Übungsblatt 10: Zufallsstichproben und Parameterschätzung

1. Welches sind die zwei zentralen Eigenschaften einer Zufallsstichprobe?

2. Für eine Zufallsvariable X gilt in der Grundgesamtheit $E(X) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Aus der Grundgesamtheit wird eine Zufallsstichprobe der Größe n gezogen.

   2.1 Zeigen Sie, daß für das arithmetische Mittel der n Stichprobenvariablen $X_1, X_2, .., X_n$ gilt $E(\bar{X}) = \mu$

   2.2 Zeigen Sie, daß $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

   2.3 Beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen, d.h. daß $\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X} - \mu| \le \varepsilon) = 1$ für beliebige $\varepsilon > 0$

   Hinweis: $P(|X - \mu| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ mit $E(X) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
   (Tschebyschev'sche Ungleichung)

   2.4 Interpretieren Sie diese Resultate und Ihre Implikationen für die Schätzung von $E(X) = \mu$ auf der Basis einer Zufallsstichprobe.

3. Was besagt der Zentrale Grenzwertsatz?

4. Illustrieren Sie graphisch einen verzerrten und einen unverzerrten Schätzer für einen Grundgesamtheitsparameter θ.

5. Illustrieren Sie graphisch einen konsistenten Schätzer für einen Grundgesamtheitsparameter θ.

6. Nehmen Sie an, es existieren zwei alternative Schätzer $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ für einen Parameter θ. Beide Schätzer sind unverzerrt, aber $\hat{\theta}_1$ ist effizienter als $\hat{\theta}_2$. Illustrieren Sie dies mit einer Graphik.

7. Zerlegen Sie den Mittleren Quadratischen Fehler (MQF) einer Schätzfunktion in seine Komponenten Bias und Varianz.

8. Erläutern Sie mit einer Graphik den möglichen Trade-Off von Bias und Varianz einer Schätzfunktion (2 Schätzer). Verständnisfrage: Wieso hat eine Schätzfunktion eine Varianz, bzw. warum stellt sie eine Zufallsvariable dar?

9. Wir nehmen an, in der Grundgesamtheit folgt die Zufallsvariable X einer Poissonverteilung mit Parameter λ. Schlagen Sie einen Momentenschätzer für den Parameter λ vor. Was benötigen Sie für Ihre Schätzung? Gibt es noch weitere Momentenschätzer?

10. Wir nehmen an, in der Grundgesamtheit ist die Zufallsvariable X exponentialverteilt mit Parameter λ. Schlagen Sie einen Momentenschätzer für den Parameter λ vor. Begründen

Sie Ihre Wahl.

11. Annahmen wie 9: Leiten sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter λ der Poissonverteilung her.

12. Annahmen wie 10: Leiten Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter λ der Exponentialverteilung her.