$ è la prima di una sequenza di premesse maggiori di applicazioni successive di regole di eliminazione. Una regola di eliminazione può dirsi autogiustificante quando soddisfa i seguenti requisiti: (1) deve essere “single-ended"; (2) condizione sulla complessità: la conclusione, tutte le premesse e tutte le ipotesi scaricate da un'applicazione della regola devono essere di complessità logica inferiore rispetto alla premessa maggiore; (3) la costante logica eliminata può comparire come operatore principale solo nella premessa maggiore, e tale premessa non deve dipendere da un'eventuale ipotesi scaricata dalla regola. Diciamo che una regola è *verticale* quando almeno una delle premesse minori coincide con la conclusione della regola; tale premessa minore è detta anch'essa verticale; una regola che non è verticale è *riduttiva*, e una premessa minore che non è verticale è detta *orizzontale*. Così come nel caso precedente, è qui necessario considerare procedure di giustificazione del terzo grado, per effetto delle premesse minori orizzontali. Un esempio di premessa minore orizzontale è quello della ($\rightarrow E$)-regola: l'ultimo passo di un argomento canonico che si conclude con β a partire dalla premessa $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$ è dato dall'applicazione di questa regola, ma non è possibile derivare la premessa orizzontale $(\alpha \rightarrow \alpha)$ facendo ricorso soltanto a regole di eliminazione. Chiamiamo *principale* un enunciato quando esso è la premessa maggiore di una regola di eliminazione o la premessa di una regola atomica, e lo stesso vale di ogni enunciato nel cammino (path) che conduce alla conclusione finale dell'argomento. Un argomento è detto *proprio* se almeno una sua premessa iniziale è principale. Un'occorrenza di un enunciato è detta *placida* se né essa né alcun enunciato nel cammino che conduce alla conclusione è una premessa orizzoontale di una regola di eliminazione.

DEFINIZIONE. Un argomento è *canonico* sse:
(1) la sua conclusione finale è un enunciato atomico chiuso;
(2) le sue premesse iniziali sono enunciati chiusi;
(3) è un argomento proprio;
(4) il sottoargomento per ogni premessa minore verticale e placida di una E-regola è proprio.

Un sottoargomento *critico* è un argomento non canonico la cui conclusione è una premessa minore orizzontale di una E-regola.

DEFINIZIONE. Un argomento canonico è *valido in senso stretto* sse tutti i suoi sottoargomenti critici sono validi e di grado inferiore a quello dell'argomento stesso; ed è *valido in senso lato* sse esiste un metodo effettivo per trasformarlo in un argomento canonico valido in senso stretto che abbia le stesse premesse iniziali e la stessa conclusione finale.

Il motivo di questa distinzione è che non si può far dipendere direttamente la validità di un argomento canonico dalla validità di sottoargomenti critici arbitrari, perché questi possono essere di grado maggiore o uguale rispetto all'argomento stesso.

DEFINIZIONE. Un argomento è *valido* sse esiste un metodo effettivo per ottenere, per ogni complementazione di un esempio di esso, un argomento canonico valido in senso stretto, avente le stesse premesse iniziali e la stessa conclusione.

Un semplice esempio può servire ad illustrare la definizione. Supponiamo di avere un argomento $\mathbb{D}$ costituito da un unico passo inferenziale $<\alpha, \beta \wedge \gamma> \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$, dove β è atomica. Possiamo allora ottenere una complementazione di quest'argomento sostituendo alla conclusione il seguente argomento canonico valido $\mathbb{D}'$: $<<\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)> \Rightarrow \beta \wedge \gamma> \Rightarrow \beta$. In questo modo, conformemente al principio che guida la definizione, le conseguenze che possono essere tratte in maniera canonica dalla conclusione possono essere tratte in maniera canonica dalle premesse, ossia mediante $<\beta \wedge \gamma> \Rightarrow \beta$. E' anche evidente che abbiamo dato semplicemente una lettura alternativa delle procedure di riduzione: nel corso della derivazione, è l'applicazione della I-regola ad essere eliminabile.

A questo punto è possibile definire la nozione di stabilità: si ha stabilità quando, dato un insieme $\mathbb{I}$ di regole di introduzione, una volta determinato l'insieme $\mathbb{E}$ delle regole di eliminazione valide secondo la procedura verso l'alto, se si applica la procedura di giustificazione verso il basso si riottiene $\mathbb{I}$ (ovviamente, questa definizione può essere data anche partendo dall'insieme $\mathbb{E}$). Qualora non si riottenga l'insieme di partenza, si ha uno squilibrio tra i due insiemi di regole: il verificazionista attribuisce alle costanti logiche (tutte o alcune) significati diversi rispetto al pragmatista. In questo caso, osserva Dummett, benché abbiamo una situazione di armonia, le regole non determinano significati coerenti, e vanno quindi mutate. La stabilità assicura invece un perfetto bilanciamento fra le regole, e si può ora assumere che, dato un insieme di regole, l'altro insieme sia determinato univocamente quando i due insiemi sono così bilanciati. La nozione di stabilità consente a Dummett anche di avanzare un'importante *congettura*: *in un contesto in cui vige la stabilità, l'armonia intrinseca (ossia, l'armonia prawitziana) implica l'armonia totale (la conservatività)* (cfr. Dummett (1991), 290).

3.2.2. ARMONIA CLASSICA

Dummett (1973) aveva affermato che la pratica linguistica è soggetta a revisione quando si scopre essere in disarmonia, ma di fatto nello stesso articolo affidava poi tutta la portata critica all'argomento della trascendenza (cfr. cap. 1). In effetti, stando ad entrambi i principi di armonia che abbiamo considerato, non si riesce a rendere valide le leggi della logica classica. Questa viola anzitutto il principio di conservatività: è immediato vedere che aggiungendo la regola classica dell'assurdo al frammento della logica positiva, si ottengono leggi logiche che non coinvolgono la negazione ma che non erano dimostrabili nel frammento originario, quali ad esempio la legge di Peirce: $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$. Inoltre, la logica classica viola il principio prawitziano di armonia: se prendiamo le seguenti regole per la negazione classica

$(\neg I)$ $\quad <[\alpha]\ \perp> \Rightarrow \neg\alpha$ $\qquad\qquad$ $(\neg E)$ $\quad <\neg\neg\alpha> \Rightarrow \alpha$

abbiamo chiaramente una formula massimale non eliminabile:

$<<[\neg\alpha]_{(1)}\ \perp> \Rightarrow {}_{(1)}\neg\neg\alpha> \Rightarrow \alpha$.

Ciò vuol dire che secondo il criterio prawitziano, classicamente possiamo ottenere da certi enunciati delle conseguenze che non sono garantite dalle condizioni per asserirli: in questo senso, possiamo ricavare delle conseguenze che non sono “contenute" nelle premesse. Le leggi logiche classiche non sono dunque valide secondo la definizione di conseguenza logica data da Prawitz: per ottenere una dimostrazione del terzo escluso per enunciati arbitrari (e quindi anche indecidibili) dovremmo avere un metodo che trasformi un argomento la cui ultima inferenza è data dall'applicazione della $(\neg E)$ all'enunciato $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$, in un argomento canonico, la cui ultima inferenza è dunque data dall'applicazione della $(\vee I)$-regola al sottoargomento immediato che si conclude con α (o con $\neg\alpha$). Ma ciò è impossibile, perché allora avremmo una dimostrazione di α (o di $\neg\alpha$), ossia, poiché α è un enunciato arbitrario, avremmo un metodo per decidere qualsiasi enunciato. La logica intuizionistica è invece in armonia secondo entrambi i principi: tutte le leggi logiche che violano la conservatività non sono intuizionisticamente valide, e inoltre la legge intuizionistica dell'assurdo può considerarsi giustificata semplicemente perché non esiste una corrispondente regola di introduzione, ossia perché non si dà un argomento valido che abbia $\perp$ come conclusione. Alternativamente, si potrebbe giustificare la regola dell'assurdo assumendo, secondo una proposta di Dummett ((1991), 295), una regola di introduzione (infinitaria) di questo tipo:

$$<\beta_1, \beta_2, \beta_3, ... > \Rightarrow \perp$$

(dove le premesse costituiscono l'insieme degli enunciati atomici del linguaggio). Sembra pertanto che le condizioni imposte conducano alla stessa conclusione cui si era giunti sulla scorta di considerazioni generali di teoria del significato, e cioè che mentre la logica intuizionistica è perfettamente “in ordine", la logica classica resiste a tutti i tentativi di coerente chiarificazione.

Concludere da ciò che la logica classica vada rigettata in favore di quella intuizionistica, è tuttavia senz'altro una mossa affrettata. Anzitutto, abbiamo visto che l'assunzione del principio di conservatività poggia su criteri fortemente dubbi; in secondo luogo, non sembra affatto sorprendente che la logica classica violi l'armonia prawitziana, visto che questa è retta dall'assunzione fondamentale, la quale a sua volta presuppone che le clausole della BHK definiscano il significato degli operatori logici: non si vede allora perché la disarmonia debba essere una prova oggettiva dell'incoerenza della logica classica, dato che per definire la nozione stessa di armonia dobbiamo ricorrere alla (o ad una qualche versione della) spiegazione costruttivistica delle costanti logiche. In ogni caso, nemmeno Dummett ritiene che la violazione dell'armonia da parte della logica classica sia una prova decisiva della sua incoerenza. Infatti, per poter asserire ciò bisognerebbe assumere che le regole logiche siano di per sé sufficienti a determinare il significato delle costanti logiche, e abbiamo già osservato che per Dummett questa assunzione è illegittima. In altri termini, si può richiedere che un certo linguaggio soddisfi la condizione di armonia solo se le sue regole sono sufficienti a determinare il significato delle espressioni che vi appartengono (cfr. Dummett (1991), 247, 286-287), e le regole puramente logiche non determinano, da sole, il significato delle espressioni logiche: dunque non è detto che la violazione dell'armonia in un contesto ristretto qual'è quello della logica comporti una situazione di disarmonia nell'intero linguaggio, ed è solo rispetto ad esso che l'armonia (e la stabilità) può essere richiesta (ibid.). Naturalmente, ciò sposta l'attenzione verso contesti a cui i concetti specifici elaborati nella logica sono difficilmente estendibili, e rende la questione altamente intrattabile. Per queste ragioni, nel suo attacco alla logica classica Dummett ha perlopiù fatto affidamento sull'argomento della trascendenza, piuttosto che sulla condizione dell'armonia.

Ciò che per Dummett la discussione sull'armonia dimostra è che la logica intuizionistica può essere spiegata chiaramente facendo riferimento soltanto all'uso degli operatori logici, senza dover ricorrere ad alcuna metateoria semantica: pertanto, essa si propone come soluzione del problema di come si possa disporre di una teoria semantica la cui metateoria non abbia la stessa logica del linguaggio oggetto, e che quindi non sia sensibile alle assunzioni metalinguistiche (cfr. § 2.1): poiché gli operatori intuizionistici possono essere compresi senza fare riferimento ad alcuna teoria semantica (ossia, senza supporre di averli già compresi), la logica intuizionistica sarebbe adeguata a costituire la logica soggiacente al metalinguaggio in cui viene formulata una ST: "If that is not *the* right logic, at least it may serve as a medium by means of which to discuss other logics" (Dummett (1991), 300).

In ogni caso, la forza delle accuse alla logica classica è ulteriormente affievolita dal fatto che la nozione di armonia sopra definita è strettamente dipendente dalle proprietà connesse alla normalizzazione, e che è invece definibile una diversa nozione di armonia che è goduta dalla logica classica ma non da quella intuizionistica. E poiché non sembra esserci alcun motivo per il quale l'armonia debba essere definita in riferimento alla normalizzazione, l'onere del logico classico appare molto alleggerito. La seguente nozione classica di armonia è dovuta a Weir (1986). L'idea centrale di Weir è la stessa che abbiamo visto operante nella nozione dummettiana di stabilità: le regole devono permettere di derivare tutte le conseguenze che sono contenute nelle premesse. Questa condizione è chiamata da Weir "requisito di non dispersione" (nonleakage constraint). Consideriamo anzitutto le regole schematiche di introduzione e di eliminazione che egli impiega (limitatamente al caso enunciativo). Una regola di introduzione schematica per un connettivo n-ario ξ è data dalla seguente configurazione:

$$<[\![A_1^i]\!]\ P_1^i,\ldots,[\![A_{k(i)}^i]\!]\ P_{k(i)}^i> \ \Rightarrow \xi(C_1,\ldots,C_n)$$

Essa va letta nel seguente modo: data una dimostrazione, per ogni j ($1 \leq j \leq k(i)$), della premessa immediata P_j^i dipendente dall'insieme di assunzioni $[\![A_j^i]\!]$ ed eventualmente da un ulteriore insieme di assunzioni $[\![S_j^i]\!]$, possiamo inferire la conclusione $\xi(C_1,...,C_n)$, che dipende dall'unione di tutte le premesse non scaricate da cui dipendono le premesse immediate, ossia da $\bigcup_{1 \le j \le k(i)} [\![S_j^i]\!]$. L'indice i $(1 \le i \le s)$ significa che sono possibili più I-regole per lo stesso connettivo.

Una regola di eliminazione schematica per ξ è una configurazione

$$<\xi(C_1,...,C_n), [\![A_1^i]\!]\ M_1^i,...,[\![A_{k(i)}^i]\!]\ M_{k(i)}^i> \Rightarrow F_i$$

da intendersi come segue: data una dimostrazione, per ogni j $(1 \le j \le k(i))$, della premessa minore M_j^i dipendente da $[\![A_j^i]\!]$ ed eventualmente da ulteriori assunzioni $[\![S_j^i]\!]$, assieme ad una dimostrazione di $\xi(C_1,...,C_n)$ eventualmente dipendente da un insieme di assunzioni $[\![S_0^i]\!]$, possiamo inferire la conclusione F_i dipendente da $\bigcup_{0 \le j \le k(i)} [\![S_j^i]\!]$.

La nozione di armonia proposta da Weir si basa su un principio di inversione che sia strettamente aderente all'idea di funzione inversa: f^{-1} è la funzione inversa di f quando la composizione $f \circ f^{-1}$ è la funzione identità. Nel caso delle regole logiche, deve quindi accadere che l'applicazione di una I-regola seguita immediatamente dall'applicazione di una E-regola corrispondente (e analogamente, l'applicazione di una E-regola per un dato connettivo seguita dall'applicazione di una corrispondente I-regola) ristabilisca esattamente la situazione precedente all'applicazione della prima regola. Ciò non vale, chiaramente, per il principio prawitziano, in cui nel caso della disgiunzione e del quantificatore esistenziale non si ha una vera e propria inversione, perché non si ristabilisce ciò che già si aveva prima dell'applicazione della prima regola. Il nuovo principio di inversione si divide in due parti: una parte riguarda regole di introduzione seguite da regole di eliminazione, e il secondo riguarda invece la direzione opposta.

PRINCIPIO DI INVERSIONE

[$\boldsymbol{I \Rightarrow E}$] Una dimostrazione o sequenza di dimostrazioni $\mathbb{D}$ è una condizione sufficiente per la costante logica ξ rispetto alla regola di introduzione $\mathfrak{R}$ sse applicando $\mathfrak{R}$ alla conclusione (o alle conclusioni) di $\mathbb{D}$ si ottiene ξ. Graficamente:

$$\frac{\mathbb{D}}{\xi(C_1,...,C_n)} = <[\![A_1^i]\!]\ P_1^i,...,[\![A_{k(i)}^i]\!]\ P_{k(i)}^i> \Rightarrow {}_{\mathfrak{R}}\xi(C_1,...,C_n)$$

Quando questa condizione è soddisfatta, il Principio di Inversione richiede (1) che esista una sequenza di dimostrazioni, ciascuna formata derivando $\xi(C_1,...,C_n)$ da $\mathbb{D}$ mediante $\mathfrak{R}$, aggiungendo come premesse minori le assunzioni scaricate $[\![A_j^i]\!]$ $(1 \le j \le k(i))$, e applicando una regola di eliminazione per ξ; e (2) che tale sequenza sia una condizione sufficiente per ξ rispetto a $\mathfrak{R}$, con le stesse premesse maggiori e dipendente dalle stesse assunzioni di $\mathbb{D}$. Tale sequenza di dimostrazioni è così rappresentabile:

$$<\frac{\mathbb{D}}{\xi(C_1,...,C_n)}, [\![A_1^i]\!],...,[\![A_{k(i)}^i]\!]> \Rightarrow {}_E P_1^i$$

$$\vdots \; \vdots$$

$$<\frac{\mathbb{D}}{\xi(C_1,...,C_n)}, [\![A_1^i]\!],...,[\![A_{k(i)}^i]\!]> \Rightarrow {}_E P_{k(i)}^i$$

Riassumendo: quando si realizza la condizione sufficiente per l'applicazione di una I-regola, l'applicazione di tale regola seguita immediatamente dall'applicazione di regole di eliminazione corrispondenti ci riconduce alla condizione sufficiente per l'applicazione della I-regola.

$[\boldsymbol{E \Rightarrow I}]$ Quando $\mathbb{D}$ è una condizione sufficiente per l'applicazione della regola di eliminazione $\mathfrak{R}$ a ξ, ossia quando si ha

$$\frac{\mathbb{D}}{F_i} = <\xi(C_1,...,C_n), [\![A_1^i]\!]\ M_1^i,...,[\![A_{k(i)}^i]\!]\ M_{k(i)}^i> \Rightarrow {}_{\mathfrak{R}} F_i$$

il Principio di inversione richiede che esista una dimostrazione la cui conclusione sia $\xi(C_1,...,C_n)$, e che consista di una sequenza di esempi di $\mathbb{D}$, ciascuno seguito da un'applicazione di $\mathfrak{R}$, la quale è seguita a sua volta da un'applicazione di una I-regola per ξ, che scarica tutte le premesse minori M_j^i $(1 \leq j \leq k(i))$. Ciò è espresso dalla seguente configurazione:

$$<<\begin{matrix}[\ M_1^1\ ]_{(1)} \\ \vdots \\ [M_{k(i)}^i]_{(1)}\end{matrix}\mathbb{D}> \Rightarrow {}_{\mathfrak{R}} F_1,...,<\begin{matrix}[\ M_1^1\ ]_{(1)} \\ \vdots \\ [M_{k(i)}^i]_{(1)}\end{matrix}\mathbb{D}> \Rightarrow {}_{\mathfrak{R}}\ F_s> \Rightarrow {}_{I(1)}\xi(C_1,...,C_n)$$

Dunque: quando si realizza la condizione sufficiente per l'applicazione di una E-regola, l'applicazione di tale regola seguita immediatamente dall'applicazione di regole di introduzione per l'operatore in questione ci riconduce alla condizione sufficiente per l'applicazione della E-regola.

Vediamo ora come le regole per i connettivi proposizionali si comportino rispetto al nostro principio di inversione. Esso è soddisfatto dalle regole per $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$:

$[(\wedge \boldsymbol{I}) \Rightarrow (\wedge \boldsymbol{E})]$ $<<\mathbb{D}_1\ \alpha, \mathbb{D}_2\ \beta> \Rightarrow \alpha \wedge \beta> \Rightarrow \alpha$ $\quad$ $<<\mathbb{D}_1\ \alpha, \mathbb{D}_2\ \beta> \Rightarrow \alpha \wedge \beta> \Rightarrow \beta$

$[(\wedge \boldsymbol{E}) \Rightarrow (\wedge \boldsymbol{I})]$ $<<\mathbb{D}\ \alpha \wedge \beta> \Rightarrow \alpha, <\mathbb{D}\ \alpha \wedge \beta> \Rightarrow \beta> \Rightarrow \alpha \wedge \beta$

$[(\rightarrow \boldsymbol{I}) \Rightarrow (\rightarrow \boldsymbol{E})]$ $<<[\alpha]_{(1)}\ \mathbb{D}\ \beta> \Rightarrow {}_{(1)}\alpha \rightarrow \beta, [\alpha]> \Rightarrow \beta$

$[(\rightarrow \boldsymbol{E}) \Rightarrow (\rightarrow \boldsymbol{I})]$ $<<\alpha \rightarrow \beta, [\alpha]_{(1)}> \Rightarrow \beta> \Rightarrow {}_{(1)}\alpha \rightarrow \beta$

$[(\neg \boldsymbol{I}) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{E})]$ $<<[\alpha]_{(1)}\ \perp> \Rightarrow {}_{(1)}\neg\alpha, [\alpha]> \Rightarrow \perp$

$[(\neg \boldsymbol{E}) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{I})]$ $<<\neg\alpha, [\alpha]_{(1)}> \Rightarrow \perp> \Rightarrow {}_{(1)}\neg\alpha$

Le usuali regole della disgiunzione non sono invece riconducibili al principio di inversione, per cui Weir propone delle regole alternative:

$(\vee I)\quad <[\neg\beta]\ \alpha> \Rightarrow \alpha \vee \beta \qquad\qquad <[\neg\alpha]\ \beta> \Rightarrow \alpha \vee \beta$

$(\vee E)\quad <\alpha \vee \beta, \neg\alpha> \Rightarrow \beta \qquad\qquad <\alpha \vee \beta,\ \neg\beta> \Rightarrow \alpha$

Tali regole sono adeguate ai nostri scopi:

$[(\vee \boldsymbol{I}) \Rightarrow (\vee \boldsymbol{E})]\quad <<[\neg\beta]_{(1)}\ \alpha> \Rightarrow_{(1)}, [\neg\beta]> \Rightarrow \alpha$

$[(\vee \boldsymbol{E}) \Rightarrow (\vee \boldsymbol{I})]\quad <<\alpha \vee \beta, [\neg\alpha]_{(1)}> \Rightarrow \beta> \Rightarrow_{(1)} \alpha \vee \beta$

Le nuove regole per la disgiunzione sono anche capaci di generare le leggi logiche classiche proposizionali:

$<[\neg\alpha]> \Rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$

e ciò vuol dire che la logica classica è in armonia secondo il principio di inversione qui proposto. Vale lo stesso per la logica intuizionistica? Il principio di inversione richiede che l'applicazione successiva delle regole di introduzione e di eliminazione (comunque si scelga la regola di partenza) ristabilisca la situazione precedente. Nel caso della disgiunzione, per riottenere uno dei due disgiunti dopo avere introdotto l'enunciato $\alpha \vee \beta$, è necessario ricorrere ad un'ulteriore assunzione, e, sempre per il nostro principio, tale assunzione deve essere scaricata dalla regola di introduzione. Ora, dato l'enunciato $\alpha \vee \beta$, l'unica assunzione che può servire a riottenere uno dei due disgiunti è la negazione dell'altro disgiunto. La forma della regola di introduzione è dunque determinata: essa deve rendere valida la legge $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$, che è classicamente, ma non intuizionisticamente, valida. Pertanto la logica intuizionistica non è in armonia secondo il presente criterio.

Come nella nozione dummettiana di stabilitò, il bilanciamento tra i due tipi di regole è inteso assicurare che le regole permettano di estrarre tutte le conseguenze contenute nelle premesse. In maniera ancora più marcata rispetto alla nozione dummettiana, ci si allontana qui dall'idea che vi sia un nucleo di base del significato (rappresentato dalle inferenze canoniche) rispetto al quale gli altri significati risultino giustificati (o meno): tutto il peso è spostato sul rapporto strutturale tra le regole. Le due nozioni conducono però a conclusioni nettamente diverse: secondo le definizioni adottate da Dummett, mutuate dai principi prawitziani, la logica classica permetterebbe di trarre conclusioni non contenute nelle premesse, e quindi sarebbe *troppo forte*; mentre secondo le definizioni di Weir, la logica intuizionistica sarebbe *troppo debole*, non riuscendo ad estrarre tutte le conseguenze contenute nelle premesse. L'intento di Dummett di assicurare una base comune di discussione per decidere quale sia la logica corretta sembra così infrangersi contro la presenza di differenti nozioni di armonia, ciascuna delle quali conduce a sostenere la perfetta coerenza ed intelligibilità di una logica ma non di altre, e senza che vi sia alcun argomento risolutivo per decidere sulla nozione di armonia da preferire. Dunque l'"incomprensione" tra i sostenitori di logiche diverse permane.