

## Übungsblatt 6, Statistik II: Zufallsvektoren (mehrdimensionale Zufallsvariablen)

1. Die Zufallsvariable  $X$  bezeichnet die Auszahlung (in Euro) einer risikobehafteten Finanzanlage in Periode  $t+1$ . Diese Auszahlung ist eine Zufallsvariable, für die gilt  $X \sim N(50, 10000)$ . Eine Finanzinstitution bietet nun eine derivative Finanzanlage an, die die folgende Auszahlung  $Y$  bietet:  $Y = (X - 10)^3$ . Berechnen Sie die erwartete Auszahlung  $E(Y)$  der derivativen Finanzanlage.
2. Die Zufallsvariable  $X$  bezeichnet die Rendite von Finanzanlage A und die Zufallsvariable  $Y$  die Rendite von Finanzanlage B.
  - a) Beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten was der Ausdruck  $F_{XY}(-0,05, -0,01) = 0,05$  bedeutet.
  - b) Weiterhin gilt  $F_X(-0,05) = 0,2$  und  $F_Y(-0,01) = 0,2$ . Interpretieren Sie die beiden Werte. Sind die beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  unabhängig? Argumentieren Sie warum, bzw. warum nicht.
3.  $X$  bezeichnet eine binäre Zufallsvariable, die das Ergebnis des „Zufallsexperiments“ „Veränderung des Aktienindex Dax von  $t$  auf  $t+1$ “ in die Menge der reellen Zahlen abbildet: Konkret nimmt die Zufallsvariable  $X$  den Wert 1 an, wenn der DAX steigt und den Wert 0, wenn der DAX nicht steigt. Die Zufallsvariable  $Y$  ist ähnlich definiert für die Veränderung des Dow Jones Aktienindex von  $t$  auf  $t+1$ :  $Y=1$  wenn der Dow Jones steigt und  $Y=0$ , wenn der Dow Jones nicht steigt.
  - a) Interpretieren Sie die folgenden Ausdrücke:  $f_{XY}(1,1) = 0,3$ ;  $f_{XY}(0,0) = 0,3$ ;  $f_{XY}(1,0) = f_{XY}(0,1) = 0,2$ .
  - b) Weiterhin gilt  $f_X(1) = f_X(0) = 0,5$  und  $f_Y(1) = f_Y(0) = 0,5$ . Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig? Argumentieren Sie warum (bzw. warum nicht).
4. Die Zufallsvariable  $X$  bezeichnet den Gewinn/Verlust von Firma A im nächsten Quartal. Dabei gilt  $X \sim N(400, 40000)$ . Die Zufallsvariable  $Y$  bezeichnet den Gewinn/Verlust von Firma B im nächsten Quartal. Dabei gilt  $Y \sim N(50, 10000)$ . Die beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind unabhängig. Berechnen Sie  $F_{XY}(-200, -150)$  und interpretieren Sie den berechneten Wert.
5. Wir betrachten zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .  $Y$  ist eine binäre Zufallsvariable „Geschlecht einer zufällig ausgewählten Person“, welche die Werte  $Y=0$  für „männlich“ und  $Y=1$  für „weiblich“ annimmt. Die Zufallsvariable  $X$  gibt an, wie häufig von dieser zufällig ausgewählten Person ein bestimmtes, uns interessierendes Produkt gekauft wird (es können maximal drei Kaufakte beobachtet werden).

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist in der folgenden Tabelle gegeben:

$f_{XY}(x, y)$	Y=0	Y=1
X=1	0,4	0,2
X=2	0,1	0,2
X=3	0,05	0,05

- a) Berechnen Sie die marginalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $f_Y(y)$  und  $f_X(x)$  (die Randverteilungen der Zufallsvariablen X und Y).
- b) Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unabhängig? (Argumentieren Sie)