

# Kapitel 3

## Vielteilchensysteme

### 3.1 Dynamik zweier oder mehrerer Massenpunkte

#### 3.1.1 Das dritte Newton'sche Axiom

In den vorangegangenen Kapiteln hatten wir diskutiert, wie sich einzelne Massenpunkten unter dem Einfluss von Kräften bewegen. Wir hatten dabei nicht weiter berücksichtigt, dass diese Kräfte i. allg. ebenfalls von Körpern ausgehen, die sich bewegen können. Dies war bei den Experimenten, die wir durchgeführt hatten, eine gute Annahme. So waren beispielsweise die Federn und Pendel, die wir betrachtet hatten, an massiven Stativen bzw. der Decke fest verankert. Die Stative bzw. die Decke waren so ausgelegt, dass sie Kräfte, die die schwingenden oder hängenden Massen auf sie ausübten, nicht zu deren Zusammenbruch führten. Auch im Fall der Planetenbewegung ist es so, dass sich die erheblich schwerere Sonne selbst (fast!) nicht bewegt, obwohl sie selbst der Gravitationskraft unterliegt, die die Planeten auf sie ausüben. Im Fall der Sonne ist diese Aussage aber etwas weniger klar ersichtlich wie im Fall der Stative und der Decke. Wir werden im Verlauf des Kapitels aber sehen, wie stark die Rückwirkung der Planeten auf die Sonne ist.

Um die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, genauer zu fassen, führen wir zunächst einige Experimente durch:

1. Wir ziehen an zwei identischen Federn, die miteinander verbunden sind (Abb. 3.1). Ziehen wir symmetrisch von beiden Seiten mit jeweils der gleichen Kraft (Abb. 3.1a), beobachten wir, dass beide Federn gleich weit gedehnt werden. Dieser symmetrische Fall ist nicht sehr überraschend. Jetzt verankern wir Feder 1 und ziehen nur an Feder 2 (Abb. 3.1b). Wiederum werden beide Federn gleich stark gedehnt. Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir Feder 2 verankern und an Feder 1 ziehen (Abb. 3.1c)
2. Wir drücken auf der Luftkissenbahn zwei Wagen gegeneinander. An jedem Wagen befinden sich Metallringe, die wie eine Feder wirken (s. Abb. 3.2). Wir lassen dann die Wagen voneinander weglaufen. Drücken die beiden Metallringe gegeneinander, bewegen sich die Wagen symmetrisch mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten voneinander weg. Das gleiche Ergebnis erhalten wir aber auch, wenn nur einer der beiden Wagen mit seinem Metallring gegen den anderen Wagen "drückt".

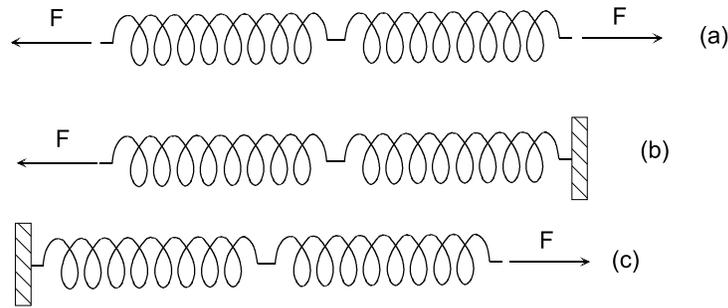


Abbildung 3.1: Kräfte auf zwei aneinandergeschaltete Federn

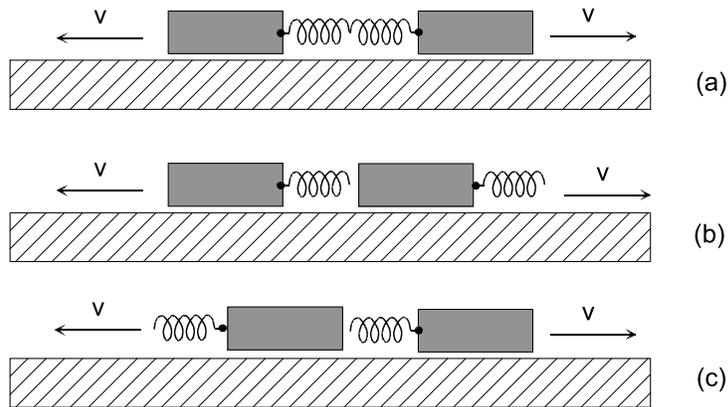


Abbildung 3.2: Abstoßung zweier identischer Wagen auf der Luftkissenbahn. An den Wagen befinden sich Metallringe, die durch eine Feder symbolisiert sind.

Offensichtlich waren in beiden Fällen die Kräfte, die die beiden Körper aufeinander ausgeübt hatten, sehr symmetrisch, auch wenn die Geometrie wie in den Fällen (b) und (c) der Abb. 3.1 und 3.2 asymmetrisch war.

Diese Beobachtung können wir nun abstrahieren:

”Wenn die Kraft  $\vec{F}_{12}$ , die auf einen Körper 1 wirkt, ihren Ursprung in einem anderen Körper 2 hat, so wirkt auf diesen die entgegengesetzt gleiche Kraft  $-\vec{F}_{12}$ ”.

Dies ist die Aussage des **3. Newtonschen Axioms**, das die Newtonschen Axiome vervollständigt. In kürzerer Form lässt sich dieses Axiom, das auch als ”**Reaktionsprinzip**” bezeichnet wird, ”**actio**” = ”**reactio**” schreiben. Abb. 3.3 stellt das Reaktionsprinzip graphisch dar.



Abbildung 3.3: Zum Reaktionsprinzip.

### 3.1.2 Gesamtimpuls, Schwerpunkts- und Relativbewegung

Wir wollen nun die **Bewegungsgleichungen** für zwei bzw. verallgemeinernd auch für  $N$  Massenpunkte aufstellen:

Zunächst können wir ganz allgemein schreiben:

$$\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{p}}_1 \quad (3.1)$$

$$\vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{p}}_2 \quad (3.2)$$

bzw. für  $N$  Massenpunkte:  $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{p}}_i$ , mit  $i = 1, \dots, N$ .

Nun wollen wir den **Gesamtimpuls**  $\vec{P}$  einführen: .

Addieren wir die Gleichungen 3.1 und 3.2, so ergibt sich für 2 Massen:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \dot{\vec{P}} \quad (3.3)$$

bzw. für  $N$  Massen:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} \quad (3.4)$$

Um nun weiterzukommen, zerlegen wir die Kraft  $\vec{F}_i$ , die auf Masse  $i$  wirkt, in eine von außen wirkende Kraft  $\vec{F}_i^{(a)}$  und in die **inneren Kräfte**  $\vec{F}_{ik}$ , die von den anderen Massen  $k$  ausgehen (man beachte, dass  $\vec{F}_{ii}$  gleich null ist, da der  $i$ -te Körper keine Kraft auf sich selbst ausübt<sup>1</sup>). Die **äußeren Kräfte**  $\vec{F}_i^{(a)}$  können zum Beispiel durch die Schwerkraft der Erde gegeben sein. Mit dieser Zerlegung schreibt sich die Kraft auf den  $i$ -ten Massenpunkt:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, N) \quad (3.5)$$

Nun setzen wir dies in  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \dot{\vec{P}}$  ein:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i,k=1}^N \vec{F}_{ik} \quad (3.6)$$

Die beiden Indizes unter dem zweiten Summenzeichen auf der rechten Seite der Gleichung deuten an, dass sowohl über  $i$  als auch über  $j$  summiert wird (beide laufen von 1 bis  $N$ ).

Im Fall zweier Massen erhalten wir:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}_1^{(a)} + \vec{F}_2^{(a)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}. \quad (3.7)$$

Nun ist aber nach dem Reaktionsprinzip  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , bzw.  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$  ( $i, k=1 \dots N$ ). Wenn wir also über alle  $i$ 's und  $k$ 's summieren, so heben sich diese Beiträge gerade auf und wir erhalten:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>Dies folgt auch aus dem Reaktionsprinzip:  $\vec{F}_{ii} = -\vec{F}_{ii}$ , woraus sich  $\vec{F}_{ii} = 0$  ergibt.

**Der Gesamtimpuls wird also nur durch die äußeren Kräfte geändert. Die inneren Kräfte haben keinen Einfluss.**

Speziell für den Fall, dass diese äußeren Kräfte verschwinden, bleibt der Gesamtimpuls erhalten, ganz egal, wie kompliziert die inneren Kräfte zwischen den Massenpunkten sind.

Es liegt nun nahe, ganz in Analogie zur Definition des Impulses für einen Massenpunkt,  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ , auch für das gesamte Ensemble aus  $N$  Teilchen einen Vektor  $\vec{R}$  einzuführen, so dass gilt:  $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$ . Hierbei ist  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  die **Gesamtmasse**. Der Vektor  $\vec{R}$  ist die "Schwerpunktskoordinate" oder kurz der "**Schwerpunkt**".

Mit der Definition des Gesamtimpulses gilt:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \cdot \dot{\vec{R}}. \quad (3.9)$$

Der Schwerpunktsvektor  $\vec{R}$  ist also gegeben durch:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (3.10)$$

Im Englischen nennt man den Schwerpunkt "center of mass", was offensichtlich sehr angebracht ist.

Entsprechend können wir durch  $\dot{\vec{R}} = \vec{v}_s$  auch eine **Schwerpunktsgeschwindigkeit**  $\vec{v}_s$  definieren.

Es gilt:

$$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \quad (3.11)$$

Diese Beziehung ist sehr erstaunlich. Sie besagt nämlich, dass sich **der Schwerpunkt so bewegt, als ob alle äußeren Kräfte  $\vec{F}_i^{(a)}$  in ihm angriffen**, obwohl der Vektor möglicherweise einen Punkt zeigt, in dem sich nicht einmal ein Massenpunkt befindet. **Die inneren Kräfte  $\vec{F}_{ik}$  haben dagegen auf die Schwerpunktsbewegung keinen Einfluss.**

Wir wollen nun für zwei Massenpunkte herausfinden, wo sich der Schwerpunkt in Bezug auf die beiden Massen befindet. Zunächst gilt entsprechend der Definition von  $\vec{R}$ :

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.12)$$

Für den Spezialfall  $m_1 = m_2$  ergibt sich:  $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ , was wir auch als  $\vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{1}{2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  schreiben können. Der Vektor  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  zeigt vom Massenpunkt 1 zum Massenpunkt 2. Für den Fall gleicher Massen liegt der Schwerpunkt also genau zwischen den beiden Massenpunkten.

Um die Lage des Schwerpunkts für ungleiche Massen zu finden, führen wir zwei Vektoren  $\vec{r}_{1,s}$  und  $\vec{r}_{2,s}$  ein via:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_{1,s} \quad (3.13)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_{2,s} \quad (3.14)$$

Der Vektor  $\vec{r}_{1,s}$  zeigt also vom Schwerpunkt zum Massenpunkt 1, der Vektor  $\vec{r}_{2,s}$  vom Schwerpunkt zum Massenpunkt 2.

Nun gilt:

$$\vec{r}_{1,s} = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (3.15)$$

Analog ergibt sich:

$$\vec{r}_{2,s} = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (3.16)$$

Die Vektoren  $\vec{r}_{1,s}$  und  $\vec{r}_{2,s}$  und damit der **Schwerpunkt** liegen **auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Massenpunkten**.

Die Beträge dieser Vektoren verhalten sich wie:  $\frac{|\vec{r}_{1,s}|}{|\vec{r}_{2,s}|} = \frac{m_2}{m_1}$ . **Die Abstände der beiden Massen vom Schwerpunkt verhalten sich also umgekehrt wie die Massen selbst.**

Die Abb. 3.4 demonstriert die besonderen Eigenschaften des Schwerpunkts an Hand einer mehrfach belichteten Aufnahme des Wurfs einer Hantel. Der Schwerpunkt ist schwarz markiert. Die Hantel selbst dreht sich beim Wurf, so dass die beiden Kugeln der Hanteln relativ komplizierte Bahnkurven durchlaufen. Der Schwerpunkt folgt allerdings schlichtweg einer Wurfparabel.

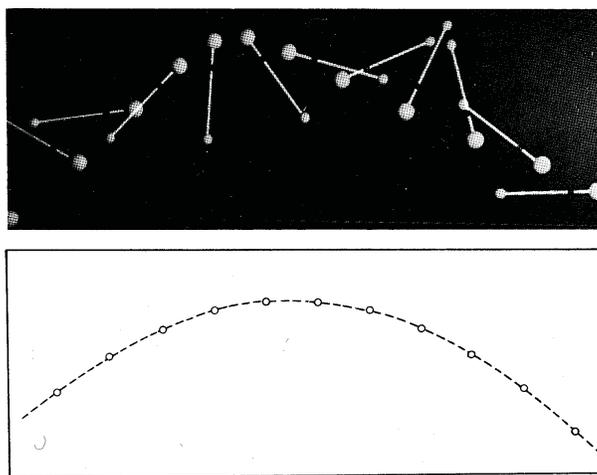


Abbildung 3.4: *Wurf einer Hantel. Der Schwerpunkt (oben schwarz markiert, unten nochmals gegen  $x$  aufgetragen) folgt dabei einer Wurfparabel (aus: Brand/Dahmen, Mechanik, S. 76)*

Im Hörsaal demonstrieren wir die Eigenschaften des Schwerpunkts an einer Reihe von Versuchen:

- Hochheben eines im Schwerpunkt gelagerten Holzstabes, an dessen Ende sich zwei Gewichte (Massen  $m_1$  und  $m_2$ ) befinden (s. Abb. 3.5(a)). Auf den Schwerpunkt wirkt sehr wohl die Gewichtskraft  $(m_1 + m_2 + m_{\text{Holzstab}}) \cdot g$ , es gibt aber beispielsweise keine Kräfte, die den Stab drehen. Genau dies passiert aber, wenn der Stab außerhalb des Schwerpunkts gelagert wird.
- schnelle Drehung einer Hantel um eine Achse senkrecht zur Verbindungslinie zwischen den Kugeln (Abb. 3.5(b)). Geht die Rotationsachse durch den Schwerpunkt, dreht sich die Hantel lediglich um sich selbst. Andernfalls fliegt die Hantel in radialer Richtung weg.

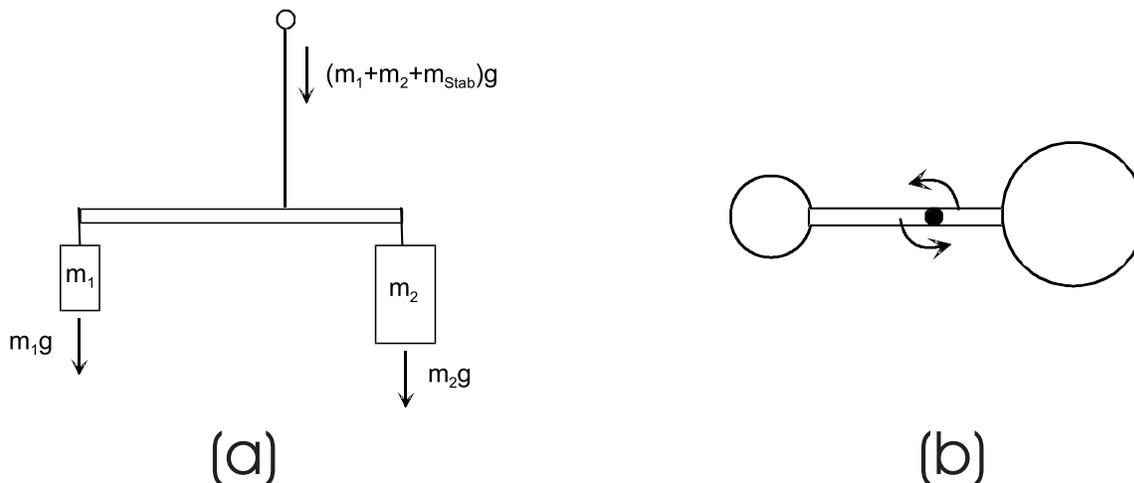


Abbildung 3.5: (a) Hochheben eines im Schwerpunkt gelagerten Holzstabes, an dem zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  hängen; (b) Drehung einer im Schwerpunkt gelagerten Hantel.

- Auf der Luftkissenbahn sind zwei sich bewegende Wagen durch eine Feder verbunden. Die Wagen schwingen zwar gegeneinander, der Schwerpunkt (Markierung durch Pfeilspitze) bewegt sich aber mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Bahn.

Wir wollen jetzt untersuchen, welchen Einfluss die inneren Kräfte  $\vec{F}_{ik}$  auf die Bewegung der Massenpunkte haben. Dazu verwenden wir nochmals die Gleichungen 3.1 und 3.2:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{p}}_1 \\ \vec{F}_2 &= m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{p}}_2\end{aligned}$$

Wir multiplizieren Gleichung 3.1 mit  $m_2$ , Gleichung 3.2 mit  $m_1$  und bilden die Differenz:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = m_1 \vec{F}_2 - m_2 \vec{F}_1 \quad (3.17)$$

Nehmen wir weiter an, dass die äußeren Kräfte  $\vec{F}_1^{(a)}$  und  $\vec{F}_2^{(a)}$  verschwinden, so ergibt sich:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = m_1 \vec{F}_{12} - m_2 \vec{F}_{21} \quad (3.18)$$

Auf Grund des Reaktionsprinzips ist  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$  und wir erhalten:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = (m_1 + m_2) \vec{F}_{12} \quad (3.19)$$

oder:

$$\vec{F}_{12} = \mu \ddot{\vec{r}} \quad (3.20)$$

mit:  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  ("reduzierte Masse") und:  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  ("Relativkoordinate").

Gleichung 3.20 hat genau die gleiche Form wie die Gleichungen 3.1 und 3.2.

**Man kann also das Zweikörperproblem wie ein Einkörperproblem behandeln und beispielsweise Lösungen, die wir in vorangegangenen Abschnitten erhalten haben (z. B. Planetenbewegungen, Schwingungen) direkt verwenden. Man muss in der Lösung des Einteilchenproblems lediglich die Masse durch die reduzierte Masse und die Koordinate durch die Relativkoordinate ersetzen.**

Vom Schwerpunkt aus betrachtet bewegt sich dann Körper 1 mit der Koordinate  $\vec{r}_{1,s}(t) = -\vec{r}(t) \cdot \frac{m_2}{m_1}$  und Körper 2 mit  $\vec{r}_{2,s}(t) = \vec{r}(t) \cdot \frac{m_1}{m_2}$ .

Beispielsweise bewegen sich nun sowohl die Planeten als auch die Sonne auf Ellipsenbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt, der in der Nähe des Sonnenzentrums liegt. Wie nahe, können wir leicht aus folgenden Daten berechnen:

Masse der Erde:  $m_E \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg

Masse der Sonne:  $m_S \approx 333000 m_E$

Sonnendurchmesser:  $2r_S \approx 1.4 \cdot 10^6$  km

Abstand zwischen Erde und Sonne:  $r_{SE} \approx 1.5 \cdot 10^8$  km.

Das Verhältnis der Abstände der Sonne bzw. der Erde vom Schwerpunkt ist  $r_{1,s}/r_{2,s} = 1/333000 \approx 3 \cdot 10^{-6}$ . Mit  $r_{SE} = r_{1,s} + r_{2,s} \approx r_{2,s}$  ergibt dies  $r_{1,s} \approx 450$  km, was wesentlich weniger ist als der Radius der Sonne.

Die reduzierte Masse ist  $\mu = \frac{m_E m_S}{m_E + m_S} = m_E \left( \frac{1}{1 + m_E/m_S} \right) \approx m_E \left( 1 - \frac{m_E}{m_S} \right) \approx m_E (1 - 3 \cdot 10^{-6})$ , weicht also nur um  $3 \cdot 10^{-6}$  von der Erdmasse ab.

Es war also eine sehr gute Näherung, die Planetenbewegung so zu behandeln, als wäre die Sonne unbeweglich. Hätten wir anstelle der Erde den 318 mal schwereren und 5.2 mal weiter entfernten Jupiter betrachtet, so wäre die reduzierte Masse um ca.  $10^{-3}$  von der Jupitermasse abgewichen und der Schwerpunkt wäre etwa  $7.5 \cdot 10^5$  km vom Sonnenzentrum weg, also etwa am Sonnenrand.

Wir wenden uns nun Prozessen zu, bei denen zwei Körper voneinander weggeworfen bzw. weggeschossen werden. Hierzu zunächst folgendes Gedankenexperiment:

Ein **Astronaut** (Masse inkl. aller Gegenstände, die er bei sich trägt:  $m_1$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}_1 = 0$ ) schwebt im Weltall und **wirft** einen **Gegenstand** (Masse  $m_2$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$ ) von sich **weg**. Der Schwerpunkt und der Gesamtimpuls ist in Ruhe und bleibt dies auch, da keine äußeren Kräfte vorliegen. Nach dem Wurf müssen sich also Astronaut und Gegenstand so voneinander wegbewegen, dass weiterhin  $\vec{P} = 0$  gilt. Die Geschwindigkeit des nun um  $m_2$  leichteren Astronauten nach dem Wurf sei  $\vec{v}'_1$ .

Es gilt also

$$\vec{P} = 0 = (m_1 - m_2) \vec{v}'_1 = m_2 \vec{v}_0 \quad (3.21)$$

woraus folgt:

$$\vec{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 - m_2}\vec{v}_0. \quad (3.22)$$

Nun soll der Astronaut nochmals einen Gegenstand (Masse  $m_2$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  relativ zum Astronauten) von sich wegwerfen. Beobachtet dies ein weiterer Astronaut der sich mit der gleichen Geschwindigkeit  $\vec{v}'_1$  wie der Astronaut vor dem zweiten Wurf bewegt, so stellt er fest, dass der Astronaut sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}''_1 = -\frac{m_2}{m_1 - 2m_2}\vec{v}_0$  entgegen der Wurfrichtung bewegt (der Summand  $2m_2$  im Nenner entsteht dadurch, dass der Astronaut zum zweiten mal um die Masse  $m_2$  leichter wurde). Addiert man hier die Geschwindigkeit  $\vec{v}'_1$  hinzu, die der Astronaut schon nach dem ersten Wurf hatte, so erhält man eine Gesamtgeschwindigkeit von  $\vec{v}'_1 + \vec{v}''_1 = -m_2\left(\frac{1}{m_1 - m_2} + \frac{1}{m_1 - 2m_2}\right)\vec{v}_0$ . Man kann diesen Vorgang nun weiter fortsetzen, wobei aber zu beachten ist, dass die Masse des Astronauten nicht beliebig klein oder gar negativ werden kann. **Der Astronaut kann also durch wiederholtes Wegwerfen von Gegenständen immer schneller werden.** Man beachte aber, dass bei dem Vorgang der Schwerpunkt des Ausgangssystems (Astronaut + viele Massen  $m_1$ ) in Ruhe bleibt.

Genau dieses Prinzip kann benutzt werden, um eine **Rakete** zu beschleunigen.

*Wir pumpen eine Rakete mit Luft auf den Druck von einigen bar auf und lassen dann die Luft ausströmen. Die Rakete fliegt sehr mäßig weit.*

Die Rakete habe eine Anfangsmasse  $M_{anf}$  und eine Anfangsgeschwindigkeit<sup>2</sup>  $v_{anf} = 0$ . Aus der Schubdüse der Rakete sollen sehr leichte Massen  $dm$  mit einer Geschwindigkeit  $-v_0$  entgegen der Flugrichtung austreten. Nach einer gewissen Zeit hat die Geschwindigkeit der Rakete den Wert  $v$  und ihre Masse ist  $m$ . Ihr Impuls ist dann  $m \cdot v$ . Nach dem Austritt der nächsten Masse sei die Geschwindigkeit der Rakete gleich  $v + dv$ . Die Geschwindigkeit der austretenden Masse relativ zum ruhenden Beobachter ist  $v - v_0$ , ihr Impuls beträgt  $dm \cdot (v - v_0)$  (s. Abb. 3.6). Die Erhaltung des Gesamtimpulses verlangt:

$$m \cdot v = (m - dm) \cdot (v + dv) + (v - v_0) \cdot dm \quad (3.23)$$

Ausmultipliziert ergibt dies:

$$m \cdot v = m \cdot v + m \cdot dv - dm \cdot v - dm \cdot dv + v \cdot dm - v_0 \cdot dm \quad (3.24)$$

oder, wenn wir den sehr kleinen Term  $dm \cdot dv$  vernachlässigen:

$$0 = m \dot{v} - v_0 \cdot \dot{m}. \quad (3.25)$$

Wir lösen nach  $dv$  auf:  $dv = v_0 \frac{dm}{m}$ .

Diese Gleichung müssen wir nun vom Anfangswert ( $m = M_{anf}$ ,  $v = 0$ ) bis zum Endwert ( $m = M_{end}$ ,  $v = v_{end}$ ) integrieren:

$$\int_0^{v_{end}} dv = v_0 \int_{M_{anf}}^{M_{end}} \frac{dm}{m} \quad (3.26)$$

---

<sup>2</sup>Wir nehmen an, dass die Bahnkurve der Rakete gerade ist (eindimensionale Bewegung) und lassen deshalb die Vektorpfeile weg.

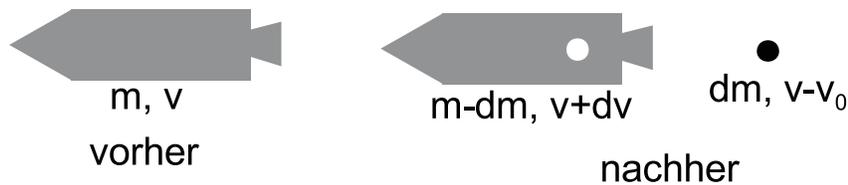
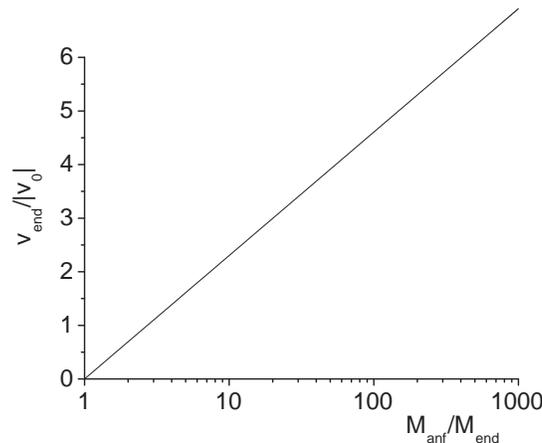


Abbildung 3.6: Zum Prinzip des Raketenantriebs

Die linke Seite liefert:  $\int_0^{v_{end}} dv = v_{end}$ , die rechte Seite liefert:

$$v_0 \int_{M_{anf}}^{M_{end}} \frac{dm}{m} = v_0 \ln m \Big|_{M_{anf}}^{M_{end}} = v_0 \cdot \ln \frac{M_{end}}{M_{anf}} = -v_0 \cdot \ln \frac{M_{anf}}{M_{end}}. \quad (3.27)$$

Die Endgeschwindigkeit ist also:  $v_{end} = -v_0 \cdot \ln \frac{M_{anf}}{M_{end}}$ . Die Funktion ist in Abb. 3.7 dargestellt. Man beachte den logarithmischen Maßstab auf der  $x$ -Achse.

Abbildung 3.7: Endgeschwindigkeit der Rakete in Abhängigkeit von  $M_{anf}/M_{end}$ 

Für  $M_{anf} = M_{end}$  ist  $v_{end} = 0$ . Dies macht auch Sinn, da  $M_{anf} = M_{end}$  bedeutet, dass keine Masse ausgestoßen wurde. Der Wert  $v_{end} = -v_0$  wird für  $M_{anf}/M_{end} = e \approx 2.718$  erreicht. Soll die Rakete die 4-fache Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoff erreichen, so müsste  $M_{anf}/M_{end}$  bereits etwa 55 betragen.

Um die Rakete effektiv fliegen zu lassen, sollte also  $v_0$  möglichst hoch sein und ein möglichst großer Teil der Masse abgegeben werden.

*Wir demonstrieren den zweiten Effekt - Abgabe eines großen Teils der Anfangsmasse - dadurch, dass wir die Spielzeugrakete mit Wasser füllen. Den ersten Effekt - hohe Austrittsgeschwindigkeit - demonstrieren wir anhand eines Go-Carts, das durch den Gasaustritt aus einer 200 bar Druckflasche angetrieben wird.*

Zum Schluss dieses Abschnitts besprechen wir noch kurz ein Experiment, bei dem ein **Pfeil von einer Schaukel** geschossen wird. Man findet:

1. Fliegt der Pfeil von der Schaukel weg, so schlägt die Schaukel entgegen der Flugrichtung des Pfeiles aus und Pendel gedämpft nach. Die Schaukel hat durch den Schuss einen Impuls erhalten, der dem Impuls des Pfeils entgegengesetzt gleich ist<sup>3</sup>.
2. Schlägt der Pfeil in einem Brett ein, das mit der Schaukel verbunden ist, so "wackelt" das System Schaukel/Pfeil kurz während des Schusses, ist dann aber schnell wieder in Ruhe. Es hat (nach Einschlag) kein Impuls die Schaukel verlassen, so dass diese in Ruhe bleibt.

---

<sup>3</sup>Aus dem Ausschlag der Schaukel können wir im Prinzip den Impuls bzw. bei bekannter Masse die Geschwindigkeit des Pfeils bestimmen. Wir werden eine analoge Rechnung im nächsten Abschnitt beim "ballistischen Pendel" durchführen

## 3.2 Volumenintegrale

Wenn man Systeme von vielen Massenpunkten  $m_\alpha$  an Positionen  $\vec{r}_\alpha$  beschreiben will, so muss z.B. die Gesamtmasse  $M$  des Systems, den Vektor des Schwerpunktes  $\vec{R}$  oder aber auch die Kraft  $\vec{F}$  ausgerechnet werden, die durch die Gravitationswechselwirkung all dieser Teilchen auf einen weiteren Massenpunkt  $\mu$  an der Position  $\vec{r}$  ausgeübt wird. Es treten also Summen auf vom folgenden Typ auf:

$$M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M} \quad (3.28)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\gamma \mu m_\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_\alpha|^3} (\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \quad (3.29)$$

Diese Summen kann man leicht ausführen, wenn es sich um  $N = 3$  oder  $N = 10$  Massenpunkte handelt. Es wird jedoch unmöglich, wenn es sich bei den Massenpunkte z.B. um die Moleküle  $H_2O$  in einem Wassertropfen handelt. In einem Mol Wasser, das sind 18 Gramm Wasser, befinden sich nämlich

$$N = N_L \approx 6 \cdot 10^{23}$$

Moleküle, wobei  $N_L$  die **Loschmidtsche Zahl** bezeichnet. Wenn man einen modernen Computer benutzen würde, der in einer Sekunde etwa 1 Millionen Summanden in der Summe (3.28) aufsummieren könnte, so wäre dieser Computer immerhin etwa  $1.9 \cdot 10^{10}$  Jahre beschäftigt. Das ist erheblich länger als das Alter des Universums, der Computer wäre also sicher kaputt bevor er so eine einfache Aufgabe *Berechne den Schwerpunkt eine Menge von 18 g Wasser* erfüllt hätte. Wir müssen uns also nach einer anderen Rechen-technik umsehen.

Wir könnten z.B. das uns interessierende Volumen  $V$  in  $k$  kleine Untervolumina der Größe  $\Delta V$  einteilen (mit  $V = k\Delta V$ ). Dieser Teilvolumina könnten z.B. Quader sein mit einer Kantenlänge von  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  in  $x$ -,  $y$ - beziehungsweise der  $z$ -Richtung sein. Es gilt also

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Man kann dann bestimmen, wie viele der Massenpunkte  $m_\alpha$  typischerweise in dem Teilvolumen  $\Delta V$  an der Stelle  $\vec{r}_i$  befinden (siehe auch Abb. 3.8). Wir definieren also eine Teilchendichte mit

$$\rho(\vec{r}_i) = \frac{n_i}{\Delta V} ,$$

wobei  $n_i$  die Zahl der Teilchen in diesem Volumen bezeichnet. Damit könnte man nun

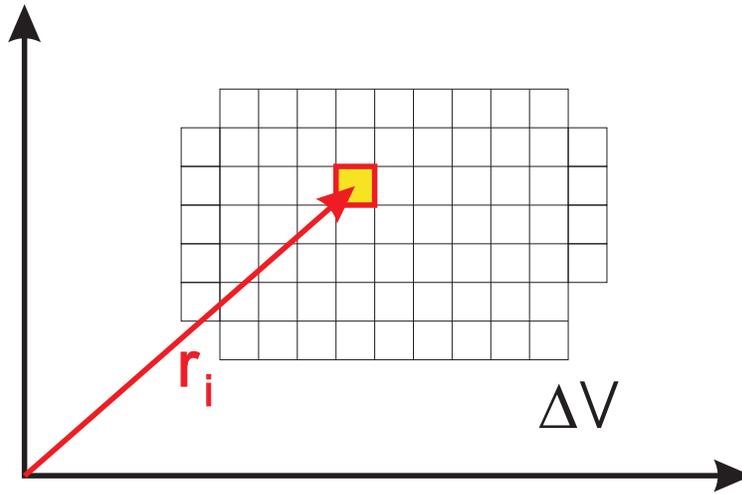


Abbildung 3.8: Teilvolumina  $\Delta V$  zur Berechnung z.B. des Schwerpunktsvektors  $\vec{R}$ . Hier wird speziell der Beitrag eines Elementes  $i$  an der Position  $\vec{r}_i$  betrachtet.

berechnen

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V, \\
 M &= m \sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V, \\
 \vec{R} &= \frac{m}{M} \sum_{i=1}^k \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) \Delta V.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dabei haben wir angenommen, dass die Massen aller Teilchen gleich sind  $m_\alpha = m$ . In diesem Fall ist es für viele Fälle geschickter, an Stelle der Teilchendichte die Massendichte

$$\tilde{\rho}(\vec{r}_i) = m\rho(\vec{r}_i) = \frac{mn_i}{\Delta V},$$

einzuführen. Diese ist auch in der Regel einfach zu bestimmen aus dem Quotienten Masse in einem Volumen  $\Delta V$  dividiert durch dieses Volumen.

Eine solche Aufteilung oder Diskretisierung des Volumens ist aber problematisch, wenn sich die Teilchendichte sehr stark mit dem Ort  $\vec{r}_i$  ändert. In diesem Fall müsste man sehr viele und sehr kleine Teilvolumina definieren, die Kantenlängen würden infinitesimal klein:

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad \rightarrow \quad dV = dx dy dz$$

Aus der Summe wird dann ein Integral über die drei Raumrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  wie z.B. bei der Summe in (3.30):

$$\sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}) dz \right] dy \right] dx.$$

Als ein erstes einfaches Beispiel für die Berechnung eines solchen Volumenintegrals betrachten wir den Fall, dass die Massenteilchen auf das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  beschränkt sind. Die Funktion der Teilchendichte ist also definiert durch

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit können wir das Integral aus (3.2) berechnen:

$$\begin{aligned} \iiint \rho dV &= \int_0^a \left[ \int_0^b \left[ \int_0^c \rho_0 dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_0^a \left[ \int_0^b \rho_0 c dy \right] dx \\ &= \rho_0 abc = \rho_0 V \end{aligned}$$

Die Teilchenzahl ergibt sich also als Produkt der konstanten Teilchenzahldichte  $\rho$  und dem Volumen  $V$  des Quaders, ein Ergebnis, das offensichtlich richtig ist. Ganz ähnlich können wir nun auch den Vektor des Schwerpunktes dieses Quaders berechnen. Als Beispiel betrachten wir hier die Berechnung der  $x$ -Komponente dieses Schwerpunktvektors und berechnen dazu:

$$\begin{aligned} m \iiint x \rho dV &= m \int_0^a \left[ x \int_0^b \left[ \int_0^c \rho_0 dz \right] dy \right] dx \\ &= m \int_0^a x \rho_0 b c dx \\ &= m \rho_0 \frac{a^2}{2} b c = m \rho_0 V \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Entsprechende Ergebnisse erhält man für die beiden anderen Komponenten, so dass der Vektor des Schwerpunktes gegeben ist durch

$$\vec{R} = \frac{m}{m \rho_0 V} \iiint \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho dV = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

ein Ergebnis, das natürlich auch unseren Erwartungen entspricht.

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir eine Teilchenverteilung, die eine konstante Dichte innerhalb des Volumens eines Zylinders besitzt. In diesem Fall ergibt sich

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } 0 \leq z \leq c, 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen wir das Volumenintegral für diese Dichteverteilung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \iiint \rho dV &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^c dz \rho_0 \\
 &= c\rho_0 \int_{-R}^R dx 2\sqrt{R^2-x^2} \\
 &= 2c\rho_0 R^2 \int_{-1}^1 dx' \sqrt{1-x'^2} \\
 &= 2c\rho_0 R^2 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x) \right]_{-1}^1 \\
 &= \rho_0 c \pi R^2 = \rho_0 V
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

wobei wir  $c\pi R^2$  als Volumen des Zylinders  $V$  identifiziert haben. Einfacher kann man diese Rechnung in Zylinderkoordinaten durchführen. Dazu müssen wir allerdings zunächst das Volumenelement  $dV$  in Zylinderkoordinaten bestimmen. Dies ergibt sich aus dem Produkt der 3 Vektoren

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} di$$

wo die Ableitung des Ortsvektors  $\vec{r}$  nach jeweils einer der 3 Koordinaten berechnet wird (die beiden anderen Koordinaten werden festgehalten) und das Ergebnis dann mit dem Differenzial dieser koordinate  $di$  multipliziert wird. Als Beispiel betrachten wir für den Fall der Zylinderkoordinaten, wo ja der Ortsvektor dargestellt wird durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

den Vektor  $d\vec{r}_\varphi$ , der ja die infinitesimale Änderung des Ortsvektors beschreibt, wenn sich der Azimuthwinkel  $\varphi$  infinitesimal ändert. Dieser berechnet sich nach (3.2) für  $i = \varphi$  zu

$$d\vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = r \hat{e}_\varphi d\varphi.$$

Dabei haben wir wieder auf die Einheitsvektoren  $\hat{e}_\varphi$  der Zylinderkoordinaten zurückgegriffe, die wir ja bereits bei der Definition der Zylinderkoordinaten eingeführt hatten. Entsprechende Rechnungen für die anderen beiden Vektoren  $d\vec{r}_i$  liefern:

$$d\vec{r}_r = \hat{e}_r dr \quad \text{und} \quad d\vec{r}_z = \hat{e}_z dz.$$

Alle drei Vektoren stehen also senkrecht aufeinander. Deshalb ergibt sich für das Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$dV = r dr d\varphi dz$$

Bevor wir dieses Volumenelement in Rechnungen benutzen, zunächst noch 2 Anmerkungen zum Faktor  $r$  in diesem Volumenelement. Einerseits ist natürlich klar, dass ein Volumenelement  $drd\varphi dz$  nicht richtig sein kann, da ein solches Element lediglich die Dimension

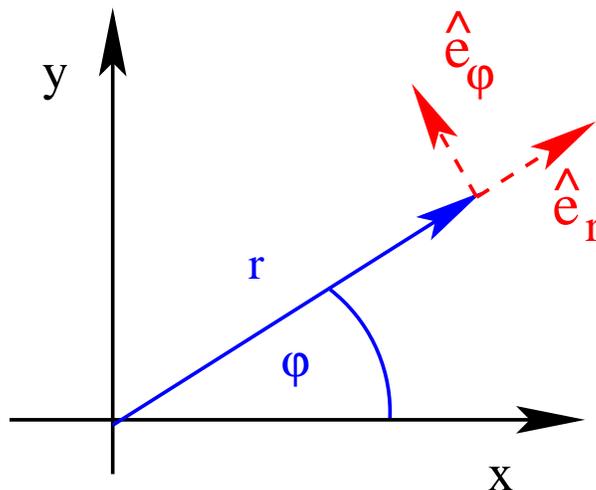


Abbildung 3.9: Darstellung eines Vektor in Zylinderkoordinaten und zugehörige Basisvektoren. Diskussion im Text.

einer Länge zum Quadrat (also z.B. Meter zum Quadrat  $m^2$ ) besäße, was aber die Dimension einer Fläche und nicht eines Volumens wäre (Winkel  $\varphi$  werden ja in dimensionslosen Einheiten gemessen). Der Faktor  $r$  in (3.2) “sorgt” also dafür, dass  $dV$  die richtige Dimension ( $m^3$ ) eines Volumens besitzt. Diesen Faktor  $r$  können wir aber auch geometrisch verstehen. Dazu betrachten wir die Skizze der Abb. 3.9. Es ist klar, dass eine Verschiebung des Ortes  $\vec{r}$  durch eine Vergrößerung des Winkels  $\varphi$  in Richtung des Basisvektors  $\hat{e}_\varphi$  erfolgt. Die Länge der Strecke, die die Spitze des Ortsvektors dabei zurücklegt ist proportional zu der Änderung des Winkels  $d\varphi$  aber auch proportional zum Abstand vom Koordinatenursprung  $r$ . Insgesamt ergibt das Produkt  $dr$  mal  $rd\varphi$  eine infinitesimale Fläche der Form, wie sie durch die gestrichelten Vektoren in Abb. 3.9 angedeutet ist. Multipliziert man diese Fläche noch mit einem Vektorelement  $dz$  senkrecht zur dargestellten Ebene, so ergibt sich das gesamte Volumenelement  $dV$ .

Wir diskutieren hier nur die Rechenregeln für Volumenelemente im 3-dimensionalen Raum für den Fall, dass die Basisvektoren der betrachteten Koordinatensysteme  $\hat{e}_i$  ein orthogonales Basissystem bilden. Allgemein ergeben sich Volumenelemente bei der Transformation von den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  auf Koordinaten  $u, v, w$  durch die Beziehung

$$dx dy dz = \left| \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \right| du dv dw .$$

Dabei steht der Ausdruck zwischen den Betragstrichen für den Betrag der sogenannten Jakobideterminante.<sup>4</sup> Wir werden dies später in dieser Vorlesung behandeln.

Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten und dem zugehörigen Volumenelement aus (3.2) kann man das Volumenintegral aus (3.31) einfacher berechnen mit

$$\begin{aligned} \iiint \rho dV &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c dz \rho_0 \\ &= \rho_0 c 2\pi \frac{1}{2} R^2 = \rho_0 V , \end{aligned} \tag{3.32}$$

<sup>4</sup>siehe z.B.: H. Fischer, H. Kaul: *Mathematik für Physiker I*, 23, oder Bronstein - Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, 3.1.11

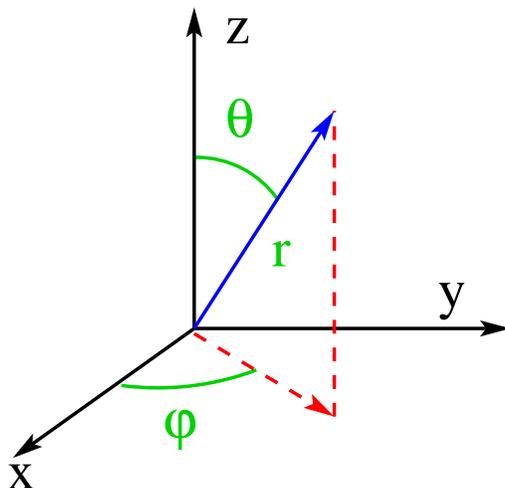


Abbildung 3.10: Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten.

was natürlich das identische Ergebnis wie in (3.31) ist.

In vielen Anwendungen sind jedoch die Kugelkoordinaten noch geeigneter als die hier diskutierten Zylinderkoordinaten. Die geometrische Bedeutung der Winkelvariablen  $\vartheta$  (der Winkel zwischen dem Vektor  $\vec{r}$  und der  $z$ -Achse) und  $\varphi$  (der Winkel, den die Projektion von  $\vec{r}$  auf die  $xy$ -Ebene mit der  $x$ -Achse bildet) ist in Abb. 3.10 dargestellt.

Daraus ergibt sich für die Darstellung des Vektors in Kugelkoordinaten die Form

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Für eine vollständige Abdeckung des Raumes überstreicht der Winkel  $\vartheta$  den Bereich  $[0, \pi]$  und der Winkel  $\varphi$  nimmt Werte aus  $[0, 2\pi]$  an. Mit diesen Definitionen und den oben skizzierten Rechenregeln berechnet sich das Volumenelement in Kugelkoordinaten zu

$$dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

und ein Volumenintegral schreibt etwa über eine Kugel mit dem Radius  $R$  schreibt sich:

$$\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

In diesem dreifachen Integral betrachten wir speziell die Integration über den Winkel  $\vartheta$  und definieren

$$\chi = \cos \vartheta.$$

Daraus ergibt sich

$$d\chi = \frac{d\chi}{d\vartheta} d\vartheta = -\sin \vartheta d\vartheta$$

Das zweite Integral aus (3.2) kann also umgeschrieben werden auf die Form

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = - \int_{\cos(0)}^{\cos \pi} d\chi = \int_{-1}^1 d\chi$$

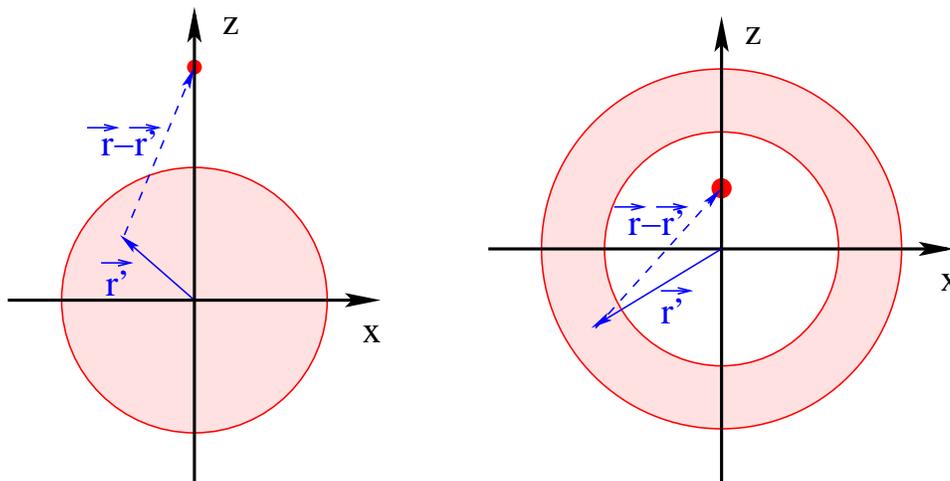


Abbildung 3.11: Berechnung des Gravitationspotenzials einer kugelförmigen Massenverteilung auf ein Teilchen auf der  $z$ -Achse (links) und für ein Teilchen innerhalb einer Massenschale (rechtes Teilbild).

womit das Volumenintegral von (3.2) die Gestalt annimmt

$$\int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

was für viele Rechnungen eine sehr geeignete Darstellung ist. Das einfachste Beispiel ist es wohl, das Volumen der Kugel zu berechnen mit

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi.$$

Als eine erste physikalisch motivierte Anwendung betrachten wir jetzt die Berechnung des Gravitationspotenzials einer ausgedehnten kugelförmigen Masse mit Radius  $R$  und konstanter Dichte auf eine Testmasse  $\mu$ , die ausserhalb dieser Masse an der Position  $\vec{r}$  liegt (siehe linkes Teilbild der Abb. 3.11). Dies ist ein Modell z.B. für die Anziehung, die die Erde (die ja sicher keine Punktmasse ist) auf den Probekörper  $\mu$  ausübt. Dazu betrachten wir zunächst einmal den Beitrag, den ein infinitesimales Volumenelement  $dV'$  an der Position  $\vec{r}'$  dazu leistet. Dieser Beitrag ist gegeben durch

$$\delta U(\vec{r}) = -\frac{\gamma \mu \tilde{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Dabei steht  $\tilde{\rho}(\vec{r}')$  für die Massendichte an der Stelle  $\vec{r}'$ , so dass  $\tilde{\rho} dV'$  gleich der Masse im Volumen  $dV'$  ist und  $\gamma$  bezeichnet die Newtonsche Gravitationskonstante. Berechnet man nämlich z.B. die  $x$ -Komponente der zu diesem Potenzial zugehörige Kraft

$$\begin{aligned} \delta F_x(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma \mu \tilde{\rho} dV'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ &= -\frac{\gamma \mu \tilde{\rho} dV'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} (x-x') \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die  $y$ - und die  $z$ -Komponente, so dass insgesamt

$$\delta\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\delta U(\vec{r}) = -\frac{\gamma\mu\tilde{\rho}dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

also eine Kraft entsteht, eine Anziehung des Punktteilchens  $\mu$  zur Teilmasse  $\rho dV'$  an der Position  $\vec{r}'$ . Addieren wir nun all diese infinitesimalen Beiträge  $\delta U$  der Volumenelemente  $dV'$  in (3.2) auf, so ergibt sich das gesamte Potenzial durch das Volumenintegral

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= -\int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 d\chi' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\gamma\mu\tilde{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= -\int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 d\chi' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\gamma\mu\tilde{\rho}(\vec{r}')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\chi'}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

In der zweiten Zeile dieser Gleichung nehmen wir an, dass das Koordinatensystem so ausgerichtet ist, dass die Testmasse  $\mu$  auf der  $z$ -Achse liegt. Damit wird der Kosinus des Winkels zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  gleich der Integrationsvariablen  $\chi' = \cos(\vartheta')$ . Das Integral über den Azimutwinkel  $\varphi$  liefert den Faktor  $2\pi$ . Ausserdem benutzen wir

$$\int_{-1}^1 d\chi' \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\chi'}} = -\frac{\sqrt{(r-r')^2} - \sqrt{(r+r')^2}}{rr'},$$

Für den hier relevanten Fall  $r > r'$  ist dieses Integral gerade  $2/r$ . Damit ergibt sich insgesamt für das Integral in (3.33)

$$U(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{r}\gamma\mu\tilde{\rho} \int_0^R r'^2 dr' = -\gamma\mu\tilde{\rho} \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{r} = -\frac{\gamma\mu M}{r}$$

also gerade das Potenzial einer Punktmasse der Masse  $M$  (gleich dem Produkt aus Massendichte  $\tilde{\rho}$  und dem Volumen der Kugel mit Radius  $R$ ) im Koordinatenursprung also im Zentrum der kugelförmigen Masse. Damit haben wir also jetzt bestätigt, dass wir die Gravitationsanziehung der Erde durch das der entsprechenden Punktmasse im Zentrum der Erde beschreiben können, so lange wir uns auf Teilchen beschränken, die sich ausserhalb des Erdradius bewegen.

Welche Gravitationskraft spüren aber Teilchen, die sich im Inneren der Erde befinden. Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir nun die Berechnung des Gravitationspotenzials einer kugelförmigen Massenschale auf das Teilchen  $\mu$ , das sich im inneren Hohlraum dieser Massenschale befindet (rechtes Teilbild von Abb. 3.11). Auch in diesem Fall betrachten wir das gleiche Volumenintegral, wir müssen aber die Integration über die radiale Koordinate  $r'$  auf den Bereich zwischen dem Radius der inneren Hohlkugel  $R_i$  und dem Aussenradius  $R_a$  umschreiben. Ausserdem müssen wir natürlich für das Integral (3.2) annehmen, dass  $r' > r$  ist, was zu einem Ergebnis für dieses Integral von  $2/r'$  führt. Damit erhalten wir also in diesem Fall ein Potenzial der Form

$$U(\vec{r}) = -4\pi\gamma\mu\tilde{\rho} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r'^2}{r'} dr'.$$

Es ist nicht erforderlich dieses Integral weiter auszuwerten. Wir sehen, dass der Wert nicht von der Position  $\vec{r}$  des Teilchens  $\mu$  abhängt. Die Kraft, berechnet als negativer

Gradient des Potentials ist also identisch Null. Die Beiträge der verschiedenen Teilmassen der Kugelschale zur Gesamtkraft auf die Testmasse im Inneren heben sich also gerade gegenseitig auf.

Betrachten wir nun also den allgemeinen Fall, dass sich unser Testteilchen  $\mu$  an einer beliebigen Position in einer Massenverteilung  $\tilde{\rho}$  mit kugelförmiger Symmetrie befindet. Die Bereiche der Massenverteilung, die einen Abstand vom Zentrum dieser Kugel haben, die größer ist als der Abstand  $r$  des Teilchens  $\mu$  tragen, wie wir gerade gezeigt haben, nicht zur Gravitationskraft bei. Der Anteil der Massenverteilung, der innerhalb der Kugel mit dem Radius  $r$  liegt, wir bezeichnen ihn mit der Massenfunktion  $M(r)$  übt eine Kraft aus, als ob diese Masse  $M(r)$  im Zentrum der Kugel, also im Koordinatenursprung läge. Wir erhalten also mit diesen Bezeichnungen für die resultierende Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\gamma\mu M(r)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Nimmt man an, dass unser ausgedehnter Körper eine konstante Dichte für  $0 \leq r' \leq R$  besitzt, die ausserhalb des Radius  $R$  direkt auf Null absinkt, so ergibt sich für  $M(r)$

$$M(r) = \begin{cases} \frac{M r^3}{R^3} & \text{für } r \leq R \\ M & \text{für } r > R \end{cases}$$

Damit ergibt sich also für den Betrag der Kraft als Funktion von  $r$

$$F(r) = \begin{cases} \frac{\gamma\mu M}{R^3} r & \text{für } r \leq R \\ \frac{\gamma\mu M}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

Eine interessante Anwendung ergibt sich, wenn wir annehmen, dass die Massenverteilung einer Galaxie kugelförmig ist. Sterne in dieser Galaxie würden also durch die Anziehung ihrer Mitsterne, eine anziehende Kraft auf das Zentrum der Galaxie von der Form (3.2) spüren. Dabei ist  $r$  der Abstand des jeweiligen Sterns von diesem Zentrum. Ist die Galaxie in einem stabilen Zustand, so werden sich die Sterne auf Ellipsen um das Zentrum bewegen (genau so wie die Planeten um die Sonne). Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass es sich hier um Kreisbahnen handelt, bei denen die Anziehung der Gravitation durch die Zentripetalkraft kompensiert wird:

$$\mu r \dot{\varphi}^2 = \gamma\mu \frac{M(r)}{r^2}.$$

Für die Geschwindigkeit der Sterne auf ihrer Bahn ergibt sich also

$$v^2 = r^2 \dot{\varphi}^2 = \gamma \frac{M(r)}{r}.$$

Wäre die Massendichte homogen, so sollte diese Geschwindigkeit proportional zu  $r$  ansteigen, am Rande der Galaxie aber dann mit  $1/\sqrt{r}$  abfallen. Man beobachtet auch den linearen Anstieg im Inneren der Galaxie, stellt aber fest, dass im Aussenbereich die Geschwindigkeit einen konstanten Wert  $v$  annimmt.

Diese Beobachtung wird als ein Indiz (neben anderen) für die Existenz der sogenannten dunklen Materie angenommen. Danach besteht der überwiegende Anteil der Materie, die

Gravitationskräfte auf Sterne und Galaxien ausübt, nicht aus Materie von uns bekannter Art (Materie von Sonnen, Planeten, ausgebrannte Sonnen, die zu schwarzen Löchern kollabiert sind ...) sondern eben aus dieser dunklen Materie, die sich nur durch die Gravitation bemerkbar macht. Ein Halo aus solch dunkler Materie um die leuchtenden Sterne einer Galaxie könnte diese Daten erklären.

Alternativ kann man diese Geschwindigkeiten auch mit einer modifizierten Newtonschen Gleichung beschreiben. Diese Parametrisierung hat den schönen Namen MOND für MODified Newtonian Dynamics<sup>5</sup>. Man nimmt dazu an, dass für sehr schwache Kräfte (unterhalb einer Minimalkraft) die bekannte Beziehung  $F = ma$  ersetzt werden muss durch

$$F = \beta ma^2.$$

Die Kraft ist also in diesem Fall proportional zur Beschleunigung  $a$  zum Quadrat. Für die Sterne am Rande einer Galaxie sollte die Anziehungskraft so gering sein, dass (3.2) anzuwenden ist. Aus der Beziehung (3.2) würde also

$$\mu\beta r^2 \dot{\phi}^4 = \gamma\mu \frac{M(r)}{r^2}.$$

was das Geschwindigkeitsverhalten erklären könnte. Der Ansatz (3.2) ist natürlich nur ein Versuch einer Parametrisierung eines beobachteten Effektes, keine wirkliche Theorie, mit der auch ganz andere Phänomene beschrieben würden. Vielleicht verbirgt sich aber hinter dieser Parametrisierung eine Theorie, die die Forderung nach der Existenz der dunklen Materie überflüssig machen könnte

---

<sup>5</sup>Eine allgemeinverständliche Darstellung dieser MOND Beschreibung findet sich in der Zeitschrift *Spektrum der Wissenschaften*, Oktober 2002

### 3.3 Stöße zwischen zwei Körpern

#### 3.3.1 Allgemeine Anmerkungen

Wir wollen im folgenden Abschnitt Stossprozesse zwischen zwei Körpern der Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  betrachten.

- Im "Anfangszustand" weit weg vom Stoßpunkt sollen die beiden Massen Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  bzw. Impulse  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  haben.
- die beiden Körper sollen dann aufeinander zufliegen und wie in Abb. 3.12 skizziert miteinander stoßen.

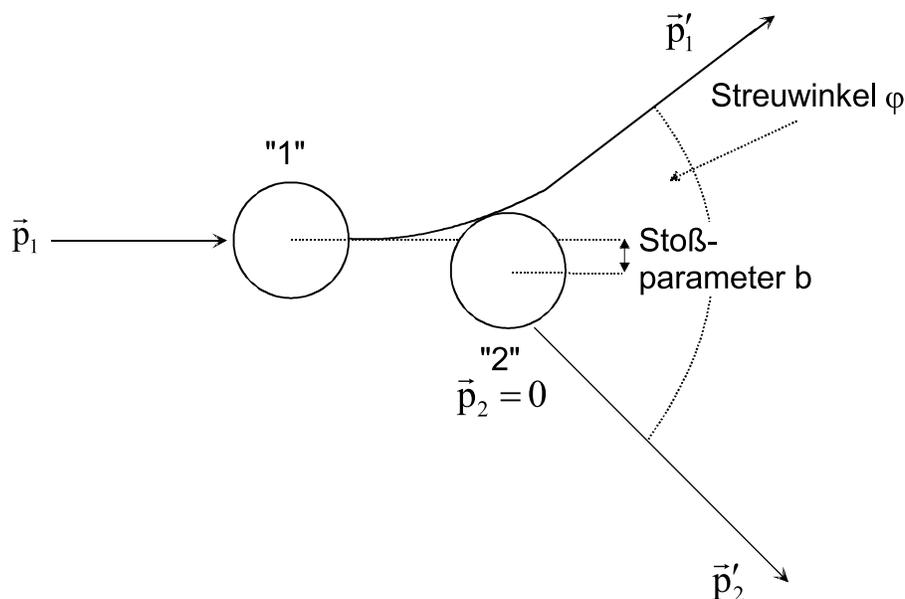


Abbildung 3.12: *Stoß zwischen zwei Körpern: Schematische Darstellung*

- nach dem Stoß entfernen sich die beiden Massen wieder voneinander und haben im "Endzustand" weit weg vom Stoßpunkt die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$  bzw. Impulse  $\vec{p}_1', \vec{p}_2'$ .

Man kann sich in Bezug auf den obigen Prozess eine Reihe von Grundfragen stellen wie etwa:

1. wie ist bei gegebenem Anfangszustand (gegeben etwa durch die Impulse  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  und dem Stoßparameter  $b$ , der den Abstand angibt, an dem Körper 1 ohne Wechselwirkung am Körper 2 vorbeifliegen würde) der Ablenkwinkel der beiden Teilchen bzw. wo treffen die Körper auf?
2. Wie war bei bekanntem Endzustand der Anfangszustand?

3. wie war bei bekannten Anfangs- und Endzuständen die Art der Wechselwirkung zwischen den beiden Körpern; welche Art Körper bzw. Teilchen lagen vor?
4. Wie war die Energie und Masse des einfallenden Teilchens?
5. Welche innere Energie wurde an die Körper übertragen?

Fragestellung 1. ist z. B. beim Billiard interessant, Fragestellung 2 bei der Ermittlung des Schuldigen bei einem Autounfall.

Die Fragestellungen 3 und 4 sind insbesondere in der Kern- und Teilchenphysik von großen Interesse. Man untersucht Teilchen der Größe eines Atomkerns und darunter oft dadurch, dass man Ausgangsteilchen wie Elektronen oder Protonen (aber auch schwerere Teilchen) mit bekanntem Impuls und bekannter Energie auf die Atomkerne eines "Targets" schießt. In einigen Fällen lässt man auch gegenläufige Elektronen- oder Protonenstrahlen gegeneinanderprallen.

Ein frühes Experiment wurde beispielsweise von Rutherford, Geiger und Marsden 1910 durchgeführt. Sie bestrahlten Atomkerne mit " $\alpha$ -Teilchen" (He-Kernen) und stellten fest, dass diese Teilchen die Atome nahezu ungehindert durchdringen. Die beobachteten Ablenkungswinkel zeigten im Widerspruch zur gängigen Vorstellung über Atome, dass praktisch die gesamte Masse des Atoms in einem sehr kleinen Kern konzentriert war.

Bei sehr hochenergetischen Stoßprozessen muss keineswegs die Zahl der Teilchen konstant bleiben. Werden beispielsweise in großen Beschleunigeranlagen Protonenstrahlen sehr hoher Energie bis in den TeV-Bereich<sup>6</sup> gegeneinandergeschießt, so entstehen beim Stoß eine Vielzahl neuer Elementarteilchen oder auch angeregte Zustände bekannter Elementarteilchen. Die Untersuchung dieser Teilchen und der Wechselwirkung zwischen diesen Teilchen ist eines der wichtigen Themengebiete der Elementarteilchenphysik. Weitere Stoßprozesse, die hier genannt werden sollten, sind die zwischen sehr schweren Atomkernen ("Schwerionenreaktionen"), in denen beispielsweise neue Zustände der (Kern-)Materie erforscht werden. Bei diesen Reaktionen entsteht beim Stoß in der Regel eine sehr große Zahl von Teilchen. Unter geeigneten Bedingungen erlauben Stöße zwischen schweren Ionen aber auch die Erzeugung neuer Atomkerne und damit die Erweiterung des Periodensystems der Elemente zu immer schwereren Atomen.

Die Abb. 3.13 zeigt beispielhaft zwei Aufnahmen von Stößen eines  $\alpha$ -Teilchens bzw. eines Protons mit Atomkernen.

Fragestellung 5 ist beispielsweise im Bereich der Astronomie und der Astrophysik wichtig. Aus dem Weltall treffen ungeheuer energiereiche Teilchen (mit Energien bis zu  $10^{20}$  eV, entspricht einem schnellen Tennisball) auf die Atmosphäre und erzeugen dort in einer Kaskade von Stoßprozessen einen ganzen Schauer von Teilchen, der dann auf der Erde nachgewiesen werden kann. Eine wesentliche Fragestellung ist, woher diese Teilchen kommen bzw. welche Mechanismen sie auf ihre hohe Energie beschleunigt haben. Die Details solcher Stoßprozesse werden Sie in einer späteren Phase Ihres Studiums kennenlernen. An dieser Stelle wollen wir uns den Grundprinzipien der Stöße zwischen zwei Körpern widmen. Wir werden dabei sehr starken Gebrauch vom Impuls- und Energieerhaltungssatz machen und außerdem annehmen, dass die Zahl der beteiligten Körper erhalten bleibt.

---

<sup>6</sup>1 Elektronvolt = 1 eV =  $1.6 \cdot 10^{-19}$  J; dies ist die Energie, die ein Elektron beim Durchlaufen einer elektrischen Spannung von 1 Volt gewinnt

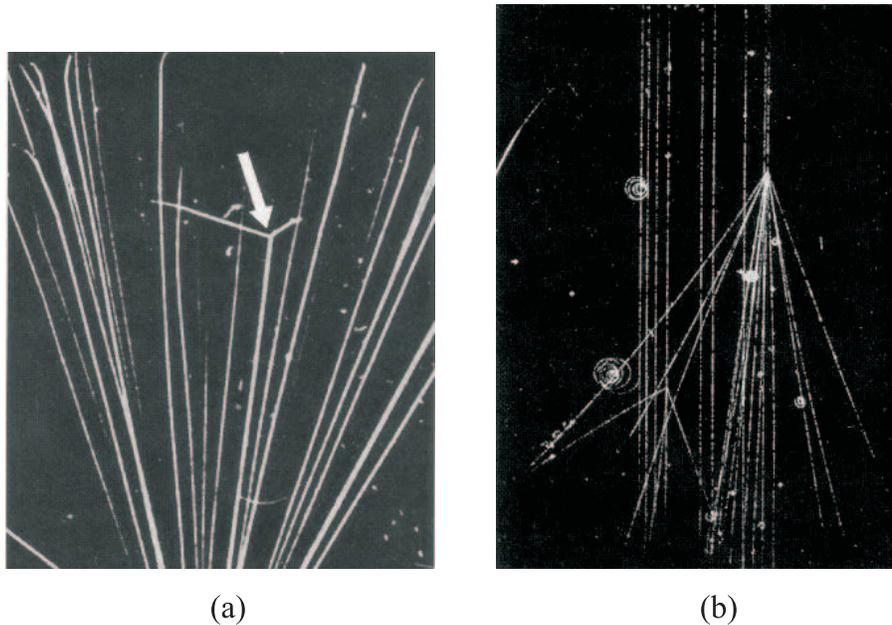


Abbildung 3.13: *Teilchenstöße in der Kernphysik: (a) Stoß eines  $\alpha$ -Teilches mit einem Kern (Pfeil) (b) Erzeugung von 12 Teilchen beim Stoß eines Protons (Energie: 24 GeV) mit einem Atomkern. Abb. 3.13a wurde in einer "Nebelkammer" angefertigt. In der Nebelkammer befindet sich ein wasserdampfgesättigtes Gas. Der Wasserdampf kondensiert entlang der Bahn ionisierender Teilchen. Abb. 3.13(b) wurde in einer Blasenkammer angefertigt. Sie enthält eine überhitzte Flüssigkeit, in der sich entlang der Teilchenbahnen Blasen bilden. (aus: Gerthsen Physik, 21. Auflage: (a) S. 840; (b) S. 849).*

Betrachten wir zunächst die **Impulserhaltung**.

Wenn ganz allgemein  $K$  Teilchen miteinander stoßen und nach dem Stoß  $N$  Teilchen auseinanderlaufen, so gilt:

$$\sum_{i=1}^K \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i' \quad (3.34)$$

Für den Fall von zwei stoßenden Teilchen, die beim Stoß intakt bleiben, reduziert sich dies zu:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.35)$$

Die **Energieerhaltung** müssen wir etwas genauer diskutieren. Betrachten wir hierzu ein System von  $N$  wechselwirkenden Massenpunkten, auf die ausschließlich konservative Kräfte wirken sollen.

Zunächst haben wir die gesamte **kinetische Energie** der Massenpunkte, die durch die Summe der kinetischen Energien aller Massenpunkte gegeben ist:

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} \quad (3.36)$$

Die Kraft auf das  $i$ -te Teilchen können wir wiederum zerlegen in eine äußere Kraft  $\vec{F}_i^{(a)}$  und eine innere Kraft  $\vec{F}_{ik}$ , die zwischen Teilchen  $i$  und Teilchen  $k$  wirkt. Das dritte Newtonsche Axiom verlangt:  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ .

Die äußeren Kräfte  $\vec{F}_i^{(a)}$  können wir nun aus Potentialen  $V_i^{(a)}(\vec{r}_i)$  via  $\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i V_i^{(a)}(\vec{r}_i)$  gewinnen. Der Gradient soll sich dabei auf die Koordinate des Teilchens  $i$  beziehen:

$$\vec{\nabla}_i V_i^{(a)} = \left( \frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) \quad (3.37)$$

Ganz entsprechend können wir auch die Kräfte  $\vec{F}_{ik}$  aus Potentialen  $V_{ik}$  gewinnen. Wir nehmen hierzu an, dass die  $V_{ik}$  von der Differenz der Koordinaten  $\vec{r}_i$  und  $\vec{r}_k$  abhängt:  $V_{ik} = V_{ik}(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ . Die Kraft  $\vec{F}_{ik}$  ergibt sich dann aus:  $\vec{F}_{ik} = -\vec{\nabla}_i V_{ik}(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ . Man beachte hierbei, dass  $V$  nur nach der Koordinate  $\vec{r}_i$  differenziert wird. Da das  $i$ -te Teilchen keine Kraft auf sich selbst ausübt, können wir verlangen:  $V_{ii} = 0$ . Außerdem wollen wir verlangen, dass  $V_{ik} = V_{ki}$  ist. Damit gilt:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{\nabla}_i V_{ik}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = -\vec{\nabla}_i V_{ki}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = +\vec{\nabla}_k V_{ki}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = -\vec{F}_{ki} \quad (3.38)$$

Die Beziehung  $\vec{\nabla}_i V_{ki}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = -\vec{\nabla}_k V_{ki}(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$  ergibt sich, da  $V_{ki}$  von der Differenz  $\vec{r}_i - \vec{r}_k$  abhängt und daher die Differentiation nach  $\vec{r}_k$  ein negatives Vorzeichen liefert.

Wir können damit die Gesamtenergie der  $N$  Massenpunkte schreiben als:

$$E = E_{kin} + V_{ges} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^N V_{ik}. \quad (3.39)$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  vor der Doppelsumme über  $i$  und  $k$  ist nötig, weil wir bei der Doppelsumme jedes Potential zwischen  $i$  und  $k$  doppelt zählen (nämlich vom Körper  $i$  aus und vom Körper  $k$  aus). Man macht sich dies leicht für zwei Massenpunkte klar, die durch eine Feder verbunden sind. Die potentielle Energie  $V_{ik} = \frac{1}{2}C(\vec{r}_i - \vec{r}_k)^2$  der Feder dürfen wir nur einmal zählen!

Wir werden im Folgenden Stoßprozesse bei Abwesenheit äußerer Kräfte, betrachten, d. h. Prozesse für die die äußeren Potentiale  $V_i^{(a)}$  gleich null (bzw. konstant<sup>7</sup>) sind. Wesentlich ist aber der Term  $\frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^N V_{ik}$ . Er besagt letztlich, dass die beiden Stoßpartner, die ja ihrerseits aus sehr vielen Atomen bestehen, beim Stoß innere Energie speichern oder evtl. auch freigeben können. Die Summe der kinetischen Energien der Stoßpartner vor dem Stoß ist also auch bei Abwesenheit äußerer Kräfte nicht notwendig gleich der Summe der kinetischen Energien nach dem Stoß. Gilt dies aber, so sprechen wir von einem **elastischen Stoß**:

$$\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^N \frac{p'_i{}^2}{2m_i} \quad (3.40)$$

Andernfalls sprechen wir von einem inelastischen Stoß. Speziell bewegen sich beim **vollkommen inelastischen Stoß** die Stoßpartner nach dem Stoß mit gleichem Impuls weiter (sie "kleben" z. B. zusammen).

Wir wollen nun zunächst

<sup>7</sup>Wir vergleichen Energien vor und nach dem Stoß. Konstante Terme sind daher nicht von Belang.

### 3.3.2 Eindimensionale Stöße

betrachten, bei der sich die Stoßpartner nur entlang einer Linie (z. B. der x-Koordinate) bewegen können.

Der einfachste Fall ist der Stoß eines Körpers der Masse  $m_1$  mit einem unendlich schweren, ruhenden Körper (einer Wand):

#### Stoß mit einer Wand

Diese Situation ist in Abb. 3.14 gezeigt.

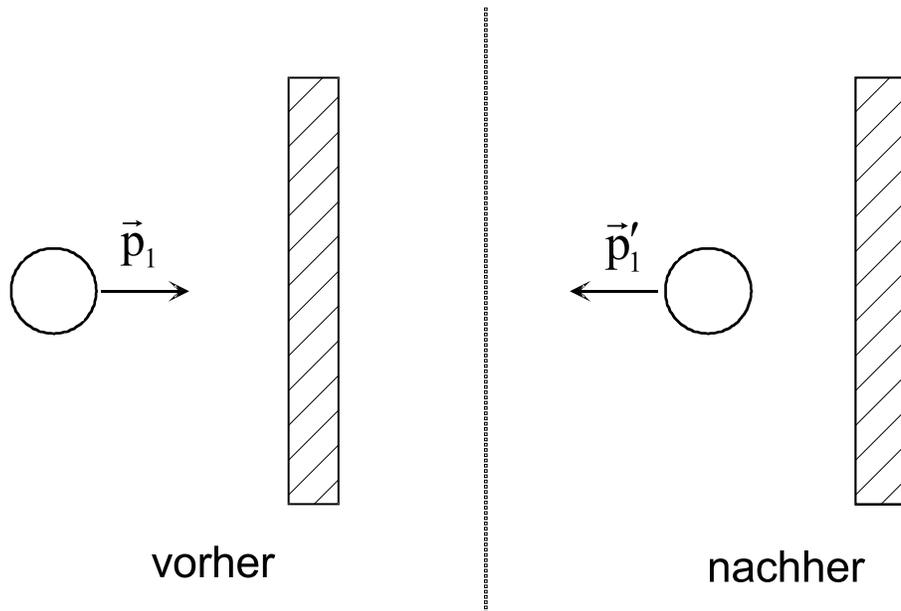


Abbildung 3.14: Ein Massenpunkt (Masse  $m_1$ ) stößt an eine Wand und wird an dieser reflektiert.

Für einen elastischen Stoß gilt:

$$E_{kin} = E'_{kin} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_{wand}^2}{2m_{wand}} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_{wand}'^2}{2m_{wand}} \quad (3.41)$$

Da die Wand unendlich schwer ist, ist  $\frac{p_{wand}^2}{2m_{wand}} = \frac{p_{wand}'^2}{2m_{wand}} = 0$ , d. h. es gilt:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} \quad (3.42)$$

Hieraus folgt:  $|p_1| = |p_1'|$ , bzw.  $p_1 = \pm p_1'$ .

Im Fall des Vorzeichens ”-“ wird der Massenpunkt an der Wand reflektiert. Im Fall des Vorzeichens ”+“ würde der Massenpunkt durch die Wand (z. B. durch ein Loch in der Wand!) hindurchlaufen.

Betrachten wir nun die Impulserhaltung<sup>8</sup>:

$$p_1 + p_{\text{wand}} = p'_1 + p'_{\text{wand}} \quad (3.43)$$

Aus der Energieerhaltung wissen wir im Fall der Reflexion:  $p_1 = -p'_1$ . Damit erhalten wir für  $p_{\text{wand}} = 0$ :  $p'_{\text{wand}} = 2p_1$ . Auf die Wand wird also durchaus Impuls übertragen. Die Geschwindigkeit der (unendlich schweren) Wand nach dem Stoß ist aber gleich 0:  $v' = p'_{\text{wand}}/m_{\text{wand}} = 0$ , wie zu erwarten war.

Im Fall eines inelastischen Stoßes ist  $|p_1| \neq |p'_1|$ . Speziell bleibt beim vollkommen inelastischen Stoß der Massenpunkt an der Wand kleben und verliert dabei vollständig seinen Impuls und seine kinetische Energie.

Die nächste Situation, die wir betrachten wollen, ist ein

### Elastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten endlicher Masse $m_1$ und $m_2$

Die beiden Massen sollen zunächst mit entgegengesetzten Impulsen  $p_1$  und  $p_2$  aufeinander zukommen, d. h. es gelte:  $p_1 = -p_2$  (s. Abb. 3.15) .

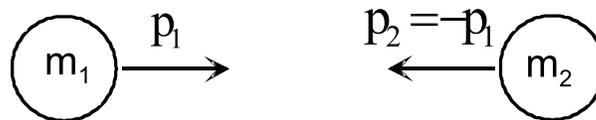


Abbildung 3.15: Eindimensionaler elastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten, die mit entgegengesetzten Impulsen aufeinander zufliegen.

Für den Gesamtimpuls gilt:  $P = p_1 + p_2 = 0$ . Damit ist die Schwerpunktsgeschwindigkeit  $v_s = \frac{P}{m_1 + m_2} = 0$ .

Der Schwerpunkt ruht also bei diesem speziellen Stoß.

Impulserhaltung:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 = 0 \quad (3.44)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2} \quad (3.45)$$

Aus 3.44 folgt:

$$p_1 = p_2 \quad \text{und} \quad p'_1 = -p'_2. \quad (3.46)$$

Aus 3.45 folgt dann:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_1^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_1}{2m_2}. \quad (3.47)$$

Hierbei haben wir unter Benutzung von  $p_1 = -p_2$  und  $p'_1 = -p'_2$  die Impulse  $p_2$  und  $p'_2$  eliminiert.

<sup>8</sup>Wir verzichten bei den eindimensionalen Stößen auf die Vektorpfeile.

Wir erhalten dann:

$$\frac{p_1^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_1'^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (3.48)$$

oder mit der reduzierten Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ :

$$\frac{p_1^2}{2\mu} = \frac{p_1'^2}{2\mu} \quad \text{bzw.} \quad |p_1| = |p_1'| \quad (3.49)$$

Alle Impulse sind damit vom Betrag her gleich. Der Fall  $p_1' = -p_1$  entspricht gerade der Reflexion, der Fall  $p_1' = p_1$  bedeutet, dass die beiden Massen ohne Wechselwirkung aneinander vorbeilaufen.



Abbildung 3.16: *Eindimensionaler elastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten; Masse  $m_2$  ruht.*

Nun ruhe die Masse  $m_2$  vor dem Stoß, d. h.  $p_2 = 0$  (s. Abb. 3.16) Impulserhaltung:

$$p_1 = p_1' + p_2' \quad (3.50)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad (3.51)$$

Wir lösen 3.50 nach  $p_2'$  auf und quadrieren:

$$p_2'^2 = (p_1 - p_1')^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \quad (3.52)$$

Einsetzen in 3.51 und Multiplikation mit  $2m_2$  ergibt:

$$p_2'^2 = (p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1') + \frac{m_1}{m_2} p_2'^2 \quad (3.53)$$

oder:

$$p_2'^2 \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = 2p_1 p_1' \quad (3.54)$$

Falls  $p_2' \neq 0$  ist (der Fall  $p_2' = 0$  bedeutet wiederum, dass keine Wechselwirkung vorlag), folgt hieraus:  $p_2' \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = 2p_1$  oder:

$$p_2' = \frac{2p_1}{1 + m_1/m_2} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \quad (3.55)$$

Setzen wir dies in (I) ein, so erhalten wir  $p'_1$  als Funktion von  $p_1$ :

$$p'_1 = p_1 - p'_2 = p_1 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}p_1 = p_1 \left(1 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}p_1 \quad (3.56)$$

Für die entsprechenden Geschwindigkeiten ergibt sich:

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{p'_2}{m_2} = \frac{2}{m_1 + m_2}m_1v_1 = \frac{2m}{m_1 + m_2}v_1 \\ v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \end{aligned}$$

Wir wollen diese Ausdrücke nun für verschiedene Grenzfälle diskutieren:

1.  $m_2 \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} p'_2 &\rightarrow 2p_1 & v'_2 &\rightarrow 0 \\ p'_1 &\rightarrow -p_1 & v'_1 &\rightarrow -v_1 \end{aligned}$$

Dieser Grenzfall entspricht genau dem schon besprochenen elastischen Stoß mit einer Wand.

2.  $m_2 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} p'_2 &\rightarrow \frac{2m_2}{m_1}p_1 \rightarrow 0 & v'_2 &\rightarrow 2v_1 \\ p'_1 &\rightarrow p_1 & v'_1 &\rightarrow v_1 \end{aligned}$$

In diesem Grenzfall stößt ein sehr schwerer Körper elastisch mit einem sehr leichten. Impuls und Geschwindigkeit des schweren Körpers ändern sich praktisch nicht, der leichte wird dagegen auf die doppelte Geschwindigkeit des stoßenden Körpers beschleunigt.

3.  $m_1 = m_2$ :

$$\begin{aligned} p'_2 &= p_1 & v'_2 &\rightarrow v_1 \\ p'_1 &= 0 & v'_1 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis mag etwas überraschen. Die stoßende Masse kommt zur Ruhe, die vor dem Stoß ruhende Masse läuft mit dem Impuls bzw. der Geschwindigkeit der stoßenden Masse weiter. Die beiden Massen gaben gewissermaßen ihre Rolle getauscht.

*Dieser Grenzfall, aber auch die Fälle  $m_1 = 2m_2, m_2 = 2m_1$  werden auf der Luftkissenbahn vorgeführt.*

Für  $m_1 = 2m_2$  (schwerer Wagen auf leichten) gilt dabei:

$$p'_2 = \frac{4}{3}p_1 \quad v'_2 = \frac{2}{3}v_1 \quad p'_1 = -\frac{1}{3}p_1 \quad v'_1 = -\frac{1}{3}v_1$$

Für  $2m_1 = m_2$  (leichter Wagen auf schweren) gilt:

$$p'_2 = \frac{4}{3}p_1 \quad v'_2 = \frac{2}{3}v_1 \quad p'_1 = -\frac{1}{3}p_1 \quad v'_1 = -\frac{1}{3}v_1$$

Allgemeiner elastischer Stoß, Massen  $m_1, m_2$ , Impulse  $p_1, p_2$  (s. Abb. 3.17)



Abbildung 3.17: Eindimensionaler elastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten (allgemeiner Fall)

Wir wollen zunächst **vom Laborsystem in das Schwerpunktsystem** übergehen, in dem der Schwerpunkt der beiden Stoßpartner ruht. Hierzu müssen wir offensichtlich von jeder Geschwindigkeit (d. h. von  $v_1, v'_1, v_2, v'_2$ ) gerade die **Geschwindigkeit**  $\mathbf{v}_s = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$  **des Schwerpunkts abziehen**.

Wir wollen die verschiedenen Größen **im Schwerpunktsystem** (SPS) mit einem Index "s" kennzeichnen. Damit erhalten wir:

Impulserhaltung:

$$p_1^s + p_2^s = p_1'^s + p_2'^s = 0. \quad (3.57)$$

Energieerhaltung:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{(p_i^s)^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{(p_i'^s)^2}{2m_i}. \quad (3.58)$$

Aus 3.57 folgt:

$$p_1^s = -p_2^s \quad \text{und} \quad p_1'^s = -p_2'^s. \quad (3.59)$$

Mit 3.58 folgt weiter, wenn wir hier  $p_1^s = -p_2^s$  und  $p_1'^s = -p_2'^s$  einsetzen:

$$p_1^s = \pm p_1'^s \quad \text{und} \quad p_2^s = \pm p_2'^s. \quad (3.60)$$

Hierbei bedeutet das Vorzeichen "+" wiederum, dass keine Wechselwirkung stattfand.

Im anderen Fall sehen wir, dass alle Impulse gleichen Betrag haben, wobei die Impulse der einlaufenden wie der auslaufenden Teilchen gegeneinander gerichtet sind.

Für die Geschwindigkeiten im SPS gilt dann:  $v_1^s = -v_1'^s$  und  $v_2^s = -v_2'^s$ .

Wir übertragen jetzt dieses Ergebnis **vom Schwerpunktsystem auf das Laborsystem**. Hierzu müssen wir zu jeder der Geschwindigkeiten des SPS (d. h.  $v_1^s, v_2^s, v_1'^s, v_2'^s$ ) die **Geschwindigkeit**  $\mathbf{v}_s$  **des Schwerpunkts** wieder **hinzuaddieren**.

Wir erhalten:  $v_1' = v_1'^s + v_s = -v_1^s + v_s = -(v_1 - v_s) + v_s = 2v_s - v_1$ .

Hierbei haben wir zunächst das Ergebnis  $v_1'^s = -v_1^s$  dann  $v_1^s = v_1 - v_s$  benutzt.

Wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} v'_1 &= 2v_s - v_1 = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = \frac{2m_1v_1 + 2m_2v_2 - m_1v_1 - m_2v_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 3m_2v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ganz analog erhält man:

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 3m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.62)$$

Damit konnten wir durch die Transformation Laborsystem  $\rightarrow$  Schwerpunktsystem, lösen der Gleichungen im Schwerpunktsystem und anschließende Rücktransformation ins Laborsystem sehr leicht die resultierenden Impulse und Geschwindigkeiten im Laborsystem bestimmen. Wir hätten selbstverständlich Impuls- und Energieerhaltung direkt im Laborsystem erhalten können. Die entsprechenden Rechnungen wären aber wesentlich aufwändiger gewesen.

Wir behandeln jetzt den

**Vollkommen inelastischen Stoß zwischen zwei Massenpunkten  $m_1$  und  $m_2$  (s. Abb. 3.18)**

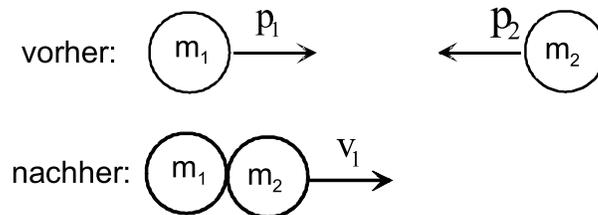


Abbildung 3.18: *Vollkommen inelastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten*

Beim vollkommen inelastischen Stoß bewegen sich die beiden Massen nach dem Stoß gemeinsam mit der Geschwindigkeit  $v'_1 = v'_2 = v'$ . Nach wie vor gilt die Impulserhaltung:  $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$

Wir haben damit  $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$ :

oder:

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.63)$$

was genau der Ausdruck für die Schwerpunktschwindigkeit ist. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da sich ja die beiden Massen nach dem Stoß zusammen bewegen. Speziell gilt im Schwerpunktsystem:  $v' = 0$ , d. h. die beiden Massen fliegen mit entgegengesetztem Impuls aufeinander zu und ruhen dann.

Auf der Luftkissenbahn demonstrieren wir diese Effekte mit Massen  $m_1 = m_2$ , sowie  $m_1 = 2m_2$  und  $m_2 = 2m_1$ .

Für die kinetischen Energien gilt im Schwerpunktsystem:

vor dem Stoß:

$$E_{kin}^s = \frac{(p_1^s)^2}{2m_1} + \frac{(p_2^s)^2}{2m_2} = (p_1^s)^2 \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = \frac{(p_1^s)^2}{2\mu} \quad (3.64)$$

nach dem Stoß:

$$E'_{kin}{}^s = 0 \quad (3.65)$$

Im Schwerpunktsystem geht also die gesamte kinetische Energie verloren.

Im Laborsystem, mit  $p_2 = 0$  gilt:

vor dem Stoß:

$$E_{kin} = \frac{p_1^2}{2m_1} \quad (3.66)$$

nach dem Stoß:

$$E'_{kin} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_s^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{p_1^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (3.67)$$

Die Differenz der beiden Energien geht verloren. Für  $m_1 = m_2$  ist das gerade 50% von  $E_{kin}$ . Für  $m_1 \gg m_2$  erhalten wir  $E'_{kin} = E_{kin}$ , d. h. praktisch keinen Verlust an kinetischer Energie. Für  $m_2 = m_1$  ist  $E'_{kin} \approx \frac{m_1}{m_2} E_{kin} \approx 0$ , d. h. wir erhalten einen praktischen vollständigen Verlust der kinetischen Energie. Die beiden letzten Grenzfälle entsprechen der Situation eines fahrenden Autos, das eine ruhende Fliege prallt, bzw. der Situation eines ruhenden Autos, gegen das eine Fliege prallt. Im ersten Fall erwarten wir keine Änderung der kinetischen Energie des Autos, im zweiten Fall dagegen den vollständigen Verlust der kinetischen Energie (und nicht nur der Energie!) der Fliege.

Die Gesetze des vollkommen inelastischen Stoßes wenden wir nun an beim **ballistischen Pendel**, das in Abb. 3.19 schematisch dargestellt ist.

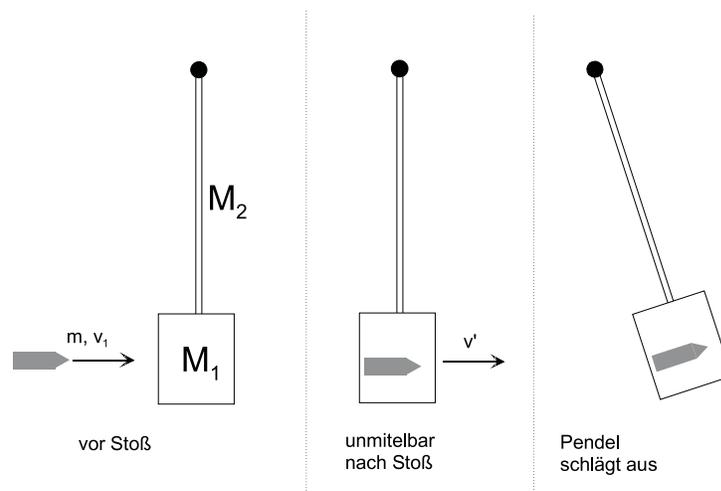


Abbildung 3.19: *Das ballistische Pendel*

Das ballistische Pendel dient zur **Bestimmung von Geschossgeschwindigkeiten**.

Es besteht wie in Abb. 3.19 angedeutet aus einem Stab (Masse  $M_S = 358$  g, Stablänge  $l_{Stab} = 94.5$  cm) und einem würfelförmigen Ende (Masse  $M_W = 581$  g, Kantenlänge  $d = 9.5$  cm). Die Gesamtmasse des Pendels ist  $M_P = M_s + M_W = 939$  g.

Ein Geschoss (Masse  $m = 1.0$  g, Geschwindigkeit  $v_1$ ) trifft auf das ruhende Pendel und bleibt darin stecken.

Die Impulserhaltung ergibt für diesen Vorgang:

$$p_{geschoss} = (m + M_P)v' \quad (3.68)$$

bzw. mit  $p_{geschoss} = mv_1$ :

$$v' = \frac{m}{m + M_P}v_1. \quad (3.69)$$

Die kinetische Energie kurz nach dem Aufschlag (d. h. nachdem das Geschoss steckengeblieben ist, sich aber das Pendel noch nicht wesentlich bewegt hat) beträgt:

$$E'_{kin} = \frac{1}{2}(m + M_P) \cdot v'^2 = \frac{1}{2}(m + M_P) \frac{m^2}{(m + M_P)^2} v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m + M_P} v_1^2 \quad (3.70)$$

Jetzt schlägt das Pendel aus. Bei vernachlässigbarer Reibung kommt das Pendel zur Ruhe, sobald die anfängliche kinetische Energie in die potentielle Energie im Schwerfeld der Erde umgewandelt ist. Entscheidend ist hierbei das "Anheben" des Schwerpunkts.

Hierbei gilt:

$$(m + M_P) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} E'_{kin} \quad (3.71)$$

wobei  $h$  die Höhe sei, um die der Schwerpunkt angehoben wurde. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit der Kugel aus:

$$(m + M_P) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} E'_{kin} = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m + M_P} v_1^2 \quad (3.72)$$

oder:

$$v_1 = \frac{M_P + m}{m} \sqrt{2gh}. \quad (3.73)$$

Im Experiment wird allerdings nicht die Höhe  $h$  direkt gemessen, sondern der Ausschlag  $\Delta x$  parallel zur Erdoberfläche, der an einem am unteren Ende des Pendels angebrachten Zeiger (Abstand  $l_{ges} = 1,12$  m von der Stehachse zur Zeigerspitze) abgelesen wird. Im Experiment ergibt sich  $\Delta x = 13$  cm. Wir müssen jetzt zum einen  $\Delta x$  in Verbindung mit  $h$  bringen und zum andern die Position des Schwerpunkts ermitteln.

Zur Lösung des ersten Problems betrachten wir Abb. 3.20.

Abb. 3.20(a) entnimmt man, dass für kleine Auslenkwinkel  $\varphi \approx \Delta x / l_{ges}$  ist. Der Schwerpunkt befinde sich nun in einem Abstand  $l_s$  von der Drehachse. Bei Auslenkung um den Winkel  $\varphi$  ist  $h$  gerade gegeben durch  $h = l_s - l_s \cos \varphi = l_s(1 - \cos \varphi) \approx l_s(1 - 1 + \varphi^2/2) = l_s \varphi^2/2$ .

Damit erhalten wir:

$$v_1 = \frac{M_P + m}{m} \sqrt{2gh} \approx \frac{M_P}{m} \sqrt{2gl_s \varphi^2/2} = \frac{M_P}{m} \cdot \varphi \cdot \sqrt{gl_s} = \frac{M_P}{m} \frac{\Delta x}{l_{ges}} \cdot \sqrt{gl_s}. \quad (3.74)$$

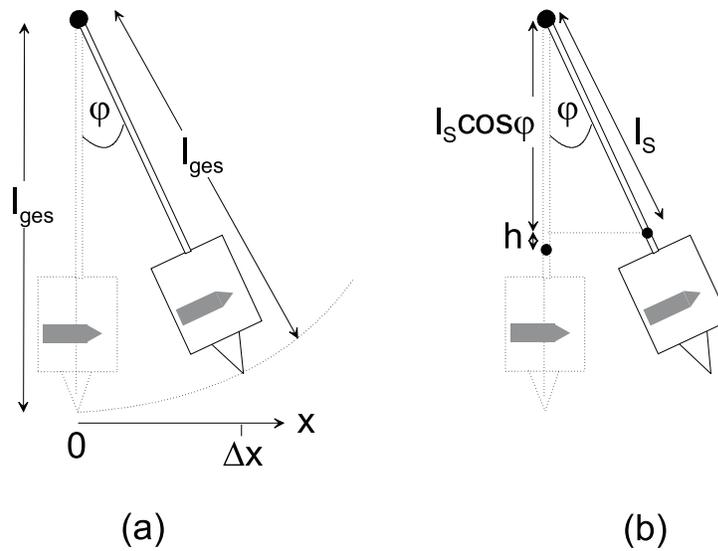


Abbildung 3.20: Zur Auslenkung des ballistischen Pendels

Nun müssen wir den Abstand  $l_s$  des Schwerpunkts vom Drehzentrum bestimmen. Allgemein gilt für den Schwerpunkt:

$$\vec{R}_s = \frac{\iiint \rho \cdot \vec{r} \cdot dV}{M_p} \quad (3.75)$$

Wir legen den Koordinatenursprung in das Drehzentrum und schreiben die Massendichte  $r$  als Summe über die Massendichte des Stabes  $r_S$  und der Massendichte  $r_W$  des unteren würfelförmigen Teil des Pendels,  $\rho = \rho_S + \rho_W$ . Die z-Koordinate zeige vom Drehzentrum zur Pendelspitze. Wir erhalten dann:

$$\vec{R}_s = \frac{\iiint (\rho_S + \rho_W) \cdot \vec{r} \cdot dV}{M_p} = \frac{\iiint \rho_S \cdot \vec{r} \cdot dV + \iiint \rho_W \cdot \vec{r} \cdot dV}{M_p} \quad (3.76)$$

Das Integral über  $r_S$  liefert aus Symmetriegründen gerade  $M_S \cdot \frac{l_{stab}}{2} \cdot \vec{e}_z$ . Beim zweiten Integral müssen wir über den Würfel integrieren, wobei die z-Koordinate von  $l_{Stab}$  bis  $l_{Stab} + d$  läuft. Diese Integral ergibt wiederum aus Symmetriegründen  $M_W \cdot (l_{Stab} + \frac{d}{2}) \cdot \vec{e}_z$ . Hiermit finden wir dass der Schwerpunkt bei

$$l_s = \frac{M_S \cdot \frac{l_{stab}}{2} + M_W \cdot (l_{Stab} + \frac{d}{2})}{M_S + M_W} \quad (3.77)$$

liegt.

Einsetzen der Zahlenwerte liefert  $l_s = 79$  cm.

Setzt man alle Größen in  $v_1 \approx \frac{M_P}{m} \cdot \frac{\Delta x}{l_{ges}} \cdot \sqrt{gl_S}$  ein, so erhält man  $v_1 \approx 304$  m/s, was im Rahmen des Messfehlers mit dem direkt gemessenen Wert von 292 m/s (vgl. Einleitung) gut übereinstimmt.

### 3.3.3 Nicht-zentrale Stöße

Wir wenden uns nun Stößen in 3 Dimensionen zu. Auch hier wollen wir konsequent von der Impuls- und Energieerhaltung Gebrauch machen.

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.78)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_1} + Q \quad (3.79)$$

Hierbei haben wir die Änderung der kinetischen Energie mit  $Q$  bezeichnet. Es entspricht:

$Q = 0$  elastischer Stoß

$Q \neq 0$ : inelastischer Stoß mit

$Q > 0$ : "endothermer" Stoß (d. h. kinetische Energie geht in innere Energie über)

$Q < 0$ : "exothermer" Stoß (d. h. innere Energie geht in kinetische Energie über)

Die Energie- und Impulserhaltung stellen jetzt ein System von 4 Gleichungen dar. Dem stehen die 6 Variablen  $\vec{p}_1'$  und  $\vec{p}_2'$  gegenüber, die i. allg. unbekannt sind. Es bleiben also zwei Variablen unbestimmt. Eine der Variablen kann beispielsweise der Streuwinkel  $\varphi$  bzw. der Stoßparameter  $b$  sein. Es bleibt dann noch eine freie Variable. Wir hatten bislang noch nicht berücksichtigt, dass die Vektoren  $\vec{p}_1'$  und  $\vec{p}_2'$  i. allg. nicht in der gleichen Ebene liegen müssen wie die Vektoren  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$ . Die letzte freie Variable kann also der Winkel sein, um den  $\vec{p}_1'$  und  $\vec{p}_2'$  aus der durch  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$  aufgespannten Ebene herausgedreht sind. In einigen Bezugssystemen findet aber der Stoß in einer Ebene statt. Dies gilt speziell, wenn Körper 2 ruht. Dann spannen die Vektoren  $\vec{p}_1'$  und  $\vec{p}_2'$  eine Ebene auf, in der auch  $\vec{p}_1$  liegt. Im Schwerpunktsystem ist  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$  und  $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$ . Auch hier sind damit alle Vektoren in einer Ebene; allerdings werden  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_1'$  um einen Winkel  $\varphi_1'$  gegeneinander verdreht sein.

Bevor wir uns einigen speziellen Stößen zuwenden, wollen wir zunächst betrachten, wie sich die Energie  $Q$  beim Übergang vom Laborsystem zum Schwerpunktsystem ändert. Dort sei  $Q^s$  die Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß.

Wir haben also im Laborsystem:

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.80)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad (3.81)$$

und im Schwerpunktsystem:

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1^s + \vec{p}_2^s = \vec{p}_1'^s + \vec{p}_2'^s \quad (3.82)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{(\vec{p}_1^s)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2^s)^2}{2m_2} = \frac{(\vec{p}_1'^s)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2'^s)^2}{2m_2} + Q^s. \quad (3.83)$$

Wir lösen nach  $Q$  auf:

$$Q = \frac{p_1^2 - p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2^2 - p_2'^2}{2m_2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\vec{v}_i^2 - \vec{v}_i'^2) \quad (3.84)$$

Mit  $\vec{v}_i = \vec{v}_i^s + \vec{v}_s$ ,  $\vec{v}_i' = \vec{v}_i'^s + \vec{v}_s$  ergibt sich:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i [(\vec{v}_i^s - \vec{v}_s)^2 - (\vec{v}_i'^s - \vec{v}_s)^2] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i [(\vec{v}_i^s)^2 - (\vec{v}_i'^s)^2] - \sum_{i=1}^2 m_i (\vec{v}_i^s - \vec{v}_i'^s) \vec{v}_s \quad (3.85)$$

Nun ist  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i [(\vec{v}_i^s)^2 - (\vec{v}_i'^s)^2] = Q^S$ , während die zweite Summe  $\sum_{i=1}^2 m_i (\vec{v}_i^s - \vec{v}_i'^s) \vec{v}_s$  verschwindet, da sich die Summanden paarweise aufheben ( $\vec{p}_1^s = -\vec{p}_2^s$ ;  $\vec{p}_1'^s = -\vec{p}_2'^s$ ).

Also ist  $Q = Q^S$ , d. h. die "Wärmetönung" hängt nicht vom Bezugssystem ab, wie auch zu vermuten war.

Weiter liefert die Energieerhaltung im Schwerpunktsystem zusammen mit  $\vec{p}_1^s + \vec{p}_2^s = \vec{p}_1'^s + \vec{p}_2'^s$ :

$$\frac{(\vec{p}_1^s)^2}{2m_1} + \frac{(-\vec{p}_1^s)^2}{2m_2} = \frac{(\vec{p}_1'^s)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2'^s)^2}{2m_2} + Q \quad (3.86)$$

oder:

$$\frac{(\vec{p}_1^s)^2}{2\mu} = \frac{(\vec{p}_1'^s)^2}{2\mu} + Q; \quad \mu: \text{reduzierte Masse} \quad (3.87)$$

Hieraus folgt:

$$p_i'^s = \sqrt{(p_i^s)^2 - 2\mu Q} \quad (i = 1, 2) \quad (3.88)$$

Für  $Q = 0$  sind die Beträge aller Impulse gleich, für  $Q > 0$  ( $Q < 0$ ) sind die Impulsbeträge nach dem Stoß kleiner (größer) als die vor dem Stoß. Dies ist in Abb. 3.21 dargestellt.

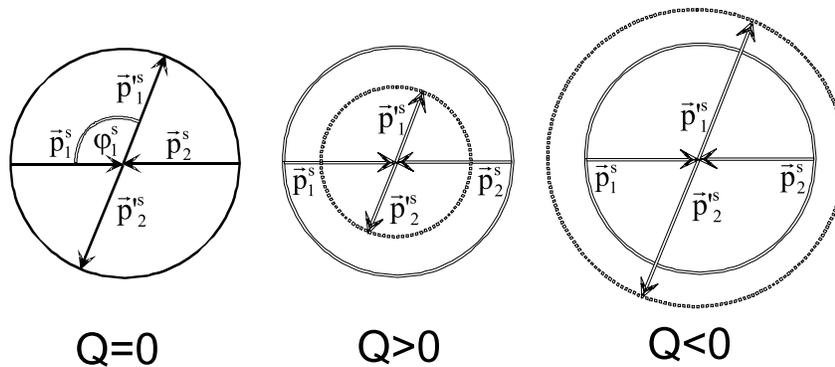


Abbildung 3.21: Impulse vor und nach dem Stoß im Schwerpunktsystem

Betrachten wir nun einige spezielle Stoßprozesse.

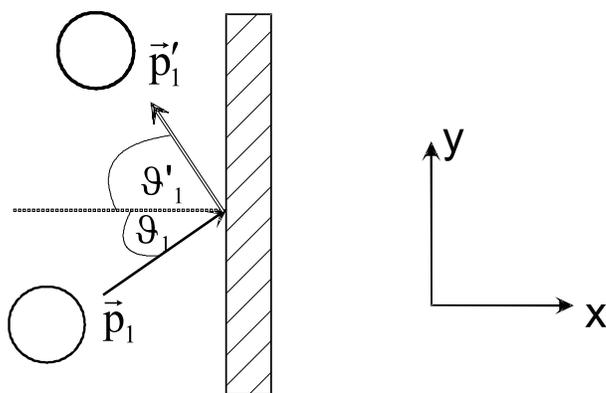


Abbildung 3.22: Nicht-zentraler Stoß mit einer Wand

### Stoß mit einer Wand

Der Stoß laufe in der  $(x,y)$ -Ebene ab. Dann ist:

$$\vec{p}_1 = p_1 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.89) \quad \text{und} \quad \vec{p}'_1 = p_1 \begin{pmatrix} -\cos \vartheta'_1 \\ \sin \vartheta'_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

Beim elastischen Stoß bleibt der Betrag des Impulses erhalten,  $p_1 = p'_1$ . Wenn wir weiter annehmen, dass beim Stoß die Bewegung *parallel* zur Wand kräftefrei ist, so haben wir  $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta'_1$  bzw.  $\vartheta_1 = \vartheta'_1$ . Die  $x$ -Komponente kehrt damit wie beim zentralen Stoß ihr Vorzeichen um (Reflexion an der Wand). Andernfalls sind beliebige Streuwinkel  $\vartheta'_1$  möglich; erst durch die konkrete Angabe der Wechselwirkung kann  $\vartheta'_1$  bestimmt werden. Umgekehrt kann die Messung von  $\vec{p}'_1$  Rückschlüsse über die Kräfte zwischen Wand und Kugel erlauben.

### Nichtzentraler Stoß zwischen zwei Kugeln, $m_2 \rightarrow \infty$ .

Falls wie beim elastischen Stoß mit der Wand wiederum die Impulskomponente in Richtung der Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte beim Stoß ihre Richtung umkehrt, erhalten wir  $\vartheta_1 = \vartheta'_1$ . Die Kugel 2 bleibt auf Grund ihrer unendlichen Masse in Ruhe.

### Elastischer Stoß gleicher Massen im Laborsystem

Wir betrachten den Stoß im Laborsystem, in dem Masse 2 ruht.

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (3.91)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m} \quad (3.92)$$

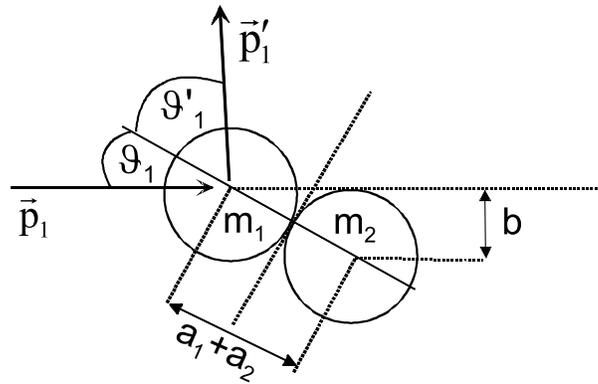


Abbildung 3.23: Nichtzentraler Stoß zwischen zwei Kugeln (Kugel 1: Masse  $m_1$ , Radius  $a_1$ , Impuls  $\vec{p}_1$ ; Kugel 2: Masse  $m_2 \rightarrow \infty$ , Radius  $a_1$ , Impuls  $\vec{p}_2 = 0$ ) im Moment des Zusammenstoßes

Wir quadrieren 3.91:

$$p_1^2 = (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2)^2 = \vec{p}'_1{}^2 + \vec{p}'_2{}^2 + 2\vec{p}'_1\vec{p}'_2 \quad (3.93)$$

und setzen in 3.92  $\cdot 2m$  ein:

$$\vec{p}'_1{}^2 + \vec{p}'_2{}^2 + 2\vec{p}'_1\vec{p}'_2 = \vec{p}_1{}^2 + \vec{p}_2{}^2. \quad (3.94)$$

Hieraus folgt

$$2\vec{p}'_1\vec{p}'_2 = p'_1 p'_2 \cos \varphi = 0 \quad (3.95)$$

mit den Lösungen:  $\cos \varphi = 0$  oder  $p'_1 = 0$  oder  $p'_2 = 0$ .

Interessant ist insbesondere die Lösung  $\cos \varphi = 0$ . Sie bedeutet, dass die **beiden Teilchen nach dem Stoß im rechten Winkel** auseinanderfliegen. Diese Lösung tritt ein, wenn die Teilchen nicht zentral aufeinandertreffen. Abb. 3.24 zeigt dies für den Stoß von Billiardkugeln, sowie für den Stoß zwischen zwei Protonen. Beim zentralen Stoß gilt die zweite Lösung  $p'_1 = 0$  (Masse 1 bleibt stehen, Masse 2 bewegt sich weiter); Lösung 3 schließlich bedeutet, dass keine Wechselwirkung stattgefunden hat.

Im Experiment demonstrieren wir den nicht-zentralen Stoß gleicher Massen an Hand einer Kugel, die von einer Schanze herunterläuft und mit variierbarem Stoßparameter eine ruhende Kugel trifft. Außer beim zentralen Stoß fliegen die Kugeln im rechten Winkel auseinander. Alle Kugeln liegen anschließend auf einem Kreis, wie in Abb. 3.25 angedeutet.

Im Schwerpunktsystem sind die Impulsbeträge der beiden Stoßpartner vor und nach dem Stoß gleich  $\frac{v_1}{2}$ . Da die beiden Körper gleiche Masse haben, sind auch die Beträge aller Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem gleich ( $= \frac{v_1}{2}$ ). Dies ist in Abb. 3.26 (links) dargestellt. Alle Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einem Kreis mit Radius  $\frac{v_1}{2}$ . Um ins Laborsystem zurückzukehren müssen wir zu jeder Geschwindigkeit die Schwerpunkts-geschwindigkeit (Ebenfalls gleich  $\frac{v_1}{2}$ ) addieren. Wir erhalten das rechte Diagramm der Abb. 3.26.

Beim Fall von der Schanze ist die Fallzeit für alle Kugeln gleich ( $t_{fall} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ). Sie legen dann in der (x,y)-Ebene vom Schanztisch gerechnet den Weg  $(x, y) = (v_x, v_y) \cdot t_{fall}$  zurück, so dass die Aufschlagpunkte gerade die Verteilung der Stossgeschwindigkeiten im Laborsystem abbilden.

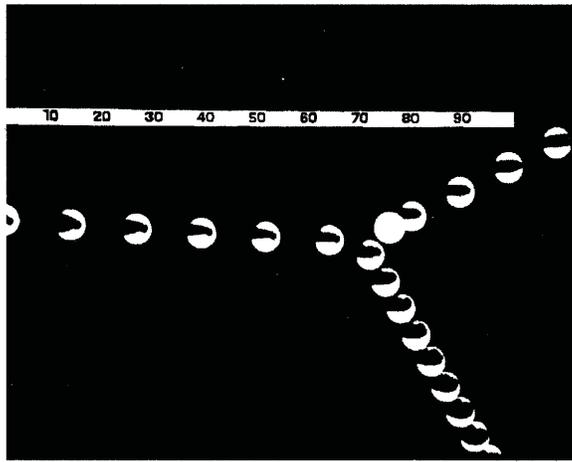
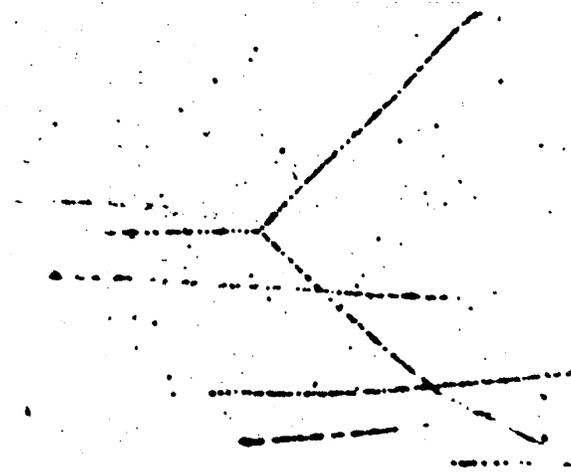


Abbildung 3.24: *Elastischer Stoß zwischen zwei Protonen (oben) bzw. zwischen zwei Billiard-Kugeln (unten) [aus: Dransfeld/Kienle/Kalvius, Physik I, S. 139].*

### Elastischer Stoß im Schwerpunktsystem: Streuwinkel und Stoßparameter

Abb. 3.27 skizziert den elastischen Stoß zweier Massen im Schwerpunktsystem. Nehmen wir wiederum an, dass sich die Bewegung parallel zur Verbindungslinie der beiden Massen kräftefrei ist, ergibt sich wiederum  $\vartheta_1 = \vartheta'_1$ .

Wir wollen hier unsere Ausführungen über Stöße zwischen zwei Körpern beenden. Weitere Zusammenhänge wie etwa die Umrechnung von Streuwinkeln im Schwerpunktsystem in die Streuwinkel im Laborsystem oder der Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Stoßparameter werden in Übungsaufgaben behandelt. Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, dass insbesondere die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Streuwinkel und Stoßparameter, aber auch die Bestimmung von  $Q$  die Angabe der Kräfte zwischen den Stoßpartnern (bzw. die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichungen) erfordert. Im System der Relativkoordinaten ( $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ) ist dies aber äquivalent zur Lösung des

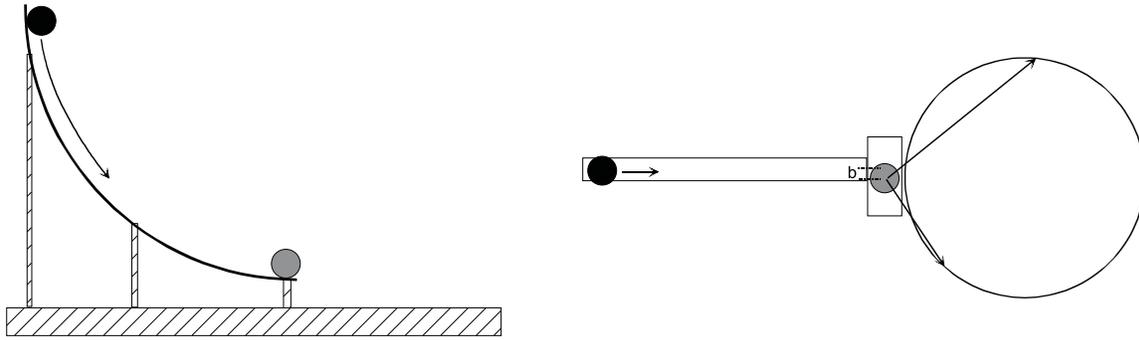


Abbildung 3.25: Nichtzentraler elastischer Stoß zweier Kugeln gleicher Masse. Links: Seitenansicht des Versuchsaufbaus; rechts: Aufsicht.

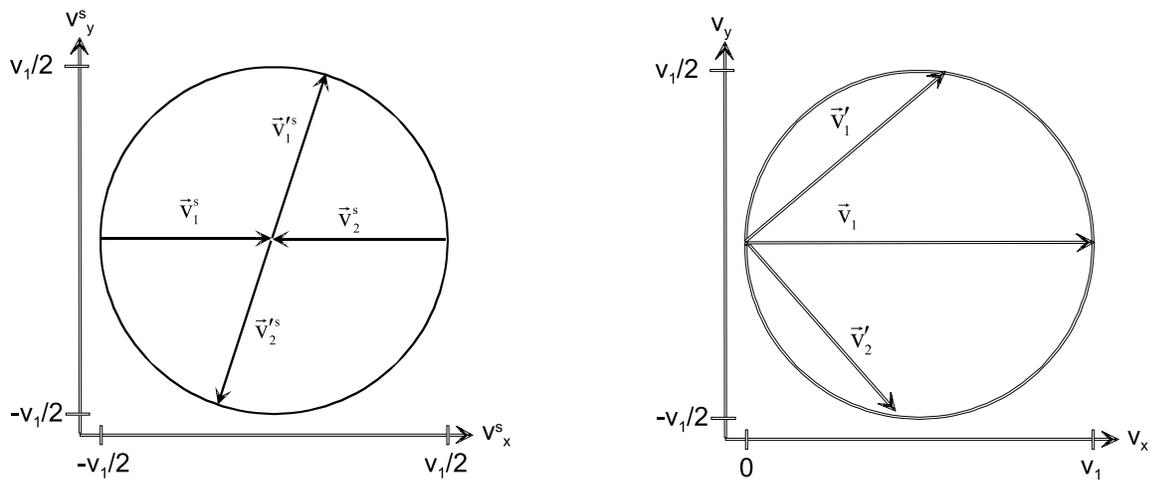


Abbildung 3.26: Geschwindigkeiten der Stoßpartner vor und nach dem Stoß: links: Schwerpunktsystem; rechts: Laborsystem

entsprechenden Einkörperproblems<sup>9</sup>. Es sei im Einkörperproblem  $\vec{r}_1$  der Radiusvektor,  $m_1$  die Masse. Man erhält dann als Lösung den Vektor  $\vec{r}_1(t)$ , der auch von  $m_1$  abhängen kann. Wir ersetzen dann  $\vec{r}_1(t)$  durch  $\vec{r}(t)$  und  $m_1$  durch  $\mu$ . Vom Schwerpunkt aus bewegen sich die beiden Massen mit den Vektoren  $\vec{r}_1^s(t) = -\frac{m_2}{m_1}\vec{r}(t)$  und  $\vec{r}_2^s(t) = \frac{m_1}{m_2}\vec{r}(t)$ . Addieren wir noch die Bewegung  $\vec{R}(t)$  des Schwerpunkts, so haben wir die Bewegung der beiden Massen vollständig charakterisiert.

<sup>9</sup>Eine entsprechende Methode zur Behandlung von mehr als zwei Körpern existiert leider nicht.

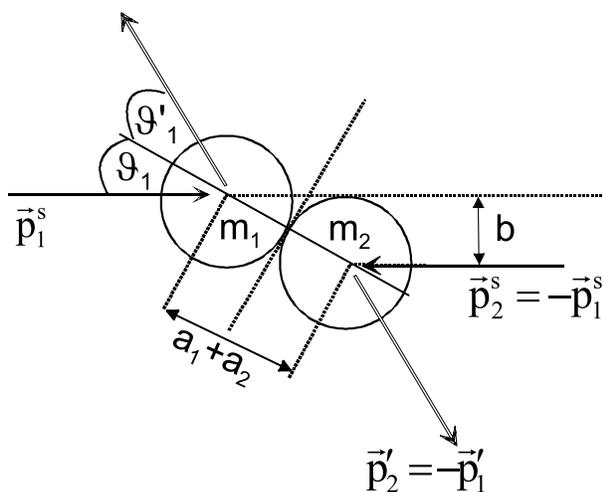


Abbildung 3.27: Stoß zweier Massen im Schwerpunktsystem

### 3.4 Der Virialsatz

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch den Virialsatz formulieren und beweisen. Der Virialsatz findet Anwendung bei einem System von Massenpunkten (natürlich auch bei einem einzelnen Massenpunkt), die sich in einem Kraftfeld bewegen. Dabei ist es egal, ob dieses Kraftfeld auf gegenseitige Wechselwirkungen oder auf ein externes Kraftfeld basiert. Die Kräfte  $\vec{F}_i$  sollen die Massenpunkte (mit Massen  $m_i$  und Ortsvektoren  $\vec{r}_i$ ) in einem endlichen Volumen zusammenhalten. Nach dem Virialsatz gilt dann für den zeitlichen Mittelwert der kinetischen Energie des Systems  $T$

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i}$$

Der zeitliche Mittelwert einer zeitabhängigen Größe  $A(t)$  ist dabei definiert durch

$$\bar{A} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A(t) dt.$$

Zum Beweis des Virialsatzes betrachten wir das Produkt aus den Impulsen und den Ortsvektoren der einzelnen Teilchen, summiert über alle Teilchen

$$G = \sum_i \vec{p}_i \vec{r}_i.$$

Bildet man die Ableitung dieser Größe nach der Zeit  $t$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_i \dot{\vec{p}}_i \vec{r}_i + \sum_i \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \\ &= \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i + 2T \end{aligned} \tag{3.96}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir die Newtonsche Bewegungsgleichung ausgenutzt und die Zeitableitung des Impulses  $\vec{p}_i$  durch die wirkende Kraft ersetzt. Berechnet man den Mittelwert dieser Zeitableitung

$$\begin{aligned}\overline{\frac{dG}{dt}} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.97}$$

Dieser Ausdruck ist null, da nach Voraussetzung die Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  und damit auch die Impulsvektoren  $\vec{p}_i$  endlich sind, so dass auch  $G(t)$  für alle Zeiten endliche Werte annimmt. Aus (3.96) und (3.97) folgt

$$\overline{\frac{dG}{dt}} = \overline{\sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i} + \overline{2T} = 0$$

und damit der Virialsatz (3.4).

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einem konservativen Zentralfeld, das durch ein Potenzial der Form

$$V(r) = \alpha r^{n+1},$$

gegeben ist. Dies ergibt eine Kraft der Form

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -(n+1)\alpha r^{n-1}\vec{r}$$

und es ergibt sich nach dem Virialsatz

$$\overline{T} = \frac{n+1}{2} \overline{\alpha r^{n+1}} = \frac{n+1}{2} \overline{V}.$$

Im Falle des Potenzials eines Harmonischen Oszillators ( $n = 1$ ) ergibt sich also

$$\overline{T} = \overline{V}$$

während z.B. im Fall des Coulomb oder Gravitations - Potenzial ( $n = -2$ ) gilt

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{V}.$$

