

Kapitel 7

Schwingungen und Wellen

7.1 Überlagerung von Schwingungen, Fourier Zerlegung

Im Abschnitt über die Bewegungen einzelner Teilchen haben wir uns sehr intensiv mit den **Harmonischen Schwingungen** beschäftigt, die auftraten, wenn einzelne Teilchen kleine Schwingungen um die Position ausführten, bei der das Potenzial ein Minimum besitzt. In diesem Fall ergibt sich in erster Näherung eine Rückstellkraft, die linear mit der Auslenkung x der Masse m aus dem Punkt minimaler potenzieller Energie anwächst. Diese führte zu einer Newtonschen Bewegungsgleichung, die auf die Form

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{K}{m}x(t), \quad (7.1)$$

gebracht werden konnte. Dabei steht K für die Stärke der Rückstellkraft. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt zwei voneinander unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}},$$

sodass man die allgemeine Lösung schreiben kann in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (7.2)$$

Die Konstanten A und B können z.B. durch die Anfangsbedingungen $x(t=0)$ und $\dot{x}(t=0)$ festgelegt werden. Alternativ zu den Lösungen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ kann man auch die komplexwertigen Exponentialfunktionen als unabhängige Lösungen heranziehen und die allgemeine Lösung darstellen durch

$$x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}, \quad (7.3)$$

wobei die komplexen Parameter α und β so zu wählen sind, dass die reellwertigen Anfangsbedingungen reproduziert werden. Wir bezeichnen solche Bewegungen, bei denen die Auslenkungen mit einer reinen Kosinus- oder Sinusfunktion beschrieben werden als Harmonische Schwingungen (siehe Abb. 7.1). Diese Bezeichnung gilt auch, wenn andere

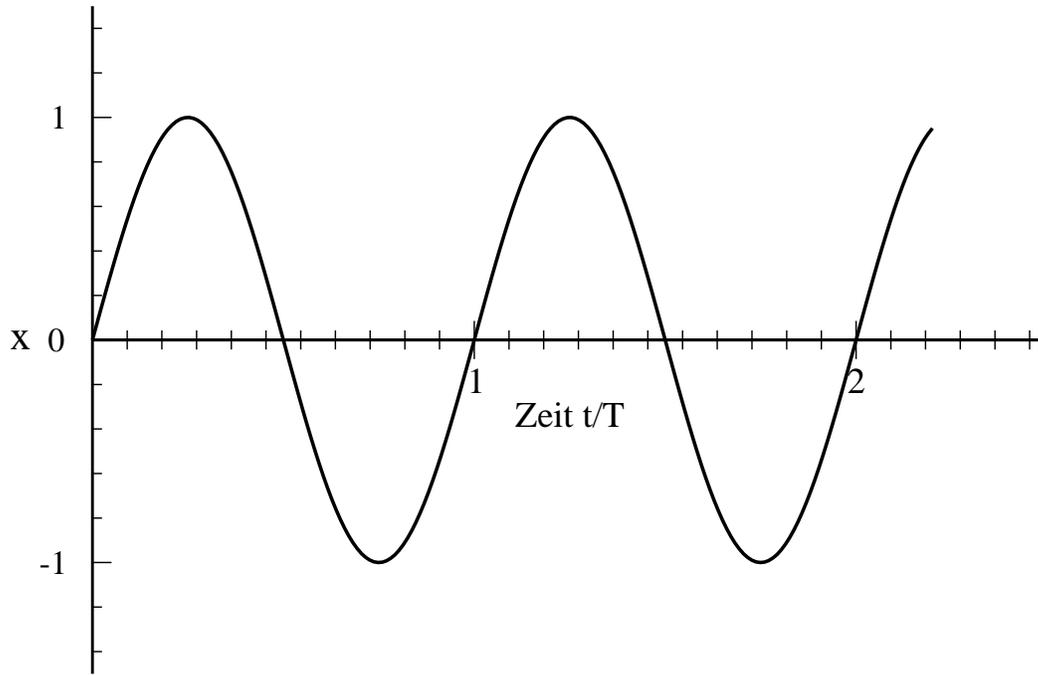


Abbildung 7.1: *Graphische Darstellung einer Harmonischen Schwingung*

physikalische Größen sich so verhalten, dass sie als Funktion der Zeit mit einer Kosinus- oder Sinusfunktion mit einer festen Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben werden. Als ein Beispiel für solche Harmonische Schwingungen wollen wir an dieser Stelle den Schall (hier ändert sich der Druck als Funktion der Zeit) und elektromagnetische Schwingungen, bei denen sich unter anderem die Stärke des elektrischen Feldes als Funktion der Zeit ändert, erwähnen. Weitere Beispiele werden wir später in diesem Kapitel betrachten.

Wir können die Schwingung (7.3) auch umschreiben auf die Form

$$x(t) = a \operatorname{Real} (e^{i(\omega t + \delta)}) = a \cos(\omega t + \delta) \quad (7.4)$$

Eine solche Harmonische Schwingung ist also definiert durch die Amplitude a die Phasenverschiebung δ und die Winkelgeschwindigkeit ω . Diese Winkelgeschwindigkeit drückt man auch häufig aus durch die Frequenz ν oder die Schwingungsdauer T , das ist die Zeit, die verstreicht bis das Argument der Kosinusfunktion eine volle Periode 2π durchlaufen hat. Diese Größen sind zueinander definiert durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (7.5)$$

Was ergibt sich, wenn man mehrere Harmonische Schwingungen aufaddiert, man nennt dies auch eine Überlagerung von Schwingungen. Wir wollen dazu zunächst den Fall betrachten, dass wir nur zwei Schwingungen mit gleicher Amplitude a und 2 leicht unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_0 - \delta\omega$ bzw. $\omega_0 + \delta\omega$ haben. Die Überlagerung berechnet sich am leichtesten durch Aufaddieren der Schwingungen und ergibt

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos((\omega_0 - \delta\omega)t) + a \cos((\omega_0 + \delta\omega)t) \\ &= 2a \sin(\delta\omega t) \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (7.6)$$

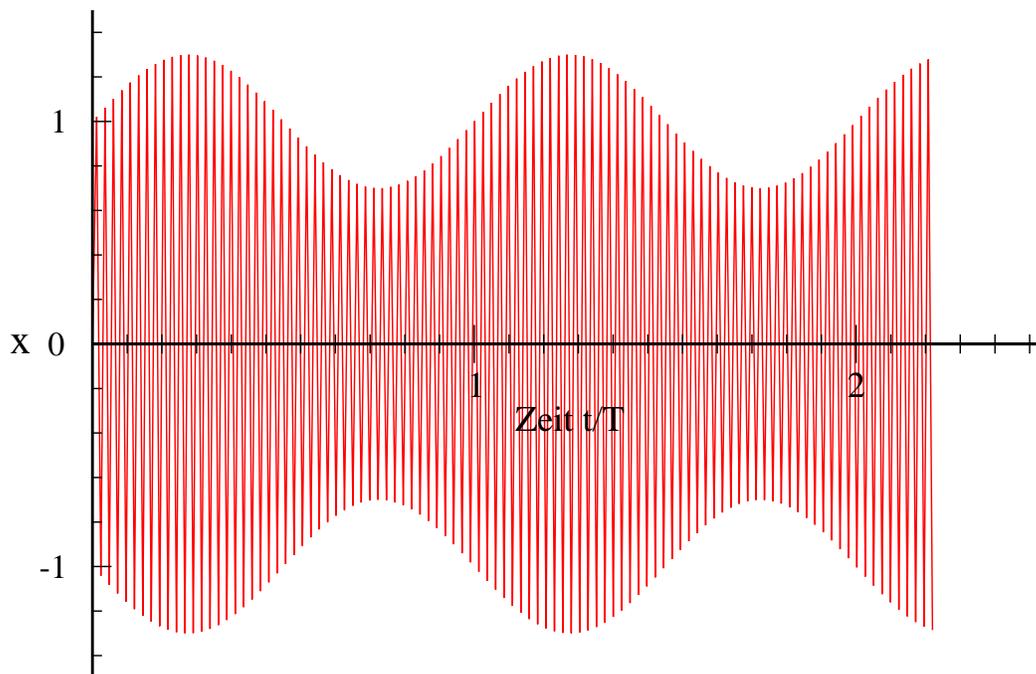


Abbildung 7.2: *Grundschiwingung mit Amplitudenmodulation.*

Dies entspricht also einer Schwingung der Grundwinkelgeschwindigkeit ω_0 deren Amplitude mit der Zeit variiert und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\delta\omega$, die sehr viel kleiner sein kann als ω_0 . Man spricht von einer Schwebung.

Eine Grundschiwingung mit der Trägerfrequenz $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ und einer Amplitude, die mit einer geringeren Frequenz moduliert ist, ist in Abb. 7.2 dargestellt. Solche amplitudenmodulierte Schwingungen ergeben sich durch die Überlagerung von Schwingungen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen. Ein Anwendungsbeispiel für solche Schwingungsüberlagerungen findet man etwa in der Übertragung von Schallwellen mit Radiowellen. Die Trägerfrequenz ν_0 für eine Übertragung im Ultra - Kurz - Wellen (UKW) Bereich liegt z.B. bei 94 MHz, also 94 Millionen Schwingungen des elektromagnetischen Feldes pro Sekunde. Hörbare Schallwellen haben eine Frequenz $\delta\nu$ von 10 Hz bis etwa 20 KHz. Zur Übertragung solcher Schallwellen benötigt man also Überlagerungen von Radiowellen mit $\nu = \nu_0 \pm \delta\nu$, also nicht nur eine einzige Frequenz sondern ein ganzes Frequenzband.

7.1.1 Fourier Reihen

Nun beobachtet man aber in der Natur sehr viele verschiedene periodische Vorgänge und zwar nicht nur solche, die durch eine Harmonische Schwingung dargestellt werden. Wir werden im folgenden sehen, dass sich solche periodischen Vorgänge stets durch eine Überlagerung von Harmonischen Schwingungen darstellen lassen. Man nennt diese Darstellung einer periodischen Funktion $f(x)$ die **Fourier Reihe** dieser Funktion.

Um diese Fourier Reihe zu spezifizieren, definieren wir zunächst einmal, was wir unter einer periodischen Funktion f verstehen. Wir betrachten dazu eine reellwertige Funktion f einer Variablen x , die im Intervall $-L \leq x \leq L$ definiert sein soll mit der Nebenbedingung,

dass $f(-L) = f(L)$. Die Länge des Definitionsintervalls, $2L$, heisst die Periodenlänge der Funktion. Eine solche Funktion kann dann periodisch ergänzt werden für beliebige Argumente durch die Definition

$$f(x) = f(x + 2nL) \quad \text{für } -L \leq x \leq L \quad \text{und } n \text{ eine ganze Zahl.}$$

Die Fourier Reihe zur Darstellung dieser Funktion lässt sich dann schreiben in der Form

$$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) + b_n \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x). \quad (7.7)$$

Dabei sind die a_n und b_n Koeffizienten, also Zahlen, die für die Funktion $f(x)$ charakteristisch sind und über deren Bestimmung noch zu reden sein wird. Die Wellenzahlen k_n sind definiert durch

$$k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (7.8)$$

Damit sind die Funktionen $\cos(k_n x)$ und $\sin(k_n x)$ periodische Funktionen auf dem Intervall $[-L, L]$. Die Gleichung (7.7) sagt aus, dass jede reellwertige periodische Funktion f durch die entsprechenden periodischen Kosinus- und Sinusfunktionen dargestellt werden kann. Diese periodischen Funktionen bilden nämlich einen Vektorraum. Dies bedeutet zunächst einmal, dass jede Überlagerung von periodischen Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in der Form

$$f(x) = a f_1(x) + b f_2(x),$$

mit a und b beliebigen reellen Zahlen, selbst wieder ein Element dieses Vektorraumes ist, wovon man sich leicht überzeugen kann. Ausserdem sind die anderen Voraussetzungen für einen solchen Vektorraum erfüllt.¹

Die Kosinus- und Sinusfunktionen bilden dann eine Basis in diesem Vektorraum und wir können (7.7) umschreiben auf die Form

$$|f\rangle = a_0 |e_0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n |e_n\rangle + b_n |\tilde{e}_n\rangle. \quad (7.9)$$

In dieser Schreibweise haben wir also die Elemente des Vektorraumes identifiziert mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow |f\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2L}} &\rightarrow |e_0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) &\rightarrow |e_n\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x) &\rightarrow |\tilde{e}_n\rangle, \end{aligned} \quad (7.10)$$

¹siehe z.B. Kapitel II aus H. Fischer und H. Kaul: Mathematik für Physiker I, Teubner Taschenbücher, und die entsprechende Vorlesung Mathematik. Eine ausführliche Diskussion der Fourierreihe aus Sicht der Mathematik findet sich im Kapitel III Paragraph 6 von H. Fischer und H. Kaul: Mathematik für Physiker II.

eine Bezeichnung, die insbesondere in der Quantenmechanik benutzt wird und die wir deshalb an dieser Stelle auch schon mal einführen wollen. Diese Basiselemente $|e_n\rangle$ und $|\tilde{e}_n\rangle$ bilden eine Orthonormalbasis. Zum Nachweis müssen wir aber zunächst einmal definieren, wie das Skalarprodukt zweier Vektoren in diesem Vektorraum der periodischen Funktionen gebildet werden soll. Dazu führen wir die Definition ein, dass das Skalarprodukt zweier Elemente $|f\rangle$ und $|g\rangle$, beziehungsweise der entsprechenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berechnet werden soll durch

$$\langle f|g\rangle := \int_{-L}^L dx f(x) g(x). \quad (7.11)$$

Man muss sich davon überzeugen, dass diese Definitionen die Bedingungen an ein Skalarprodukt erfüllt. Insbesondere kann man mit dieser Definition den Abstand zweier Funktionen f und g definieren durch

$$\| |f\rangle - |g\rangle \| = \sqrt{\langle f-g|f-g\rangle}, \quad (7.12)$$

mit

$$\langle f-g|f-g\rangle = \int_{-L}^L dx (f(x) - g(x))^2 \quad (7.13)$$

Dieser Abstand ist also positiv definit und liefert nur dann den Wert Null, wenn die beiden Funktionen f und g identisch sind. Mit dieser Definition können wir uns nun davon überzeugen, dass die in (7.10) aufgeführten Elemente eine Orthonormalbasis darstellen. Es gilt also zum Beispiel

$$\begin{aligned} \langle e_i|e_j\rangle &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos(k_i x) \cos(k_j x) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{für } i = j = 0 \\ 2, & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Entsprechende Beziehungen gelten für die anderen Elemente

$$\langle \tilde{e}_i|\tilde{e}_j\rangle \quad \text{und} \quad \langle e_i|\tilde{e}_j\rangle = 0.$$

Wir müssen nun noch die Entwicklungskoeffizienten a_n und b_n des Elementes $|f\rangle$ unseres Vektorraumes nach den Basiszuständen nach (7.9) bestimmen. Wie auch im einfachen Vektorraum der Ortsvektoren geschieht das dadurch, dass wir das Skalarprodukt der zu entwickelnden Funktion mit den einzelnen Elementen der Orthonormalbasis bilden. Es gilt also

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle f|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L dx f(x), \\ a_n &= \langle f|e_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L dx f(x) \cos(k_n x), \\ b_n &= \langle f|\tilde{e}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L dx f(x) \sin(k_n x). \end{aligned} \quad (7.14)$$

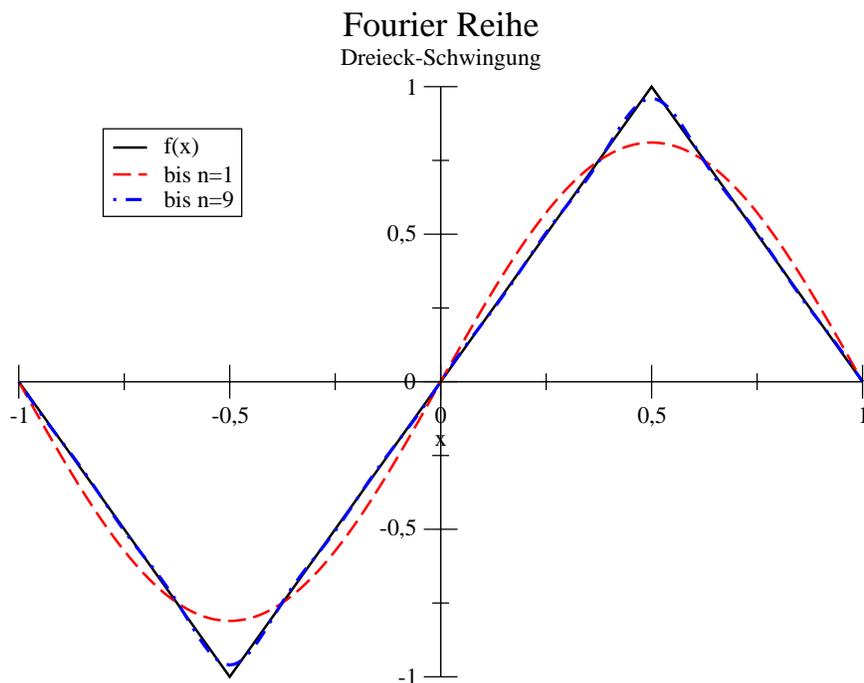


Abbildung 7.3: Dreiecksschwingung und deren Fourier Entwicklung nach (7.15)

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir das Intervall mit $L = 1$ und darauf die Dreiecksfunktion, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{für } -1 \leq x \leq -0.5 \\ 2x & \text{für } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 2(1-x) & \text{für } 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und dargestellt in Abb. 7.3. Für diese Funktion $f(x)$ kann man nun z.B. mit der Hilfe von MAPLE die Entwicklungskoeffizienten nach (7.14) berechnen. Man findet

$$a_0 = a_n = 0 \tag{7.15}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{8}{n^2\pi^2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{7.16}$$

Die Ergebnisse dieser Fourierreihe sind ebenfalls in Abb. 7.3 dargestellt. Wenn man die Fourierreihe (7.7) bei $n = 1$ abbricht, wird die Funktion $f(x)$ durch eine entsprechend normierte Sinusfunktion dargestellt, was einer sehr groben Näherung entspricht. Nimmt man aber alle Terme bis $n = 9$ mit, so kann man das Ergebnis der Fourierreihe kaum noch von der exakten Funktion unterscheiden.

Als zweites Beispiel wollen wir die Fourierreihe für die Rechtecksschwingung betrachten. Diese Rechtecksschwingung ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

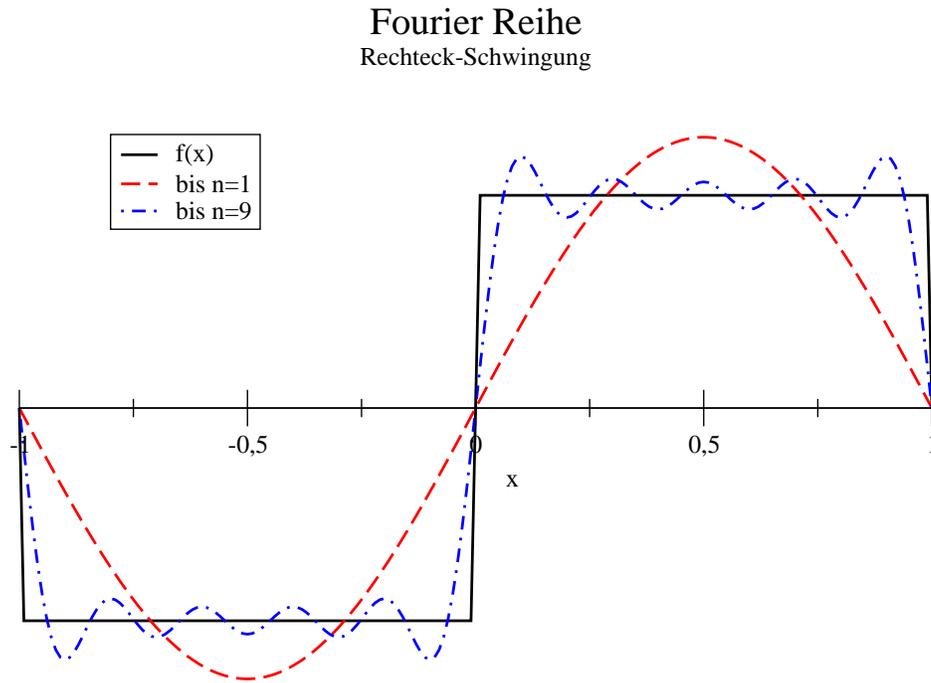


Abbildung 7.4: Rechtecksschwingung und deren Fourier Entwicklung nach (7.17)

und dargestellt in Abb. 7.4. Die Entwicklungskoeffizienten der Fourierreihe berechnen sich in diesem Fall zu

$$a_0 = a_n = 0 \quad (7.17)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Auch in diesem Fall sind die Ergebnisse der Fourierreihe in Abb. 7.4 dargestellt. Durch die Mitnahme weiterer Terme in der Fourierreihe wird die Annäherung an die Rechteckschwingung weiter verbessert.

Der akustische Schall ist ein typisches Beispiel für eine periodische Schwingung. In diesem Fall ändert sich der Druck als Funktion der Zeit, wie wir im Laufe dieses Kapitels auch noch diskutieren werden. Die Frequenz dieser Schwingung ist charakteristisch für die Höhe des Tones. Liegt eine reine Sinusschwingung vor, so sprechen wir von einem Ton. Ein Klang, hingegen, ist ein streng periodisches Signal, das nicht die Form einer Sinuswelle hat. Die oben diskutierten Rechteck- und Dreieckschwingungen stellen also, wenn wir sie als Funktion der Druckabweichung in Abhängigkeit von der Zeit ansehen, einen solchen Klang dar. In diesem Sinne sind die Töne, die von Musikinstrumenten erzeugt werden als Klänge zu bezeichnen. Nachdem wir gesehen haben, dass wir solche streng periodischen Funktionen durch eine Fourierreihe darstellen können, wissen wir, dass auch ein Klang durch eine Überlagerung von Schwingungen mit Frequenzen $n\omega_0$ dargestellt werden kann. Dabei ist ω_0 die Winkelfrequenz für die periodische Schwingung und $n\omega_0$ mit einer ganzen Zahl n sind die Frequenzen der Obertöne.

7.1.2 Fouriertransformation

Als Ergänzung zur Diskussion der Fourierreihe sollen an dieser Stelle auch einige Bemerkungen zur Fouriertransformation einer beliebigen nicht notwendig periodischen Funktion gemacht werden. Dazu überlegen wir uns, dass man natürlich das Konzept des Vektorraumes von periodischen Funktionen auf einem Intervall $[-L, L]$ erweitern kann auf komplexwertige Funktionen. In diesem Fall müssen wir lediglich die Definition des Skalarproduktes aus (7.11) erweitern für komplexwertige Funktionen zu

$$\langle f|g \rangle := \int_{-L}^L dx f^*(x) g(x), \quad (7.18)$$

wobei die Funktion $f^*(x)$ gerade das komplex konjugierte Ergebnis zu $f(x)$ liefert. Durch diese Definition ist gewährleistet, dass das Skalarprodukt $\langle f|f \rangle$ einer Funktion mit sich selbst einen reellen, positiven Wert ergibt.

Für die periodischen komplexwertigen Funktionen sind die komplexwertigen Exponentialfunktionen eine geeignete Basis und wir können schreiben

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n |e_n \rangle, \quad (7.19)$$

mit

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

wie schon in (7.8). In (7.19) erstreckt sich die Summe aber auch auf negative Werte für n . Die Entwicklungskoeffizienten c_n in (7.8) sind komplexe Zahlen und berechnen sich durch

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L dx e^{-ik_n x} f(x). \quad (7.20)$$

Wenn wir nun annehmen, dass die Grenzen des Intervalls anwachsen und schließlich gegen $L \rightarrow \infty$ streben, so liegen die diskreten Wellenzahlen k_n mit wachsendem L immer enger zusammen. Aus der Summe über alle Wellenzahlen k_n wird dann ein Integral über kontinuierliche Wellenzahlen. Dies führt zur Fouriertransformation für eine beliebige Funktion $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk c(k) e^{ikx}. \quad (7.21)$$

Die Gewichtsfunktion $c(k)$ in dieser Darstellung der Funktion $f(x)$ heisst auch die Fouriertransformierte Funktion zu $f(x)$ und berechnet sich durch

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (7.22)$$

Wir werden auf diese Fouriertransformation einer Funktion später zurückkommen.

System von 2 gekoppelten Differenzialgleichungen, da für den Fall, dass die Verbindungsfeder eingebaut ist (also d ungleich null), die gesuchten Funktion $x_i(t)$ in beiden Gleichungen auftauchen. Damit können diese Gleichungen nicht isoliert voneinander behandelt werden.

Trotzdem können wir uns vorstellen, dass es auch im Fall der gekoppelten Pendel Lösungen gibt, bei denen die beiden Massenpunkte im Takt hin und her schwingen und die Verbindungsfeder nicht ausgelenkt wird. Man spricht in diesem Fall von einer **Eigenschwingung** oder **Normalschwingung** des Systems. Den Ansatz für solche Normalschwingungen schreiben wir in der Form

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} e^{i\omega t}. \quad (7.24)$$

Die Normalschwingung ist als ein Vektor \vec{q} aus 2 Komponenten (zweidimensional) dargestellt, wobei die obere Komponente durch die Funktion $x_1(t)$ und die untere durch $x_2(t)$ gegeben ist. Im zweiten Teil der Gleichung wird zum Ausdruck gebracht, dass diese Funktion durch jeweils eine konstante Amplitude x_{i0} multipliziert mit der komplexwertigen Exponentialfunktion, die hier wieder zur Darstellung der harmonischen Schwingung genutzt wird. Dabei interessiert uns also wieder nur der Realteil dieser Funktionen.

Setzt man diesen Ansatz für die Funktionen $x_i(t)$ in (7.23) ein, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} -m\omega^2 x_{10} e^{i\omega t} &= [-Dx_{10} + dx_{20} - dx_{10}] e^{i\omega t} \\ -m\omega^2 x_{20} e^{i\omega t} &= [-Dx_{20} + dx_{10} - dx_{20}] e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Alle Terme dieser Gleichungen besitzen den Faktor $e^{i\omega t}$, den wir deshalb aus diesem Gleichungssystem herauskürzen können. Mit kleinen Umformungen ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} m\omega^2 x_{10} &= (D + d)x_{10} - dx_{20} \\ m\omega^2 x_{20} &= (D + d)x_{20} - dx_{10}, \end{aligned}$$

zwei algebraische Gleichungen, die wir mit Hilfe der Rechenregeln für Vektoren der Dimension 2 und zugehörigen 2×2 Matrizen auf die Form bringen können

$$\begin{pmatrix} D + d & -d \\ -d & D + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Diese Gleichung vom Typ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } A} \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor } \vec{q}} = \lambda \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

bezeichnet man als **Eigenwertgleichung** der symmetrischen Matrix A . Die Konstante λ auf der rechten Seite der Gleichung hat den Namen **Eigenwert** der Matrix λ und den zweidimensionale Vektor \vec{q} für den diese Gleichung gilt bezeichnet man als **Eigenvektor zum Eigenwert** λ . Für den Ansatz (7.24) reduziert sich das Problem der gekoppelten Differenzialgleichungen (7.23) auf das algebraische Eigenwertproblem (7.26).

Solche Eigenwertprobleme begegnen uns an vielen Stellen in der Physik. Insbesondere in der Quantenmechanik stehen Eigenwertprobleme im Zentrum. Aber auch in dieser Vorlesung ist uns bereits ein solches Eigenwertproblem begegnet, ohne dass wir dort darauf

hingewiesen haben. Für den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls \vec{L} und der Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ eines starren Körpers gilt ja die Beziehung

$$\vec{L} = \mathcal{I}\vec{\omega},$$

wobei \mathcal{I} für den Trägheitstensor des starren Körpers steht, also durch eine 3×3 Matrix repräsentiert wird. Für Drehungen um Hauptträgheitsachsen, stehen Drehimpuls und Rotationsgeschwindigkeiten parallel zueinander und es gilt

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

mit einer Zahl I , dem Hauptträgheitsmoment. Daraus ergibt sich also die Bedingung für Hauptträgheitsachsen

$$\mathcal{I}\vec{\omega} = I\vec{\omega}. \quad (7.28)$$

Die Bestimmung der Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen ist also ebenfalls ein Eigenwertproblem hier für Vektoren und Matrizen der Dimension 3: die Hauptträgheitsmomente sind die Eigenwerte des Trägheitstensors und die zugehörigen Hauptträgheitsachsen liegen parallel zu den Eigenvektoren.

Die Methoden zur Lösung von Eigenwertproblemen werden in der Linearen Algebra diskutiert². Wir wollen an dieser Stelle nur auf einige zentrale Ergebnisse hinweisen und ein ‘‘Kochrezept’’ zur Lösung angeben. Man kann zeigen, dass eine symmetrische $N \times N$ Matrix A (mit reellwertigen Matrixelementen) genau N Eigenwerte und jeweils zugehörige Eigenvektoren besitzt, die zueinander orthogonal sind. Diese Eigenvektoren bilden also eine Basis des N -dimensionalen Vektorraumes. Das bedeutet, dass man jeden Vektor durch eine Linearkombination von Eigenvektoren darstellen kann.

Wie bestimmt man aber nun die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix A , so wie das z.B. in (7.27) formuliert ist? In einem ersten Schritt bestimmt man das **Charakteristische Polynom**. Dieses Charakteristische Polynom ergibt sich als **Determinante** der Matrix $(A - \lambda E_1)$ wobei E_1 die Matrix die ‘‘Eins-Matrix’’ also mit Einträgen 1 in der Diagonale und Null sonst. Damit ist also die Matrix $(A - \lambda E_1)$ gegeben durch

$$(A - \lambda E_1) = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{pmatrix},$$

wenn wir als Beispiel die 2×2 Matrix aus (7.27) heranziehen. Die Determinante einer 2×2 Matrix berechnet sich als das Produkt der beiden Elemente in der Diagonalen minus dem Produkt der beiden nichtdiagonalen Elemente. Für die Determinante von $(A - \lambda E_1)$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_1) &= (\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda(\alpha + \gamma) + \alpha\gamma - \beta^2. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Die Berechnung von Matrizen einer größeren Dimension als 2 ist etwas aufwendiger und wir werden diese zu gegebener Zeit diskutieren. Das Ergebnis dieser Rechnung in (7.29) ist ein Polynom vom Grade 2 in der Variablen λ , die den Namen Charakteristisches Polynom der Matrix A trägt.

²siehe z.B. H. Fischer und H. Kaul: Mathematik für Physiker I, § 18.

Die Eigenwerte der Matrix A sind gleich den Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Wir bekommen also für unsere Beispielmatrix A die Eigenwerte dadurch, dass wir die Werte λ_1 und λ_2 bestimmen, für die der Ausdruck in (7.29) null ergibt. Dies führt zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4} - \alpha\gamma + \beta^2}. \quad (7.30)$$

Ersetzen wir die Matrixelemente von A , also α , β und γ durch die Einträge der entsprechenden Matrix in (7.26), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = m\omega_{1,2}^2 &= D + d \pm \sqrt{(D + d)^2 - (D + d)^2 + d^2} \\ &= D + d \pm d \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich also für die Winkelgeschwindigkeiten der Normalschwingungen die Werte

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2d}{m}}. \quad (7.31)$$

In einem weiteren Schritt müssen nun die Eigenvektoren bestimmt werden. Dazu setzen wir zunächst das Ergebnis für $\omega = \omega_1$ in (7.26) ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} D + d & -d \\ -d & D + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Daraus ergibt sich, dass alle Vektoren mit $x_{10} = x_{20} = \chi$ Eigenvektoren zu diesem Eigenwert sind. Für die Normalschwingung ergibt sich also (siehe (7.24))

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_2(t) &= \text{Real}(\chi e^{i\omega_1 t}) \\ &= \text{Real}(\chi (\cos(\omega_1 t) + i \sin(\omega_1 t))) \\ &= u_1 \cos(\omega_1 t) + u_2 \sin(\omega_1 t). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Die Koeffizienten u_1 und u_2 dieser Normalschwingung ergeben sich aus den Anfangsbedingungen der Schwingung. Wenn wir etwa den Fall betrachten, dass zur Zeit $t = 0$ das System in Ruhe sein soll, so ist $u_2 = 0$ und u_1 entspricht der Auslenkung $x_1 = x_2 = u_1$ der beiden Massenpunkte aus der Ruhelage.

Diese erste Normalschwingung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 entspricht also genau der Schwingung, die wir bei der Motivation des Ansatzes (7.24) im Auge hatten: Die beiden Massenpunkte schwingen im Gleichtakt mit der Winkelgeschwindigkeit der ungestörten Einzelpendel. Da der Abstand der beiden Massenpunkte $x_2 - x_1$ stets dem Abstand in der Ruhelage entspricht, wird durch Verbindungsfeder keine Rückstellkraft hervorgerufen.

Unsere Rechnungen führen aber auch zu einem zweiten Eigenwert bzw. einer zweiten Winkelgeschwindigkeit ω_2 in (7.31). Setzen wir diese Lösung $\omega = \omega_2$ in (7.26) ein, so erhalten wir zur Bestimmung des Eigenvektors zu diesem zweiten Eigenwert die Gleichung

$$\begin{pmatrix} D + d & -d \\ -d & D + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = (D + 2d) \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}. \quad (7.34)$$

In diesem Fall gilt für die zugehörigen Normalschwingungen $x_{10} = -x_{20} = \chi$, also:

$$x_1(t) = -x_2(t) = w_1 \cos(\omega_2 t) + w_2 \sin(\omega_2 t). \quad (7.35)$$

Auch hier werden die Koeffizienten w_1 und w_2 durch die Startbedingungen festgelegt. Für den Fall, dass die Geschwindigkeiten der Massenpunkte zur Zeit $t = 0$ identisch Null sein soll, ergibt sich, dass $w_2 = 0$ und w_1 der Auslenkung des Massenpunktes 1 zur Zeit $t = 0$ entspricht. Bei dieser zweiten Normalschwingung schwingen die beiden Pendel "gegeneinander", da ja stets gilt: $x_1(t) = -x_2(t)$.

Es wurde bereits oben gesagt, dass die Eigenvektoren einer Matrix eine orthogonale Basis des zugehörigen Vektorraumes bilden. In unserem Fall bedeutet das, dass jede beliebige Lösung der gekoppelten Differenzialgleichungen (7.23) als Linearkombination der Normalschwingungen (7.33) und (7.35) darstellen lassen. Beschränken wir uns weiter auf solche Lösungen, die zur Zeit $t = 0$ in Ruhe sind, also $u_2 = w_2 = 0$) so lautet der Ausdruck für eine beliebige Lösung von (7.23):

$$\begin{aligned}x_1(t) &= u_1 \cos(\omega_1 t) + w_1 \cos(\omega_2 t) \\x_2(t) &= u_1 \cos(\omega_1 t) - w_1 \cos(\omega_2 t).\end{aligned}\tag{7.36}$$

Als Beispiel für eine solche gekoppelte Schwingung sind in Abb. 7.6) solche Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ dargestellt für den Fall, dass $D/m = 1$ und $d = 0.1 * D$, also eine relativ schwache Kopplung vorliegt. Die Anfangsbedingungen sind so gewählt, dass für $t = 0$ die Amplitude $x_1 = 1$ maximal ist, während der zweite Massenpunkt sich in der Ruhelage $x_2 = 0$ befindet. Dies führt auf die Werte $u_1 = w_1 = 0.5$ in (7.36). Man sieht an den Auslenkungen, dass die Energie, die zur Zeit $t = 0$ vollständig auf den ersten Massenpunkt konzentriert ist, während des Schwingvorganges auf den zweiten Massenpunkt übertragen wird, bis bei etwa $t = 6 * \pi$ der erste Massenpunkt fast zur Ruhe kommt während der zweite eine maximale Amplitude aufweist. Daraufhin wird die Energie der Schwingbewegung wieder auf den ersten Massenpunkt übertragen. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch.

Eine etwas andere Darstellung des gleichen Vorganges ist in Abb. 7.7 gegeben. In dieser Abbildung sind jeweils die Positionen x_1 (auf der horizontalen Achse) und x_2 (auf der vertikalen Achse aufgetragen). Während das linke Teilbild, damit der Leser sich mit dieser Darstellung vertraut machen kann, die Schwingungen für $0 \leq t \leq 3 * \pi$ wiedergibt, sind im rechten Teilbild die Amplituden für $0 \leq t \leq 30 * \pi$ dargestellt.

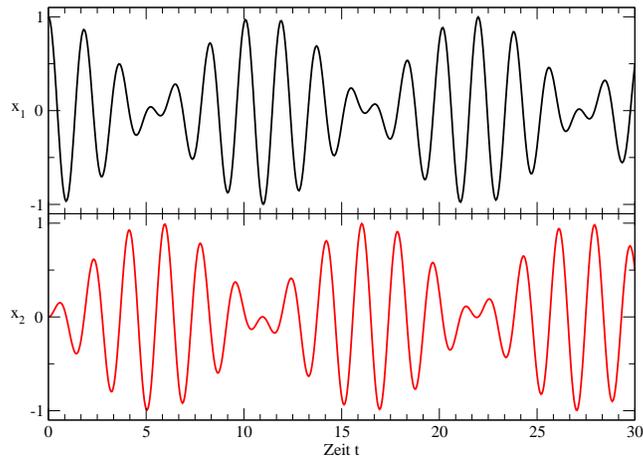


Abbildung 7.6: Amplituden von 2 gekoppelten Pendeln. In diesem Beispiel sind $D/m = 1$ und $d = 0.2 * D$ gewählt. Die Zeit auf der horizontalen Achse ist in Einheiten von π angegeben.

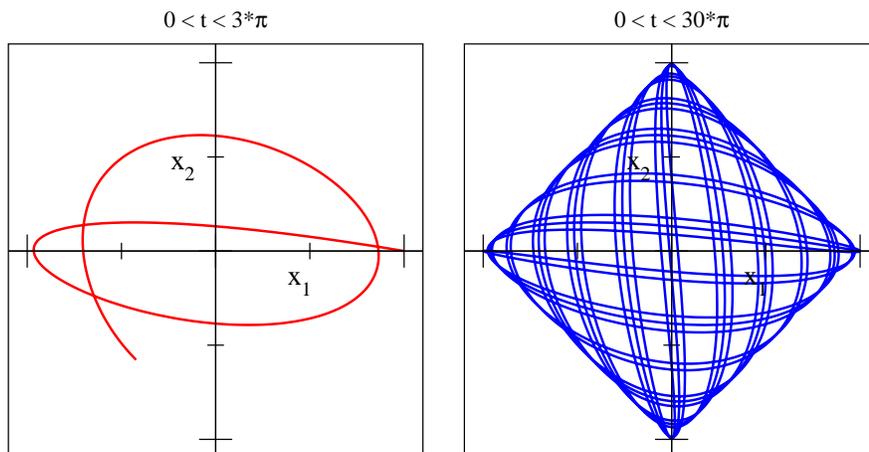


Abbildung 7.7: Darstellung der 2 gekoppelten Pendel aus der Abb. 7.6. In dieser Darstellung ist x_1 , horizontale Achse, und x_2 auf der vertikalen Achse für gleichen Zeitpunkt aufgetragen.

7.3 Wellengleichung

Unter Schwingungen verstehen wir die periodische Änderung einer physikalischen Größe als Funktion der Zeit. Dabei betrachten wir diese Größe aber stets am gleichen Ort. Wenn sich diese Änderung aber von einem Ort zu einem anderen ausbreitet, so sprechen wir von einer Welle. Als ein einfaches Modell für die Ausbreitung einer solchen Welle betrachten wir das Modell einer linearen Kette von Massenpunkten, bei denen die Nachbarpunkte jeweils über eine Feder miteinander verbunden sind (siehe Abb. 7.8). In der Ruhelage haben die Massenpunkte jeweils einen Abstand l voneinander, sodass sich der n -te Massenpunkt an der Position $x_n = n * l$ befindet. Betrachten wir den Fall, dass die Massenpunkte aus dieser Ruhelage in Richtung auf die Nachbarn ausgelenkt werden können. Man spricht in diesem Fall von einer longitudinalen Auslenkung, beziehungsweise einer longitudinalen Schwingung, wenn diese Auslenkung sich periodisch mit der Zeit ändert. Bezeichnen wir diese Auslenkung mit $w_n(t)$, so befindet sich also der n -te Massenpunkt zur Zeit t an der Position

$$u_n(t) = x_n + w_n(t). \quad (7.37)$$

Der Abstand zwischen dem Massenpunkt n und dem Massenpunkt $n - 1$ beträgt also dann $u_n - u_{n-1}$, was einer Auslenkung der verbindenden Feder aus der Ruhelage von $u_n - u_{n-1} - l$ entspricht. Dadurch erfährt der Massenpunkt n eine Rückstellkraft vom Betrag $D(u_n - u_{n-1} - l)$, mit D der Federkonstanten der verbindenden Feder in Richtung auf den (linken) Nachbarn $n - 1$. Hinzu kommt eine Kraft durch die Verbindungsfeder mit dem Nachbarn $n + 1$ von der Größe $D(u_{n+1} - u_n - l)$. Die Gesamtkraft auf den Massenpunkt n mit der Masse m ergibt sich aus der Summe dieser beiden Kräfte, was zu einer Newtonschen Bewegungsgleichung der Form

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -D(u_n - u_{n-1} - l) + D(u_{n+1} - u_n - l), \quad (7.38)$$

führt. Ersetzt man jetzt die Koordinaten der Massenpunkte u_n nach (7.37) durch die jeweiligen Auslenkungen w_n so führt dies zu

$$m \frac{d^2 w_n}{dt^2} = D(w_{n+1} - w_n) - D(w_n - w_{n-1}). \quad (7.39)$$

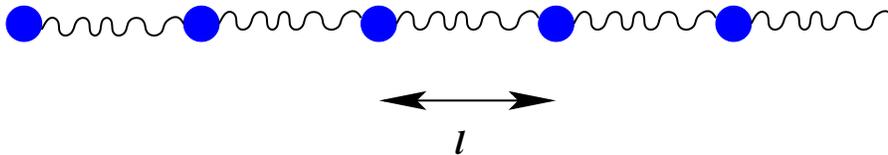


Abbildung 7.8: Schematische Darstellung einer Kette für eine longitudinale Schwingung

Im nächsten Schritt betrachten wir die Auslenkungen w_n als eine kontinuierliche Funktion vom Ort x , an dem sich der betreffende Massenpunkt befindet. Wir ersetzen also z.B.

$$\begin{aligned} w_n(t) &\rightarrow w(t, x) \\ w_{n+1}(t) &\rightarrow w(t, x + \Delta x). \end{aligned}$$

Damit können wir (7.39) umformen in

$$m \frac{d^2 w(t, x)}{dt^2} = D [w(t, x + \Delta x) - w(t, x)] - D [w(t, x) - w(t, x - \Delta x)]. \quad (7.40)$$

Für kleine Werte des Abstandes Δx benutzen wir die Taylor Entwicklung

$$w(t, x \pm \Delta x) \approx w(t, x) \pm \frac{dw(t, x)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} \Delta x^2. \quad (7.41)$$

Setzt man diese Entwicklungen in (7.40) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 w(t, x)}{dt^2} &= D \left[\frac{dw(t, x)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} \Delta x^2 \right] + D \left[-\frac{dw(t, x)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} \Delta x^2 \right] \\ &= D \Delta x^2 \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} \\ &= mc_L^2 \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

wobei wir mit der Abkürzung

$$c_L^2 = \frac{D \Delta x^2}{m} \quad (7.43)$$

eine Konstante eingeführt haben, die vom Aufbau der Kette (Federkonstante D , Masse der Kettenglieder m und Abstand der Kettenglieder Δx) abhängt. Damit können wir die Gleichung (7.42) umschreiben in eine homogene Differenzialgleichung der Ordnung 2 mit Ableitungen der gesuchten Funktion $w(t, x)$ nach den Argumenten Zeit t und Ort x

$$\frac{1}{c_L^2} \frac{d^2 w(t, x)}{dt^2} - \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} = 0. \quad (7.44)$$

Diese Differenzialgleichung hat den Namen **d'Alembert Gleichung** und ist benannt nach dem französischen Naturwissenschaftler und Philosophen Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-83).

Wir können uns nun leicht davon überzeugen, dass jede Funktion $w(x, t)$, die nicht unabhängig von den Parametern x und t abhängt sondern nur von der Kombination $x - c_L t$, also

$$w(x, t) = w_+(y) \quad \text{mit} \quad y = x - c_L t, \quad (7.45)$$

eine Lösung der d'Alembert Gleichung (7.44) liefert. Zum Beweis berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{dw(x, t)}{dt} &= \frac{dw_+(y)}{dy} \frac{dy}{dt} = -c_L \frac{dw_+}{dy} \\ \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} &= c_L^2 \frac{d^2 w_+}{dy^2} \\ \frac{dw(x, t)}{dx} &= \frac{dw_+(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dw_+}{dy} \\ \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} &= \frac{d^2 w_+}{dy^2}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse für die Ableitungen in (7.44), so ergibt sich die Behauptung, dass die d'Alembert Gleichung für jede Lösung nach (7.45) erfüllt ist.

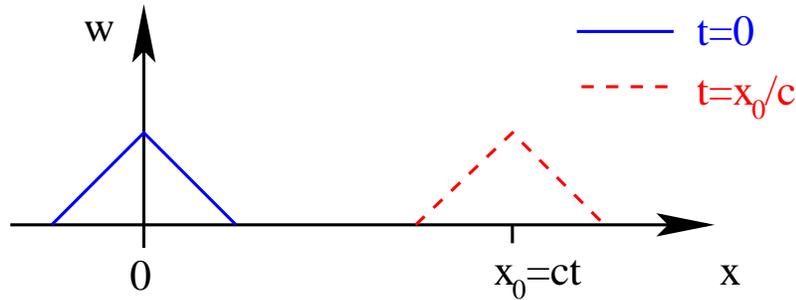


Abbildung 7.9: Beispiel für eine Lösung der d'Alembert Gleichung nach (7.45). Dargestellt ist die Funktion $w(x, t)$ für $t = 0$ und $t = x_0/c_L$.

Was bedeutet diese Lösung? Zur Veranschaulichung nehmen wir an, dass die Funktion $w_+(y)$ durch die einfache Dreieckstruktur aus der Abb. 7.9 dargestellt ist. Zur Zeit $t = 0$ gilt mit (7.45) $y=x$ und die Funktion $w(x, t = 0)$ hat also das Maximum bei $x = y = 0$. Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ ist dieses Maximum an der Stelle x_0 , die sich ergibt aus

$$y = 0 = x_0 - c_L t .$$

Dieses Maximum, entsprechendes gilt für die anderen charakteristischen Punkte der Dreieckstruktur, die durch w_+ definiert ist, wandert also mit der Geschwindigkeit c_L in positiver Richtung der x -Achse (siehe Abb. 7.9). Die Konstante c_L , die ja über die Materialkonstanten der Kette gegeben ist (siehe (7.43)), ist also die Geschwindigkeit, mit der sich die Struktur ausbreitet. Man spricht auch von der Gruppengeschwindigkeit oder Phasengeschwindigkeit, 2 Geschwindigkeiten, die in diesem Zusammenhang identisch sind.

Neben der Lösung vom Typ (7.45) gibt es aber auch Lösungen der d'Alembert Gleichung vom Typ

$$w(x, t) = w_-(y) \quad \text{mit} \quad y = x + c_L t , \quad (7.46)$$

was man ganz analog zu den oben skizzierten Rechnungen beweisen kann. In diesem Fall bewegt sich die Struktur, die durch w_- beschrieben wird mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_L antiparallel zur x -Achse.

Da die d'Alembert Gleichung eine lineare Differenzialgleichung ist, ist aber auch jede Linearkombination der Lösungen vom Typ (7.45) und (7.46) eine Lösung. Eine solche Lösung hat also die Form

$$w(x, t) = \alpha w_+(x - c_L t) + \beta w_-(x + c_L t) .$$

Eine ganz spezielle Lösung der d'Alembert Gleichung erhalten wir, wenn wir die Funktion w_+ in (7.45) in Form einer Sinusfunktion angeben, also

$$w(x, t) = A_0 \sin(k(x - c_L t)) . \quad (7.47)$$

Wir sprechen in diesem Fall von einer **Harmonischen Welle**. Es ist klar, dass diese Harmonische Welle eine Lösung der d'Alembert Gleichung ist.

Wenn wir diese Harmonische Welle zu einem festen Zeitpunkt betrachten, also z.B. $t = 0$, so ist $w(x)$ als Funktion des Ortes eine Sinuswelle

$$w(x, t = 0) = A_0 \sin(kx) .$$

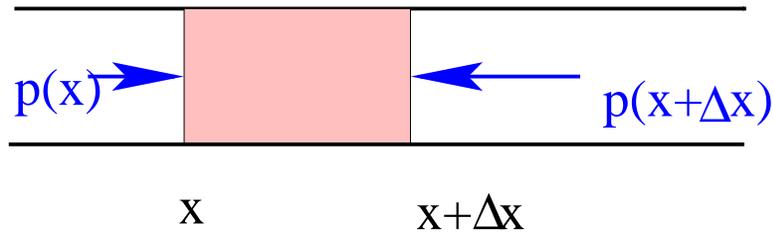


Abbildung 7.10: Schematische Darstellung einer Flöte zur Diskussion der Ausbreitungsgleichung für Schallwellen im Text

Diese Funktion durchläuft eine volle Periode zwischen $x = 0$ und dem Wert $x = \lambda$ mit

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (7.48)$$

Man bezeichnet diese Länge λ als Wellenlänge der Harmonischen Welle mit der Wellenzahl k . Wir können die Harmonische Welle (7.47) aber auch bei festgehaltenem Wert von x (z.B. $x = 0$) als Funktion der Zeit betrachten. Dies entspricht der Wahrnehmung der Welle für einen Beobachter, der sich an einem festen Ort aufhält. Dies führt zu

$$w(x = 0, t) = A_0 \sin(-kc_L t) = -A_0 \sin(kc_L t).$$

Wir haben es auch in diesem Fall mit einer Sinusschwingung zu tun. Die volle Periode wird durchlaufen zwischen $t = 0$ und $t = T$ mit

$$kc_L T = 2\pi \quad \text{also} \quad T = \frac{2\pi}{kc_L} = \frac{\lambda}{c_L}. \quad (7.49)$$

Diese Zeit T bezeichnet man auch als Periodendauer. Damit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit ω und die Frequenz ν der Schwingung

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = kc_L. \quad (7.50)$$

In der Abbildung 7.8 und in der Diskussion, die zur d'Alembert Gleichung führte haben wir das Beispiel einer longitudinalen Schwingung der Massenpunkte und die Ausbreitung als Welle betrachtet. Charakteristisch für diese longitudinale Welle ist, dass die Bewegung der Massenpunkte in Ausbreitungsrichtung (bzw. antiparallel dazu) erfolgt. Führen die Massenpunkte Schwingungen aus, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle (d.h. der linearen Kette) verlaufen, spricht man von einer transversalen Welle. Auch die Ausbreitung einer solchen Schwingung führt auf die d'Alembert Gleichung. Allerdings werden die Materialkonstanten für eine solche transversale Schwingung in der Regel unterschiedlich sein zu denen der longitudinalen Schwingung (insbesondere die Stärke der Rückstellkraft D). Dies bedeutet, dass man unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten für longitudinale Wellen, c_L , und transversale Wellen c_T im gleichen Material beobachtet.

Als einen weiteren Schwingungsvorgang, der sich in Form einer Welle ausbreitet, wollen wir den Schall betrachten. Dazu überlegen wir uns die Verteilung des Druckes im Inneren eines Zylinders, also z.B. einer Blockflöte. Dies ist schematisch in Abb. 7.10 dargestellt.

Wir betrachten dazu das Gas in einem Volumen $\mathcal{V} = A\Delta x$, mit A der Grundfläche des Zylinders und Δx der Ausdehnung dieses Volumens senkrecht zur Grundfläche, wie in Abb. 7.10 dargestellt. Auf dieses Gasvolumen wirkt an der Stelle x eine Kraft

$$F(x) = p(x)A$$

die sich aus dem Produkt Druck $p(x)$ mal Fläche, A , ergibt. Die Kraft hat ein positives Vorzeichen, was andeuten soll, dass sie versucht, die Atome im Volumen \mathcal{V} parallel zur x -Achse zur verschieben. An der Stelle $x + \Delta x$ wirkt die Kraft

$$F(x + \Delta x) = -p(x + \Delta x)A \approx -\left(p(x) + \frac{dp}{dx}\Delta x\right)A$$

wobei das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Kraft antiparallel zur x -Achse wirkt und die Taylorentwicklung für $p(x + \Delta x)$ für kleine Werte von Δx gerechtfertigt ist. Die resultierende Kraft führt zu einer Beschleunigung der Atome im Volumen \mathcal{V} der Form

$$M\frac{dv}{dt} = -A\frac{dp}{dx}\Delta x. \quad (7.51)$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit des Volumens und M die Masse, die sich mit der Masendichte $\tilde{\rho}$ berechnet zu

$$M = \tilde{\rho}A\Delta x.$$

Damit ergibt sich aus (7.51) die Beziehung

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{dp}{dx}. \quad (7.52)$$

Die mittlere Geschwindigkeit $v(x)$ mit der sich die Atome am linken Rand unseres Volumens im Mittel bewegen wird im Allgemeinen anders sein, als die Geschwindigkeit am rechten Rand $v(x + \Delta x)$. Es gilt in guter Näherung (Taylorentwicklung)

$$v(x + \Delta x) \approx v(x) + \frac{dv}{dx}\Delta x$$

Wenn sich die beiden Ränder mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen, so führt dies zu einer Änderung des Volumens

$$\Delta\mathcal{V} = A\frac{dv}{dx}\Delta x\Delta t = \mathcal{V}\frac{dv}{dx}\Delta t.$$

Im Grenzfall einer infinitesimalen Änderung der Zeit, $\Delta t \rightarrow dt$, kann man also schreiben

$$\frac{1}{\mathcal{V}}d\mathcal{V} = \frac{dv}{dx}dt. \quad (7.53)$$

Für die weiteren Rechnungen führen wir an dieser Stelle den Begriff der **Kompressibilität** ein und definieren ihn durch

$$\chi = -\frac{1}{\mathcal{V}}\frac{d\mathcal{V}}{dp}. \quad (7.54)$$

Die Kompressibilität χ gibt also an, wie sehr sich das Volumen eines Materials ändert, wenn sich der auf das Volumen wirkende Druck p ändert. Damit die Kennziffer des Materials durch positive Zahlen angegeben werden kann ist in der Definition (7.54) ein Minuszeichen eingefügt. Der Faktor $1/\mathcal{V}$ berücksichtigt, dass die Änderung eines Volumens $d\mathcal{V}$ natürlich zunächst einmal proportional zum Volumen ist. Diese Definition der Kompressibilität kann man umformen in

$$dp = -\frac{1}{\chi} \frac{1}{\mathcal{V}} d\mathcal{V} = -\frac{1}{\chi} \frac{dv}{dx} dt, \quad (7.55)$$

wobei in der zweiten Gleichung die Beziehung (7.53) eingesetzt wurde. Daraus ergibt sich

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\chi} \frac{dv}{dx}.$$

Leitet man diese Beziehung nach der Zeit ab, so ergibt sich

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -\frac{1}{\chi} \frac{d}{dt} \frac{dv}{dx}. \quad (7.56)$$

Andererseits ergibt sich aus der Ableitung von (7.52) nach der Position x

$$\frac{d}{dx} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d^2 p}{dx^2}. \quad (7.57)$$

Die beiden Gleichungen (7.56) und (7.57) können nun zusammengefügt werden zu

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{1}{\tilde{\rho}\chi} \frac{d^2 p}{dx^2} = c^2 \frac{d^2 p}{dx^2}. \quad (7.58)$$

Dies ist eine Differenzialgleichung vom Typ der d'Alembert Gleichung (7.44) zur Bestimmung des Drucks p als Funktion von Ort und Zeit. Die Eigenschaften der Lösungen dieser Gleichung haben wir bereits diskutiert und können deshalb daraus ablesen, dass sich Druckänderungen an einer Stelle x zur Zeit t ausbreiten mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\rho}\chi}}. \quad (7.59)$$

Da wir die Druckänderungen mit akkustischem Schall identifizieren können, liefert diese Gleichung also einen Ausdruck für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in einem Medium mit der Massendichte $\tilde{\rho}$ und der Kompressibilität χ .

Als ein Beispiel betrachten wir die Schallausbreitung in einem Gas. Wenn wir dazu annehmen, dass die Kompressionen des Gases durch den Schalldruck so schnell vonstatten gehen, dass ein Austausch von Wärmeenergie unterdrückt wird, die Kompressionen und Dekompressionen also adiabatisch verlaufen, so gilt für die Beziehung zwischen Druck p und Volumen \mathcal{V} des Gases bei einem solchen adiabatischen Vorgang

$$p\mathcal{V}^\kappa = \alpha = \text{konst.} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad (7.60)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d\mathcal{V}}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{\alpha}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\mathcal{V}}{p}. \quad (7.61)$$

Setzt man diese Beziehung in den Ausdruck für die Kompressibilität (7.54) ein, so erhält man

$$\chi = \frac{1}{\kappa p},$$

und damit über die Beziehung (7.59) für die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}. \quad (7.62)$$

Setzt man in diese Beziehung typische Werte für die uns umgebende Luft ein, also insbesondere $\kappa = 7/5$ so ergibt sich ein Wert für die Schallgeschwindigkeit von $c = 330$ Meter pro Sekunde, was sehr genau den Messergebnissen entspricht.

Bei dieser Berechnung der Schallgeschwindigkeit sind wir davon ausgegangen, dass die Kompressionen des Gases adiabatisch erfolgen (siehe (7.60)). Hätten wir stattdessen angenommen, dass diese Kompressionen so langsam erfolgen, dass sich der Druck isotherm einstellt, so hätten wir statt (7.60) die isotherme Beziehung $p\mathcal{V} = \text{konstant}$ benutzt. Die weiteren Rechnungen zur Bestimmung von c sind analog zu den Gleichungen (7.60) - (7.61), wir müssen lediglich den adiabatischen Exponenten κ durch 1 ersetzen. Dies führt zu einer Vorhersage für die Schallgeschwindigkeit von $c = 280$ Meter pro Sekunde, was sehr viel schlechter mit dem experimentellen Wert übereinstimmt als die Abschätzung von (7.62). Aus diesem Vergleich zwischen Theorie und Experiment können wir also schliessen, dass die Kompressionen der Luft bei der Ausbreitung von Schall adiabatisch ablaufen.

Zum Ende dieses Abschnittes wollen wir uns die Frage stellen: Welche Energie steckt in einer Welle. Als erstes Beispiel betrachten wir wieder die lineare Kette aus Massenpunkten für die Ausbreitung von longitudinalen oder transversalen Wellen. Eine harmonische Welle wird beschrieben durch die Form

$$A(x, t) = A_0 \sin(kx - \omega t), \quad (7.63)$$

und beschreibt die Auslenkung aus der Ruhelage für den Massenpunkt an der Stelle x zur Zeit t . Die Amplitude A_0 steht für die maximale Auslenkung. Beschränken wir uns auf einen Massenpunkt etwa am Ort $x = 0$, so gilt für die Auslenkungsamplitude dieses Massenpunktes

$$A(t) = A_0 \sin(-\omega t)$$

und damit für seine Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dA}{dt} = -A_0\omega \cos(-\omega t) = -v_0 \cos(-\omega t).$$

Die Energie dieses Massenpunktes wechselt ständig zwischen kinetischer und potenzieller Energie. Zur Zeit $t = 0$ ist die Auslenkung und damit die potenzielle Energie gleich null, die Energie entspricht also der kinetischen Energie

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2.$$

Daraus ergibt sich eine Energiedichte, also Energie pro Volumen, von

$$\rho_E = \frac{1}{2}\tilde{\rho}\omega^2 A_0^2 \quad (7.64)$$

wobei $\tilde{\rho}$ wieder für die Massendichte steht. Als nächstes betrachten wir nun die Intensität der Welle, das ist die Energie, die diese Welle pro Zeiteinheit Δt durch eine bestimmte Fläche ΔF transportiert. Die Intensität I ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\text{Energie}}{\Delta F \Delta t} \\
 &= \frac{\text{Energie}}{\Delta F \Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
 &= \underbrace{\frac{\text{Energie}}{\Delta F \Delta x}}_{=\rho_E} \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{=c} \\
 &= \rho_E c = c \frac{1}{2} \tilde{\rho} \omega^2 A_0^2.
 \end{aligned} \tag{7.65}$$

Die Intensität einer Welle ist also proportional zum Quadrat der Amplitude A_0 .

Betrachten wir nun die Ausbreitung einer Kugelwelle, das ist eine Welle, die in einem Punkt startet und sich gleichmäßig in alle Raumrichtungen (kugelförmig) ausbreitet. Aus Gründen der Energierhaltung muss die Energie, die diese Welle durch die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r_1 um den Ausgangspunkt der Welle transportiert, identisch sein mit der Energie, die durch eine zweite Kugel mit dem Radius r_2 transportiert wird. Die Intensität dieser Welle muss also proportional zur Oberfläche der Kugel also proportional zu $1/r^2$ mit dem Radius r der Kugel abnehmen. Da die Intensität nach (7.65) proportional zum Quadrat der Amplitude ist, muss also die Amplitude proportional zu $1/r$ abfallen. Damit hat also eine solche Kugelwelle die Gestalt

$$A(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \sin(kr - \omega t), \tag{7.66}$$

die Amplitude hängt also nur vom Abstand vom Ausgangspunkt r (hier gleich dem Koordinatenursprung), nicht aber von der Richtung ab.

7.4 Schwingungen und Wellen

7.4.1 Schwebung und Fourieranalyse im Experiment

In einer Reihe qualitativer Experimente demonstrieren wir **einige Schwingungsvorgänge**:

Schwebung

Die Überlagerung zweier Schwingungen der Form $A(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$ mit leicht unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten bzw. Kreisfrequenzen ω_1, ω_2 ist in Abb. 7.11 dargestellt, mit $A_1 = A_2 = 1$; $\omega_2 = 1.1\omega_1$. Die Einhüllende variiert mit der Differenzfrequenz $(\omega_1 - \omega_2)$.

Wir demonstrieren den Effekt optisch (Messkurve auf Oszilloskop), sowie akustisch. Im letzten Fall hört man neben einem hohen Pfeifen die Differenzfrequenz als Brummtönen.

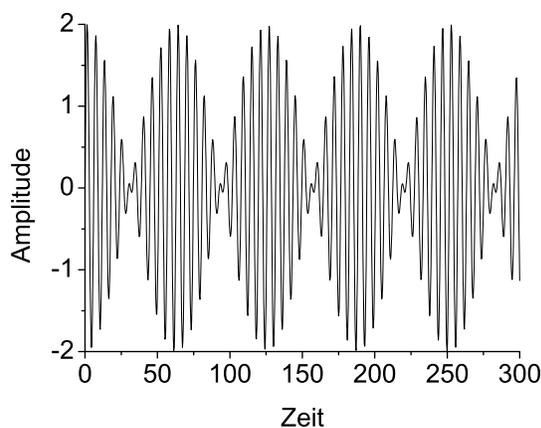


Abbildung 7.11: Überlagerung von zwei Schwingungen $A(t) = \sin(t) + \sin(1.1 \cdot t)$

Generell lässt sich eine periodische Schwingung beliebiger Form $A(t)$ in eine **Fourierreihe** entwickeln, wie im Theorieteil gezeigt wird. Die **Fourieranalyse** ist eine elegante und vielfach verwendete Methode, eine allgemeine Kurve $A(t)$ zu analysieren.

Fourieranalyse: Schwingende Saite und Kratzgeräusch

Das Frequenzspektrum einer schwingenden Saite besteht aus einer Reihe diskreter Frequenzen, die ganze Vielfache einer Grundfrequenz $f_0 = \omega_0/2\pi$ sind. Erhöht man den Ton durch Halbieren der Saite um eine Oktave, so treten nur noch Frequenzen bei Vielfachen von $2f_0$ auf. Kratzt man dagegen an einem Mikrofon, so zeigt die Fourieranalyse eine sehr große Zahl von Frequenzen, die zum Signal beitragen.

Im Oszilloskop wird bei der Fourieranalyse zunächst das zeitabhängige Signal $A(t)$ aufgezeichnet. Die Methode der "schnellen Fouriertransformation" (**Fast Fourier Transform**, FFT) erlaubt dabei eine Echtzeit-Darstellung des Frequenzspektrums.

7.4.2 Wellen in Natur und Technik

Wir demonstrieren zunächst qualitativ einige Wellentypen im Experiment.

An einem vertikal aufgehängten Draht sind waagrecht Nägel angebracht. Das untere Ende des Drahtes hängt frei. Jeder der Nägel kann Drehschwingungen ausführen, wobei die rückstellende Kraft proportional zur Verdrehung des Drahtes ist (vgl. Cavendish-Versuch). Lenkt man den untersten Nagel aus und lässt ihn dann los, so überträgt sich die Auslenkung auf benachbarte Nägel; eine pulsformige Anregung läuft die Nagelkette entlang, wird am eingespannten Ende reflektiert und läuft in Gegenrichtung weiter. Analoge Effekte lassen sich beobachten, wenn ein Seil an einem Ende angeschlagen wird oder wenn ein Gegenstand in ein Wasserbad geworfen wird. Das Prinzip dieser pulsformigen Anregungen ist in Abb. 7.12 skizziert.

Regt man dagegen z. B. in der Wellenwanne eine Stelle durch einen periodisch eintauchenden Stab an, so entsteht ein Wellenzug mit einer periodischen Abfolge von Wellenbergen und -tälern, der sich kreisförmig vom Eintauchpunkt ausbreitet. In drei Dimensionen würde dem eine Kugelwelle entsprechen, die sich von einem Punkt weg nach allen Richtungen ausbreitet. Analog führt die periodische Anregung durch einen breiten Schieber zu einer ebenen Welle, bei der die Wellenkämme bzw. -täler eine Abfolge ebener Linien bilden.

Nach diesen einführenden Beispielen kommen wir nun zu einigen konkreten Wellenarten. Betrachten wir zunächst **Schallwellen in Gasen**. Hier handelt es sich, um **longitudinale Druckwellen**, wobei die Kompression lokal adiabatisch erfolgt. (Demonstration: brennende Kerze vor Lautsprecher; die Flamme bewegt sich mit der Musik). Wie im Theorieteil gezeigt wurde, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) gegeben durch: $c = \sqrt{\frac{1}{\chi\tilde{\rho}}} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\tilde{\rho}}}$. Hierbei ist $\delta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$ die Kompressibilität, $\kappa = c_p/c_v$ und $\tilde{\rho} = m/V$ die Massendichte. Mit $pV = \nu RT$ lässt sich c auch ausdrücken durch $c = \sqrt{\frac{\kappa\nu RT}{m}}$, ist also proportional zu $T^{1/2}$ und zu $m^{-1/2}$. Für ein Gas aus leichten Molekülen ist also c deutlich größer als für ein Gas aus schweren Molekülen.

Typische **Zahlenwerte für $T=0^\circ\text{C}$** sind:

Luft: 331 m/s

He: 965 m/s

H₂: 1284 m/s

Schallwellen in Flüssigkeiten sind ebenfalls **longitudinale Druckwellen**. Da die Kompressibilität von Flüssigkeiten deutlich unter der von Gasen liegt, ist c größer als bei (nicht allzu leichten) Gasen. Man findet z. B.

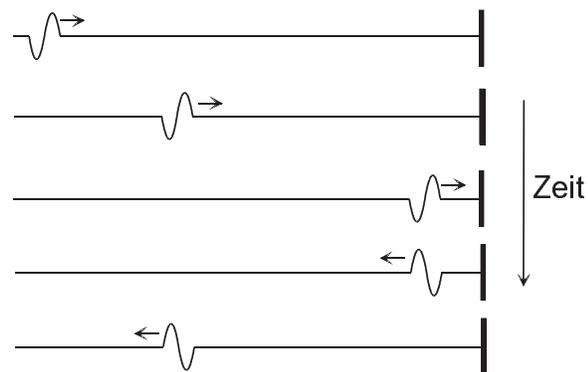


Abbildung 7.12: *Pulsformige Welle, die an einem Seil entlangläuft und am eingespannten rechten Rand reflektiert wird. Bei der Reflexion dreht sich das Vorzeichen der Welle um.*

Aceton: 1378 m/s

Hg: 1451 m/s

H₂O: 1497 m/s

Von diesen Druckwellen zu unterscheiden sind **Oberflächenwellen**, wie sie sich z. B. in der Wellenwanne beobachten lassen. Die Behandlung dieser Wellen und das Bewegungsmuster der Moleküle im Wasser ist relativ kompliziert. Wir wollen hier nur einige Ergebnisse wiedergeben. Grundsätzlich wirken zwei Kräfte als Rückstellkräfte, nämlich einerseits die Schwerkraft und andererseits die Oberflächenspannung, die versucht, die Oberfläche der Welle zu minimieren. Die Oberflächenspannung σ bewirkt beispielsweise auch die Kugelform einer Seifenblase.

Für **kleine Wellenlängen** λ (Wasser: $\lambda < 1.6$ cm) überwiegt der Effekt der Oberflächenspannung. Man spricht von **Kapillarwellen**. Für die Geschwindigkeit der Wellen ergibt sich: $c = \sqrt{2\pi\sigma/(\tilde{\rho}\lambda)}$. Die Schallgeschwindigkeit hängt also von λ selbst ab und steigt für kurze Wellenlängen. Für große Wellenlängen (Wasser: $\lambda > 1.6$ cm) ist der Einfluss der Schwerkraft dominant (die potentielle Energie einer welligen Wasseroberfläche ist offensichtlich höher als sie einer glatten). Man spricht dann von **Schwerewellen**. Falls die Wassertiefe h wesentlich größer ist als λ , ergibt sich: $c \approx \sqrt{\lambda g/2\pi}$. Im entgegengesetzten Grenzfall $\lambda \gg h$ findet man: $c \approx \sqrt{gh}$.

Die Besonderheit der Oberflächenwellen ist, dass c von der Wellenlänge (bzw. der Frequenz) der Welle abhängt. Diese Eigenschaft wird als **Dispersion** bezeichnet.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Welle durch eine gewisse Form $A(x)$ gekennzeichnet. Man kann nun $A(x)$ eine Summe von sin- und cos-Termen darstellen (Fourierreihe, diesmal mit dem Ort x als Argument). Wenn c nicht von λ abhängt, bewegen sich alle Teilwellen mit der gleichen Geschwindigkeit und das gesamte Wellenpaket behält seine Form, d. h. wir können schreiben: $A(x, t) = A(x \pm c \cdot t)$. Bei dispersiven Wellen bewegen sich die Fourierkomponenten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, das Wellenpaket $A(x, t)$ kann seine Form ändern.

Dies lässt sich bei Wasserwellen beim Phänomen der **Brandung** oder, in größerem Maßstab, bei **Tsunamis** beobachten.

Wenn Wasserwellen auf das Ufer zulaufen, wird die Wassertiefe h irgendwann vergleichbar bzw. kleiner als λ . Die Wellenberge bekommen dann bei $c \approx \sqrt{gh}$ eine höhere Geschwindigkeit als die Wellentäler. Die Welle steilt sich auf. Wenn Erdbeben im Ozean stattfinden, lösen diese Wellen mit Wellenlängen aus, die größer sind als die Meerestiefe. Es sei $h = 9$ km. Dann ergibt sich $c \approx \sqrt{gh} \approx 1000$ km/h. Die entsprechende Welle mag im Ozean sehr unscheinbar sein. In Küstennähe steilt sie sich aber zu enormer Größe auf und kann große Verwüstungen anrichten.

Kommen wir nochmals zurück zu Schallwellen. Noch nicht betrachtet hatten wir **Schallwellen in Festkörpern**. Hier wirken die Kräfte zwischen den Gitterbausteine als Rückstellkräfte. Sie wirken in allen Raumrichtungen, so dass Schallwellen in Festkörpern **sowohl longitudinal als auch transversal** sein können. Typische Schallgeschwindigkeiten liegen für longitudinale Wellen im Bereich 10 km/s, für transversale Wellen leicht darunter. Die möglichen Wellenlängen solcher Schallwellen umfassen enorme Distanzen. Die kleinsten Wellenlängen liegen im Bereich der Atomabstände (kleinere Wellenlängen sind nicht mehr sinnvoll), die größten im Bereich der Abmessung des gesamten Festkörpers.

Im Extremfall ist dies der Erddurchmesser (bzw. Sonnen- oder Sterndurchmesser, falls man extraterrestrische Objekte mit einbezieht).

Besondere Bedeutung haben diese großen Wellenlängen für die **Geologie**. Durch Erdbeben ausgelöste Wellen wandern durch die Erde und können an verschiedenen Messstationen an der Erdoberfläche registriert werden. Geschwindigkeit der Welle hängt dabei von der Beschaffenheit des Erdinneren ab, so dass durch systematische Beobachtung der (mittleren) Schallgeschwindigkeit zwischen "Sender" und "Empfänger" die Beschaffenheit des Erdinneren spektroskopiert werden kann. Das Prinzip ist in Abb. 7.13 skizziert.

Die Abb. 7.14 zeigt die aus solchen Messungen gewonnene Geschwindigkeit transversaler und longitudinaler Schallwellen in unterschiedlichen Tiefen. Man beachte insbesondere, dass bei Tiefen zwischen 3000 km und 5000 km keine Transversalwellen vorkommen. Dies ist der Bereich des flüssigen äußeren Kerns der Erde.

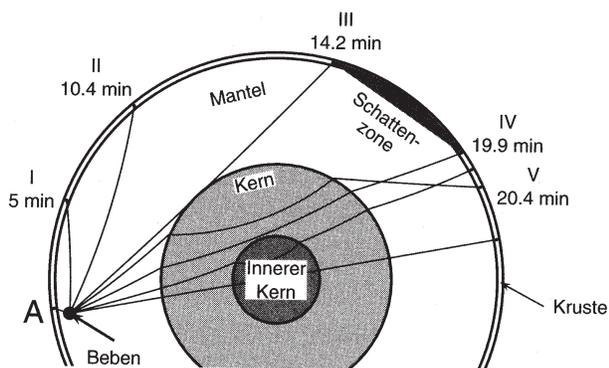


Abbildung 7.13: Ausbreitung von Wellen nach einem Erdbeben (aus: Dransfeld / Kienle / Kalvius, Physik I, Abb. 9.20)

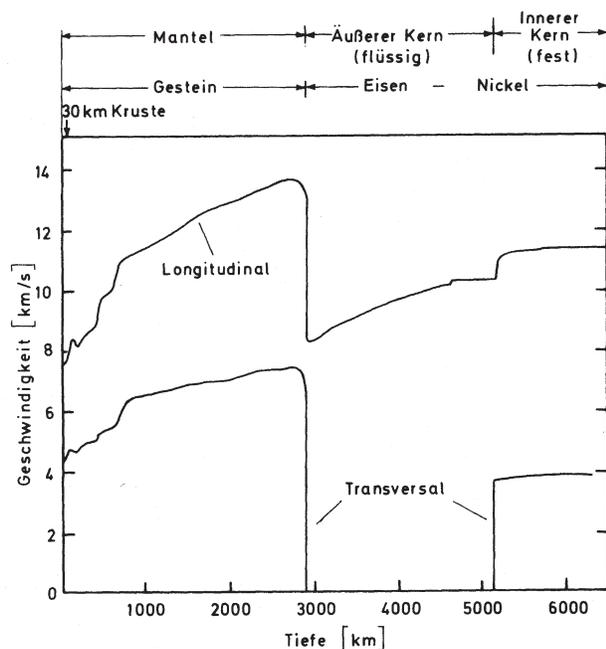


Abbildung 7.14: Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Erdtiefe (aus: Dransfeld/Kienle/Kalvius, Physik I, Abb. 9.21).

Im Zusammenhang mit Schallwellen sollten wir noch auf einige **Eigenschaften unseres Gehörs** (vgl. Abb. 7.15) eingehen.

Am empfindlichsten ist das menschliche Gehör bei Frequenzen um 1 kHz. Es kann dort minimale Schallintensitäten von ca. 10^{-12} W/m² wahrnehmen, was einer Druckänderung um 20 μ Pa bzw. einer Schwingungsamplitude der Luftmoleküle von lediglich 10^{-10} m entspricht.

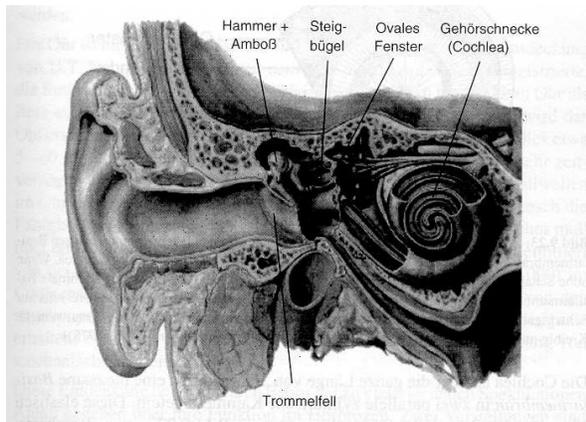


Abbildung 7.15: *Aufbau des menschlichen Ohrs.* (aus: Dransfeld / Kienle / Kalvius, *Physik I*, Abb. 9.22).

Die maximal detektierbare Intensität (Schmerzgrenze) liegt bei ca. 100 W/m^2 . Das Gehör hat damit einen dynamischen Bereich, der 14 Zehnerpotenzen umfasst.

Innerhalb dieses Bereichs besitzt das Ohr ein logarithmisches Lautstärkeempfinden [Weber-Fechner'sches Gesetz; Lautstärke $\propto \log(\text{Intensität})$].

Quantitativ wird diese Lautstärke in **Phon** bzw. in **Dezibel** (dB) angegeben. Hierbei ist $\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(I/I_0)$, wobei I_0 geeignet zu wählen ist (z. B. Hörschwelle). Die Einheit dB ist also dimensionslos und misst auf logarithmischer Skala die Schallintensität im Verhältnis zu einer Normier-Intensität I_0 . Man kann wegen $I \propto (\text{Druck})^2$ dB ebenfalls durch $20 \cdot \log_{10}(p/p_0)$ ausdrücken. Abb. 7.16 gibt die "Hörfläche" des menschlichen Gehörs in dB an. Hierbei ist die Normiereinheit die frequenzabhängige Hörschwelle $I_0(f)$. Die Kurve 0 dB bezeichnet gerade diese Hörschwelle. In Abb. 7.17 sind schließlich typische Schallpegel aufgetragen.

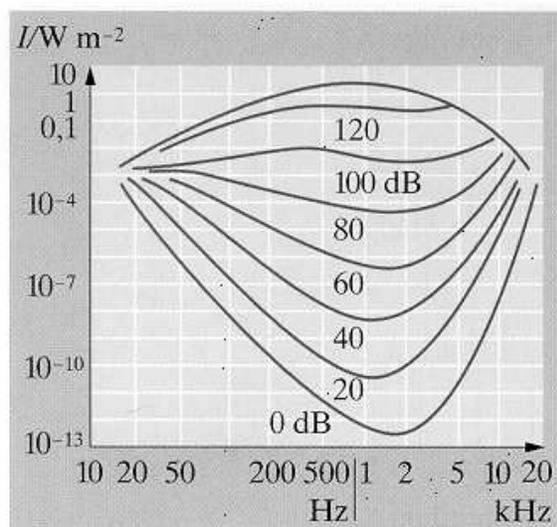


Abbildung 7.16: "Hörfläche" des menschlichen Gehörs (aus: Gerthsen *Physik*, Abb. 4.69).

Oberhalb von 20 kHz beginnt der Frequenzbereich des **Ultraschalls** bis zu Maximalfrequenzen von 20 GHz. Der daran anschließende Frequenzbereich heisst **Hyperschall**, dessen Maximalfrequenzen bei 20 THz liegen. Bei noch höheren Frequenzen würde die Wellenlänge des Schalls kürzer als der Atomabstand.

Man erzeugt Ultraschall beispielsweise durch **Piezokristalle** (z.B. Quarzkristalle). Diese ändern ihre Form bzw. ihre Dicke durch anlegen einer Spannung. Legt man eine hochfrequente Spannung an einen dieser Kristalle, so vibriert dieser mit der angelegten Frequenz und erzeugt dadurch Ultraschall. Umgekehrt erzeugt ein zur Vibration angeregter Piezokristall auch eine elektrische Spannung, die abgegriffen werden kann. Der Kristall wirkt dann als Mikrofon (wir demonstrieren beide Mechanismen im Experiment, sowie die Wirkung des auf eine Wasseroberfläche gerichteten Ultraschalls; auf dieser bildet sich ein "Springbrunnen").

Eine zweite Effekt, der die Erzeugung von Ultraschall ermöglicht, ist die **Magnetostriktion**. Bei einigen magnetischen Materialien ändert sich der Abstand der Gitterbausteine bei Anlegen eines Magnetfeldes. Bei Verwendung eines zeitlich oszillierenden Magnetfeldes lässt sich damit wiederum die Vibration des Kristalls erreichen.

Schließlich sollen einige weitere Wellenarten kurz erwähnt werden.

Elektromagnetische Wellen (im Detail: s. Physik II) umfassen ebenfalls einen extrem großen Frequenz- bzw. Wellenlängenbereich. Im Gegensatz zu akustischen Wellen benötigen sie kein Trägermedium, um sich auszubreiten. Bei Wellenlängen im m- bis km-Bereich spricht man von Radiowellen. Daran schließen sich Mikrowellen (Wellenlängen: cm ... 0.4 mm) an, gefolgt vom Infrarot (0.4 mm ... 0.4 μm). Das für das Auge sichtbare Licht umfasst lediglich die Wellenlängen 0.4 ... 0.7 μm . Zu kürzeren Wellenlängen folgen das Ultraviolett, für $\lambda < 10$ nm schließlich der Röntgen- und Gamma-Bereich. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik kann jeder Welle ein Quant und umgekehrt zugeordnet werden (**Welle-Teilchen-Dualismus**; Elektromagnetische Wellen: Photonen; Schall: Phononen). Analog besitzen Elektronen, Protonen oder andere Teilchen Welleneigenschaften. Generell gilt für **Materiewellen** die Zuordnung:

$$(\text{Impuls}) \vec{p} = \hbar \vec{k} \quad (\text{Wellenvektor})$$

$$(\text{Energie}) E = \hbar \omega \quad (\text{Kreisfrequenz})$$

Hierbei ist $\hbar \approx 10^{-34}$ Js das Planck'sche Wirkungsquantum.

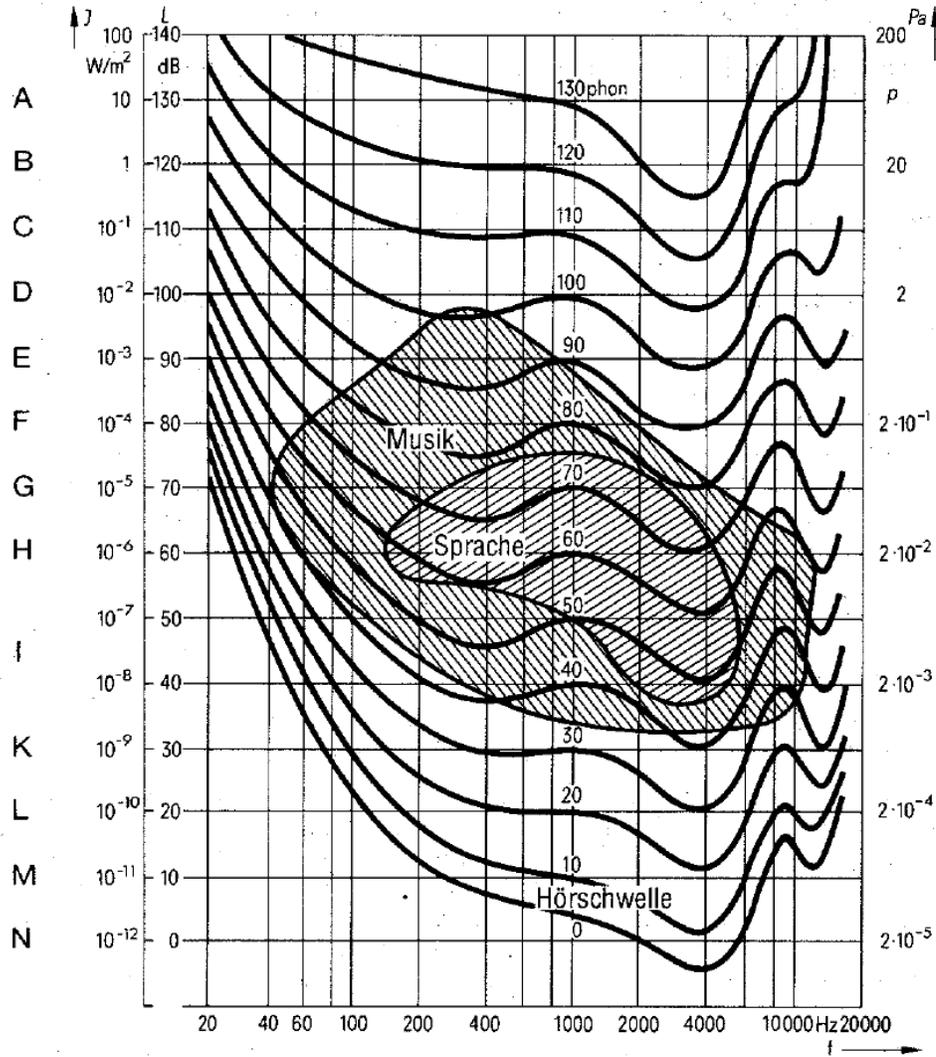
Für ein Elektron mit $E = 10\text{eV}$ (typische Bindungsenergie im Atom), $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg ergibt sich eine Geschwindigkeit $v = \sqrt{2E/m} \approx 2 \cdot 10^6$ m/s. Die Wellenlänge ist $\lambda = 2\pi/k = \hbar/p = \hbar/(mv) \approx 0.36$ nm, was ungefähr einem Atomdurchmesser entspricht. Für ω ergibt sich $2.5 \cdot 10^{15}$ Hz. Für ein Proton der Energie 10 MeV (Typische Energie im Atomkern) findet man mit $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg eine Wellenlänge von ca. 10^{-14} m, was von der Größenordnung des Kerndurchmessers ist. Für ein Objekt mit $m = 1\text{g}$, $v = 1$ mm/s ergibt sich eine Wellenlänge von ca. $6 \cdot 10^{-28}$ m. Die Wellenlängen makroskopischer Objekte sind also zu klein, um wahrgenommen werden zu können.

7.4.3 Einige allgemeine Eigenschaften von Wellen

Im folgenden betrachten wir einige ganz allgemeine Eigenschaften von Wellen, die für viele oder gar alle der oben angesprochenen Typen von Wellen gelten.

Lautstärke von Schallvorgängen

Kurven gleicher Lautstärke



Vergleichsschall

- | | |
|--|---|
| A Schmerzempfindung | F Großstadtverkehr |
| B Start einer Düsenmaschine (100 m entfernt) | G Großraumbüro |
| C Pop-Gruppe live | H Umgangssprache |
| D Preßlufthammer | I Insektengeräusche auf einer Wiese im Sommer |
| E Schwerlastverkehr | K Stille Wohnung |
| | L Taschenuhr (1 m entfernt) |
| | M Windstille Winternacht bei Schnee |
| | N Hörschwelle (= 20 µPa) |

Schalldruckpegel: $L = 20 \lg \frac{p}{p_0}$ in dB

(p = Schalldruck in µPa; $p_0 = 20 \mu$)

Abbildung 7.17: Lautstärke unterschiedlicher Schallvorgänge. Quelle: Skript Ihringer

Dopplereffekt

Der Dopplereffekt tritt auf, wenn sich ein Sender oder ein Empfänger relativ zueinander oder relativ zu dem die Wellen übertragenden Medium bewegen.

Wir nehmen zunächst an, sowohl **der Sender als auch der Empfänger ruhen**. Der Sender strahle Wellen der Frequenz f_0 bzw. der Wellenlänge λ_0 aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium sei c . Damit gilt $c = f_0\lambda_0$.

Der ebenfalls ruhende Empfänger hört die Frequenz f_0 ; er misst für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle den Wert c .

Wenn sich der **Empfänger mit der Geschwindigkeit u auf die Quelle zubewegt**, misst er eine höhere effektive Schallgeschwindigkeit $c_{eff} = c + u$. Er hört demnach die Frequenz

$$f = \frac{c_{eff}}{\lambda_0} = \frac{u + c}{\lambda_0} = f_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right) \quad (7.67)$$

Die relative Frequenzverschiebung $\Delta f/f_0 = (f - f_0)/f_0$ beträgt: $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{u}{c}$.

Wenn sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit $u' = -u$ vom Sender wegbewegt, erhält man genau das selbe Ergebnis $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{u'}{c} = -\frac{u}{c}$. Die Frequenz ist jetzt lediglich zu niedrigeren Werten verschoben.

Ein etwas anderer Gedankengang muss verwendet werden, wenn der **Empfänger ruht** und sich der **Sender mit der Geschwindigkeit v auf den Empfänger zu bewegt**.

Der Sender bewegt sich jetzt in den von ihm erzeugten Wellenzug hinein. In einer Schwingungsperiode $T = 1/f_0$ legt er dabei den Bruchteil $\Delta\lambda = vT = v/f_0$ der Wellenlänge λ_0 zurück. Die vom Sender ausgesandten Wellenmaxima haben deshalb den Abstand $\lambda_{eff} = \lambda_0 - \Delta\lambda = \lambda_0 - v/f_0$. Der Empfänger misst die Schallgeschwindigkeit c . Die Frequenz, die er jetzt hört, beträgt:

$$f = \frac{c}{\lambda_{eff}} = \frac{c}{\lambda_0 - v/f_0}. \quad (7.68)$$

Bewegt sich der Sender vom Empfänger weg, so erhält man das selbe Ergebnis, mit $v < 0$.

Für $v \ll c$ lässt sich das Ergebnis nähern als $f = f_0 \left(\frac{1}{1-v/c}\right) \approx f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$, bzw: $\frac{\Delta f}{f_0} \approx v/c$. Bei nicht allzu großen Geschwindigkeit erhält man also die gleiche Frequenzverschiebung wie im Fall des bewegten Empfängers.

Dopplereffekt bei elektromagnetischen Wellen

Bei elektromagnetischen Wellen muss der Dopplereffekt etwas anders behandelt werden, da sich diese Wellen einerseits ohne ein Medium ausbreiten, andererseits ein Beobachter unabhängig von seinem eigenen Bewegungszustand immer die gleiche Lichtgeschwindigkeit misst.

Die genaue Behandlung benötigt den Formalismus der speziellen Relativitätstheorie, die Sie im nächsten Semester kennenlernen werden. Wir geben hier nur das Ergebnis für die Frequenzverschiebung an:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \quad (7.69)$$

Hierbei ist v die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger ("+" , falls sich die beiden aufeinander zubewegen).

Für $v/c \ll 1$ erhält man durch Taylor-Entwicklung: $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f-f_0}{f_0} \approx \frac{v}{c}$, was das Ergebnis für den akustischen Fall für $u, v \ll c$ reproduziert.

Eine Anwendung des Dopplereffekts mit elektromagnetischen Wellen ist der Polizeiradar oder die Laserpistole (s. Einleitung).

Mach'scher Kegel und Schockwellen

Wir kehren nun zurück zu akustischen Wellen und betrachten die Schallausbreitung durch **Objekte**, die sich mit **Überschallgeschwindigkeit** bewegen.

Das Objekt erzeuge zur Zeit $t = 0$ einen Schallpuls. Dieser Puls breitet sich in Form einer Kugelwelle in den Raum aus und hat zur Zeit $t_1 = \Delta t$ einen Radius $r = c\Delta t$. Das Geschoss selbst hat in der Zeit Δt die Strecke $v\Delta t$ zurückgelegt. Zu Zeit $t_2 = 2\Delta t$ hat der zur Zeit 0 abgesandte Puls einen Radius $2c\Delta t$ erreicht, ein zur Zeit t_1 abgesandter Puls den Radius $c\Delta t$. Das Objekt selbst hat die Strecke $2v\Delta t$ zurückgelegt. Diese Situation ist graphisch in Abb. 7.18 veranschaulicht.

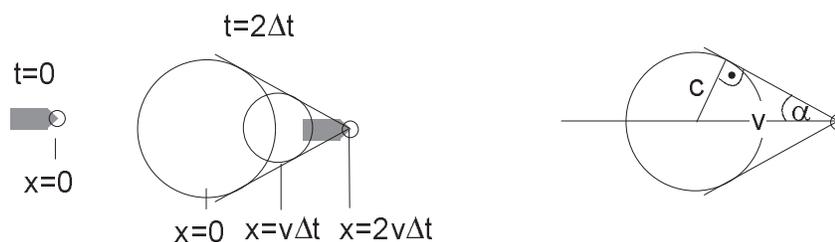


Abbildung 7.18: Schallausbreitung durch ein überschallschnelles Objekt. Links: Schallpuls entsteht zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$. Mitte: Die Schallpulse zur Zeit $t_1 = \Delta t$ und zur Zeit $t = 0$ haben sich über einen Radius $c\Delta t$ bzw. $2c\Delta t$ vom Entstehungsort ausgebreitet. Rechts: Geometrische Darstellung des Öffnungswinkels des "Machschen Kegels"

Das Geschoss zieht offensichtlich einen Schallkegel, den "Mach'schen Kegel" nach sich, dessen Öffnungswinkel sich aus der Abb. 7.18 zu $\sin \alpha = c/v$ ergibt. Die Abb. 7.19 zeigt eine Aufnahme eines überschallschnellen Geschosses. Der Machsche Kegel ist deutlich erkennbar.

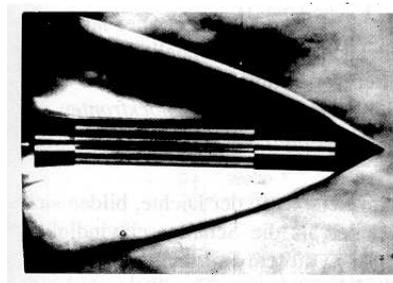


Abbildung 7.19: Hochgeschwindigkeitsaufnahme eines überschallschnellen Geschosses. Quelle: Dransfeld / Kienle / Vonach, Physik I

Die Größe $M = (\sin \alpha) - 1 = v/c$ wird Machzahl genannt. Man beachte, dass speziell für $M = 1$ $\alpha = 90^\circ$ ist. Das Geschoss fliegt dann auf gleicher Höhe mit der flachen "Schallmauer".

Nahe des Mach'schen Kegels wird die relative Schallamplitude, d. h. die relative Druckschwankung $\Delta p/p$ sehr groß. Die Schallgeschwindigkeit war ihrerseits proportional zu $\sqrt{p/\bar{\rho}}$ bzw. proportional zu $T^{1/2}$. In den adiabatisch verdichteten Bereichen sind Druck und Temperatur deutlich höher als in den dekomprimierten Bereichen. Damit breiten sich ähnlich wie bei der Brandung im Fall der Wasserwellen die verdichteten Regionen schneller aus als die dekomprimierten. Dadurch steilt sich die Vorderkante der Schallfront zu einer Schockfront auf, an der sich Druck und Temperatur enorm rasch auf Distanzen um $0.1 \mu\text{m}$ ändern. In der Schockfront können Temperaturen von mehreren 1000 K auftreten. Beispielsweise werden für ein sich mit $M = 9$ in 16 km Höhe bewegendes Objekt in der Schockfront Temperaturen um 5000 K erreicht.

In speziell konzipierten Schockrohren (Gaskanonen) lässt man ein unter hohem Druck (z. B. 40 bar) stehendes Gasvolumen aus H_2 rapide in einen praktisch evakuierten Bereich (Druck: wenige mbar) ausbreiten. Hierbei rast eine Schockwelle durch das Rohr, an deren Vorderfront Temperaturen von 20.000 K und mehr erreicht werden.

Reflexion, Stehwellen und Interferenz

*Reflexion von Wellen*³

Kehren wir nochmals zur Abb. 7.12 zurück und betrachten die Reflexion von Wellen. Das eingespannte Ende eines Seiles oder Stabes muss in Ruhe bleiben, wenn die Welle hier ankommt. Diese Randbedingung lässt sich elegant dadurch erfüllen, dass man sich das Seil über den Verankerungspunkt hinaus verlängert vorstellt und eine Welle entgegengesetzten Vorzeichens auf diesen Punkt zulaufen lässt (Abb. 7.20). Man hat damit erreicht, dass der Verankerungspunkt bei der "Kollision" der beiden Wellen in Ruhe bleibt. Nach der "Kollision" wechseln realer und virtueller Puls ihre Rolle; die Welle ist reflektiert worden. Für eine sinusförmige Welle lässt sich auch sagen, die **Reflexion am festen Ende** führt zu einem "Phasensprung" um π .

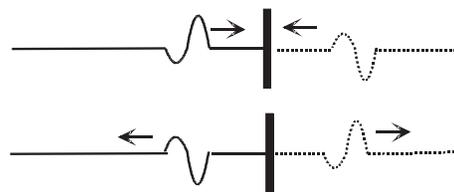


Abbildung 7.20: *Reflexion einer Welle am festen Ende als "Kollision" mit einer viertellen Welle (gestrichelte Linie)*

Wenn der Puls auf ein **offenes Ende** zuläuft, wird das Seilende dagegen voll ausschlagen, was letztlich den Ausgangspuls reproduziert. Es findet also **kein Phasensprung** statt.

Stehwellen

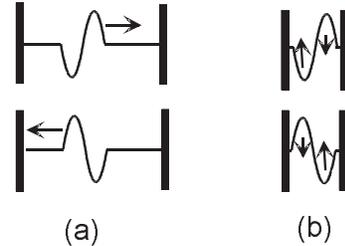
Stellen wir uns jetzt einen Puls vor, der zwischen zwei eingespannten Enden hin- und herläuft (Abb. 7.21a). Wenn wir die Einspannpunkte immer mehr verkürzen, erhalten wir die in Abb. 7.21b dargestellte Situation. Die Welle läuft nicht mehr, sondern bildet eine stationäre Stehwelle.

³Die folgenden Abschnitte (Reflexion Stehwellen, Interferenz) sind sehr kurz gefasst. Diese Effekte werden im 2. Semester ausführlich beschrieben

Man kann ganz allgemein eine **Stehwelle als Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender** (periodischer) **Wellen** auffassen. Dies lässt sich leicht durch Rechnung verifizieren:

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 \cdot \sin(\omega t - kx) - y_0 \cdot \sin(\omega t + kx) \\
 &= y_0 \cdot [\sin(\omega t) \cos(kx) - \cos(\omega t) \sin(kx)] \\
 &\quad - y_0 \cdot [\sin(\omega t) \cos(kx) + \cos(\omega t) \sin(kx)] \\
 &= -2y_0 \cos(\omega t) \sin(kx)
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

Der erste Term auf der rechten Seite der ersten Zeile entspricht der einlaufenden Welle, der zweite der reflektierten Welle. Man beachte das "-"-Zeichen, das den Phasensprung bei der Reflexion berücksichtigt. Der Ausdruck in der letzten Zeile enthält die Ortsfunktion $\sin(kx)$, die mit der Funktion $\cos(\omega t)$ multipliziert ist. Jeder Punkt x führt also eine Oszillation mit der Amplitude $y_0 \sin(kx)$ aus.



Betrachtet man zwei fest eingespannte Enden einer Saite, einer Feder oder eines Seils der Länge L , so muss $\sin(kx)$ für $x = 0$ und für $x = L$ verschwinden. Hieraus folgt, dass k die Werte $n\pi/L$, mit $n = 1, 2, 3, \dots$ annehmen kann. Mit $k = 2\pi/\lambda$ folgt: $L = n\frac{\lambda}{2}$, es "passen" also Vielfache einer halben Wellenlängen zwischen die eingespannten Enden.

Abbildung 7.21: Konstruktion einer Stehwelle durch wiederholte Reflexion einer laufenden Welle

Genau diese Stehwellen können angeregt werden, wenn man beispielsweise an einer Saite zupft. Der Grundton etwa des Tons "A" liegt bei ca. 100 Hz. Die Saite schwingt dabei mit der Frequenz f_0 , bei Obertönen nf_0 . Diese Obertöne entsprechen der Bedingung $L = n\frac{\lambda}{2}$. Halbiert man durch Fingerdruck die Saite erhält man Grundschwingungen der beiden Hälften bei $2f_0$, sowie Obertöne bei $2nf_0$. Die Saitenverhältnisse, die gespielt werden müssen, sind z. T. relativ kompliziert. So entspricht eine kleine Sekunde einem Verhältnis 16:15. Bei der großen Sekunde ist das Verhältnis 9:8, bei der großen Terz 6:5, bei der Quarte 4:3, der reinen Quinte 3:2 und bei der großen Sexte 5:3.

Auch bei offenen Enden lassen sich Stehwellen erzeugen. Hierbei schwingen die Enden maximal durch, man erhält eine Serie $\cos(kx)$ von Stehwellen, mit $k = \pi/L$. Ist ein Ende z. B. eines Stabes eingespannt, das andere offen, so ergeben sich Stehwellen für $L = (2n + 1)\lambda/4$, mit $n = 0, 1, 2, \dots$

Stehwellen dieser Art können mit dem Quinke-Rohr hörbar gemacht werden. Hier ist am oberen Ende eines zylindrischen Rohrs ein Lautsprecher angebracht. Im Rohr befindet sich Wasser. Die Distanz L zwischen Lautsprecher und Wasseroberfläche kann variabel eingestellt werden. Die Wasseroberfläche entspricht dem offenen Ende (die Amplitude der Druckschwankungen ist hier nicht fixiert), der Lautsprecher dem geschlossenen Ende.

Auch in zwei bzw. drei Raumdimensionen treten Stehwellen auf. In 2D demonstrieren wir dies an Hand einer runden Plexiglasscheibe, deren Zentrum durch einen vibrierenden Stab mit variabler Frequenz angeregt wird. Die Platte ist mit feinkörnigem Pulver bestreut, das sich in den Minima der Stehwellen ansammelt. Die Stehwellen haben für diese Geometrie Nullstellen in radialer Richtung, u. U. aber auch in azimuthaler Richtung⁴.

⁴Die mathematische Behandlung würde auf Besselfunktionen führen, die die Amplitude dieser Stehwellen beschreiben.

Für eine quadratische (2D) bzw. kubische Form (3D) ist die Ortsabhängigkeit der Stehwellen von der Form $\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z)$, wobei die Wellenzahlen in x , y bzw. z die Bedingungen $k_x = \pi n_x/a$, $k_y = \pi n_y/a$, $k_z = \pi n_z/a$, mit $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$ erfüllen. Man fasst die Wellenzahlen (k_x, k_y, k_z) zum "Wellenvektor" \vec{k} zusammen. Der Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz ω und dem Wellenvektor \vec{k} ist im einfachsten Fall: $\omega^2 = c^2 k^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$. Für den Würfel (Kantenlänge a) erhält man: $\omega^2 = c^2 \frac{\pi^2}{a^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$. Für die Stehwelle mit der niedrigsten Frequenz ist eine der Zahlen n_x, n_y, n_z gleich 1, die beiden anderen sind 0.

Wichtig sind solche zwei- oder dreidimensionalen Resonanzen beispielsweise in der Mikrowellentechnik. Man verwendet z. B. Hohlleiter (offene Rohre mit rechteckigem Querschnitt). Die elektromagnetische Welle kann sich entlang des Hohlleiters (in z -Richtung) ausbreiten, die Feldkomponenten in (x, y) Richtung werden wiederum durch Ortsfunktionen $\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y)$ (bzw. $\cos(k_x x) \cdot \cos(k_y y)$), mit diskreten Werten (k_x, k_y) beschrieben. Ein Beispiel für akustische Wellen ist unser Kehlkopf. Hier regen die Stimmbänder ganz bestimmte Wellenzahlen an. Für eine gegebene Stehwelle ist $\omega = \text{const.} \cdot c$. Erhöht man c (Einatmen von He-Gas), wird damit ω drastisch erhöht, wie wir im Experiment bestätigen.

Interferenz

Auf einer Wasseroberfläche (x, y) sollen N Quellen Wellen der Form $z_n(x, y, t)$ erzeugen. Diese Wellen überlagern sich zu einer Gesamtwellen $z(x, y, t) = \sum_{n=1}^N z_n(x, y, t)$.

Der einfachste Fall besteht in der Überlagerung zweier ebener, sich in x -Richtung ausbreitender Wellen: $z = z_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + z_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t + \varphi)}$. Hierbei haben wir angenommen, dass die Wellen am Ort x eine Phasenverschiebung φ haben. Frequenz, Wellenzahl und Amplitude a der beiden Wellen seien gleich, d. h. $z_1 = z_2 = \hat{z}$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $k_1 = k_2 = k$. Die Intensität der Welle ist dann $I = |A|^2 = [2a(1 + \cos \varphi)]^2$. Sind die beiden Teilwellen in Phase ($\varphi = 0$) ist $I = 4\hat{z}^2$ bzw. $z(x, t) = 2\hat{z} e^{i(k_1 x - \omega t)}$. Für $\varphi = \pi$ löschen sich die Wellen dagegen vollständig aus: $z(x, t) = 0$.

Im Experiment demonstrieren wir die Überlagerung von Wellen in zwei Dimensionen (Wellenwanne). Wir betrachten qualitativ die Überlagerung der von zwei Quellen ausgehenden Kreiswellen, die Wellen, die durch einen Spalt durchtreten sowie die Interferenz von Wellen beim Durchgang durch zwei benachbarte Spalte. In allen Fällen wechseln sich Bereiche maximaler Amplitude mit Nullstellen in $z(x, y, t)$ ab. Diese Interferenzerscheinungen werden wir im Zusammenhang mit der Behandlung elektromagnetischer Wellen detailliert analysieren.

Schließlich seien einige Wellen erwähnt, die entsprechend dem Welle-Teilchen-Dualismus aus der kohärenten Überlagerung einer sehr großen Zahl von Quanten gehörenden hervorgehen. Hierzu gehören:

- **Laserlicht:** kohärente Überlagerung von Photonen
- **Supraleiter:** kohärente Überlagerung von Elektronenpaaren
- **Bose-Einstein-Kondensate:** kohärente Überlagerung elektrisch neutraler Gasatome (Alkaliatome)
- **Superfluide:** Kohärente Überlagerung von elektrisch neutralen ^4He -Atomen oder von Paaren von ^3He -Atomen

Diese Systeme spielen in der modernen Physik eine enorm wichtige Rolle. Sie werden ihre Eigenschaften in späteren Semestern kennenlernen.

7.5 Gekoppelte Schwingungen im Kristallgitter

Wir betrachten jetzt die Eigenschwingungen, die die regelmäßig angeordneten Atome im Kristall ausführen können.

In einem Kristall wiederholt sich eine Anordnung von \tilde{m} Atomen periodisch in allen Raumrichtungen. Man kann den Kristall durch wiederholtes Aneinanderfügen eines geeignet geformten Volumens ("Einheitszelle") erhalten, das gerade diese \tilde{m} Atome enthält. Der gesamte Kristall bestehe aus N Einheitszellen, enthalte also $N \cdot \tilde{m}$ Atome. Jedes dieser Atome kann sich in drei Raumrichtungen verschieben, sowie Drehungen um 3 Achsen durchführen. Der gesamte Kristall hat also $3N \cdot \tilde{m}$ Freiheitsgrade der Bewegung. Hierbei entsprechen 3 Freiheitsgrade der Translation des gesamten Kristalls und drei Freiheitsgrade der Rotation des Kristalls. Die übrigen $3N \cdot \tilde{m} - 6$ Freiheitsgrade entsprechen Schwingungen der Atome gegeneinander.

7.5.1 Die einatomige lineare Kette

Bevor wir den allgemeinen Fall behandeln, betrachten wir zunächst ein stark vereinfachtes Modell, bei dem N identische Atome (Masse: M) in x -Richtung in Form einer Kette aufgereiht sind (einatomige lineare Kette). Die Atome sollen sich nur in x -Richtung bewegen können und um Gleichgewichtspositionen x_n^0 herum schwingen können. Die entsprechende Anordnung ist in Abb. 7.22 skizziert.

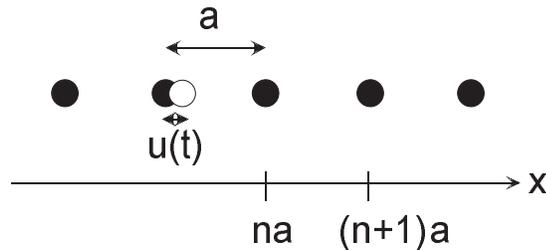


Abbildung 7.22: Einatomige lineare Kette.

Der Gleichgewichtsabstand der Atome sei a , wobei sich das erste Atom bei $x = 0$ befindet. Für den Gleichgewichtsabstand x_n^0 gilt daher: $x_n^0 = na$. Die zeitabhängige Position des Atoms n ist: $x_n(t) = na + u_n(t)$, wobei $u_n(t)$ Schwingungen beschreibt. Im Folgenden benutzen wir aus Gründen der Einfachheit⁵ **zyklische Randbedingungen**, d. h. wir nehmen an, Atom 1 sei identisch mit Atom N (dies lässt sich dadurch erreichen, dass wir die Enden der Kette zu einem Ring verbinden).

Weiter sei die Kraft zwischen Atom n und seinen nächsten Nachbarn an den Positionen x_{n+1} und x_{n-1} durch das Hook'sche Gesetz beschrieben, d. h. proportional zur relativen Vergrößerung des Abstands dieser Atome über den Gleichgewichtsabstand a hinaus.

Es gilt also:

$$F_{n,n-1} = D(u_{n-1} - u_n) = D(u_{n-1} - u_n) \quad (7.71)$$

bzw.

$$F_{n,n+1} = -D(u_{n+1} - u_n), \quad (7.72)$$

mit der Federkonstanten D .

Die Kräfte zwischen weiter entfernten Atomen, d. h. $F_{n,n-2}$ usw., sollen vernachlässigt werden.

⁵Eine analoge Rechnung ließe sich auch für offene Randbedingungen durchführen.

Die Gesamtkraft auf das Atom n ist: $F_n = D(n_{n+1} - u_n) + D(u_{n+1} - u_n)$,
die **Newton'sche Bewegungsgleichung** für dieses Atom lautet:

$$M\ddot{u} = D \cdot (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad \text{mit} \quad n = 1, \dots, N \quad (7.73)$$

Wir nehmen jetzt an, alle Atome schwingen mit der gleichen Frequenz ω , d. h. wir wählen den **Ansatz**: $u_n = \hat{u}_n e^{-i\omega t}$.

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert:

$$-M\omega^2 \hat{u}_n = D \cdot (\hat{u}_{n+1} + \hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n) \quad (n = 1..N) \quad (7.74)$$

Mit $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ können wir dies in der Matrixform:

$$-\frac{M\omega}{D} \vec{u} = \overleftrightarrow{A} \vec{u} \quad (7.75)$$

schreiben. Hierbei sind die Diagonalelemente A_{nn} der $N \times N$ -Matrix⁶ \overleftrightarrow{A} gleich -2 , die Elemente $A_{n,n-1}$ und $A_{n,n+1}$ gleich 1 und alle anderen Elemente gleich 0 .

Gleichung 7.75 hat die Form einer Eigenwertgleichung, wie Sie sie bei der Behandlung zweier gekoppelter Pendel kennengelernt haben. Allerdings ist die Matrix jetzt erheblich größer.

Wenn man die lineare Kette an einem Atom anstößt, breitet sich eine Welle entlang der Kette aus. Es liegt daher Nahe, einen Ansatz für die Atompositionen \hat{u}_n so zu wählen, dass die Atompositionen eine Welle e^{ikx} "abtasten".

Wir setzen deshalb an: $\hat{u}_n = u \cdot e^{ikna}$.

Einsetzen in 7.74 liefert:

$$-M\omega^2 u e^{ikna} = D \cdot u \cdot (e^{ik(n+1)a} + e^{ik(n-1)a} - 2e^{ikna}) \quad (7.76)$$

Kürzen von u und Multiplikation mit e^{-ikna} liefert:

$$M\omega^2 = -D(e^{ika} + e^{-ika} - 2) = 2C(1 - \cos ka) \quad \text{bzw} \quad \omega^2 = \frac{2D}{M}(1 - \cos ka) \quad (7.77)$$

Es gilt: $1 - \cos(ka) = 2 \sin^2(ka/2)$, woraus folgt

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (7.78)$$

Für die Amplituden $x_n(t)$ erhalten wir schließlich: $x_n(t) = na + u \cdot e^{i(nka - \omega t)}$

(bzw. im reeller Schreibweise: $xn(t) = na + u \cdot \cos(nka - \omega r)$)

Wir müssen jetzt diskutieren, welche Werte k annehmen kann.

Zunächst ist zu beachten, dass zur Phase $k \cdot a$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π addiert werden kann, ohne den Wert von $x_n(t)$ zu ändern. Daher kann $k \cdot a$ auf den Wertebereich

⁶Die zyklischen Randbedingungen können wir dadurch berücksichtigen, dass wir die Matrix um eine 0-te Zeile bzw. Spalte erweitern, die wiederum die Elemente u_N enthält.

$-\pi \leq ka \leq \pi$ eingeschränkt werden. Dieses Intervall nennt man auch die "1. Brillouin-Zone" (eine analoge Definition lässt sich auch in 3 Dimensionen machen). Die Abb. 7.23 zeigt die Funktion $\omega(k)$

Jetzt nutzen wir die Annahme zyklischer Randbedingungen aus. Es gilt: $u_n = u_{N+n}$ und damit:

$$e^{inka} = e^{i[(n+N)ka+2\pi l]} \quad (7.79)$$

Hierbei ist l eine ganze Zahl. Der Ausdruck $2\pi l$ gibt an, dass die Phase nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Hieraus folgt: $Nka = 2\pi l$ und daraus:

$$k = \frac{2\pi}{Na} \cdot l. \quad (7.80)$$

Da ka nur zwischen $-\pi$ und π zu variieren braucht, kann man l einschränken auf die ganzen Zahlen zwischen $-N/2$ und $N/2$. Dies sind N unabhängige Werte (eigentlich $N+1$; man beachte aber, dass durch die zyklischen Randbedingungen ist aber der erste und der letzte Wert äquivalent).

Damit nimmt k N Werte an, also genau der Zahl der Freiheitsgrade entspricht, die in einer Dimension zu "vergeben" sind. Der Wert $k = 0$ entspricht dabei der Translation der gesamten Kette.

Die Abb. 7.24 illustriert, dass k -Werte außerhalb der 1. Brillouin-Zone keine Informationen an den durch die Atome vorgegebenen Positionen liefert, die nicht auch durch eine Welle mit $|ka| < \pi$ geliefert würde.

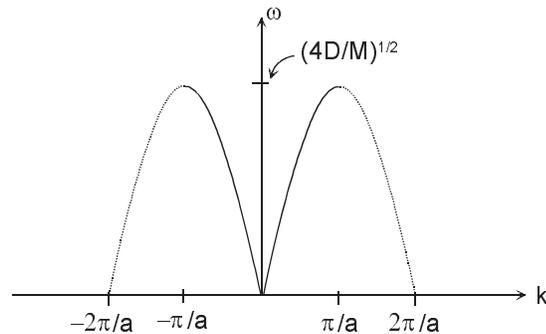


Abbildung 7.23: Dispersionsrelation $\omega(k)$ der einatomigen linearen Kette.

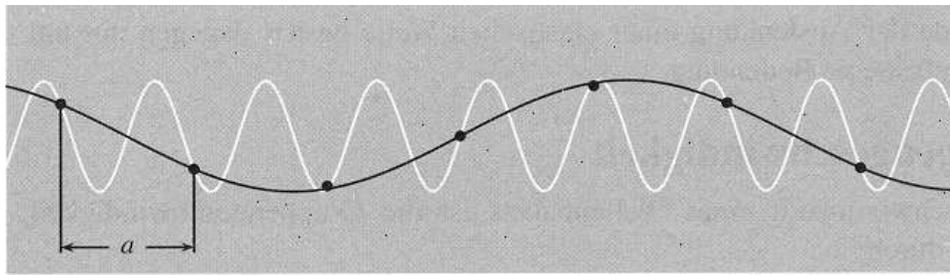


Abbildung 7.24: Die Welle der durchgezogenen Kurve übermittelt keine Information, die nicht auch durch die gestrichelte Kurve gegeben wird. Man braucht nur Wellenlängen größer als $2a$, um die Bewegung der Atome wiederzugeben (aus Ch. Kittel, Festkörperphysik, Abb. 4.5)

Wir betrachten jetzt die Lösungen $u_n(t)$ bei $k = \pm\pi/a$ (d. h. am Zonenrand):

$$u_n = u \cdot e^{\pm i\pi n} e^{-i\omega t} = u \cdot (-1)^n \cdot e^{-i\omega t} \quad (7.81)$$

Dies entspricht einer *stehenden Welle*. Benachbarte Atome schwingen dabei abwechselnd voneinander weg und zueinander hin.

Im Grenzfall $ka \ll 1$ (langwelliger Grenzfall) gilt: $\sin ka/2 \approx ka/2$ und damit:

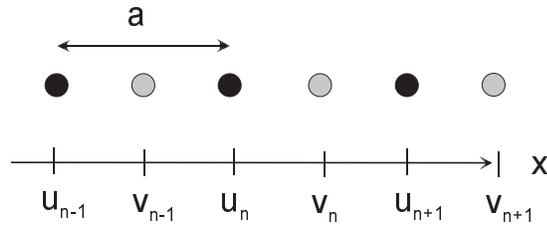
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{M}} \cdot s \cdot k \equiv ck. \quad (7.82)$$

Hier wird also der Zusammenhang zwischen ω und k für Schallwellen reproduziert.

7.5.2 Die zweiatomige lineare Kette

Wir diskutieren nun die Eigenschwingungen einer eindimensionalen Kette aus 2 unterschiedlichen Atomen mit Massen M_1 , M_2 (s. Abb. 7.25)

Die Vorgehensweise besteht darin, der einen Atomsorte die Koordinaten u_n , der anderen die Koordinaten v_n zu geben.



Es ergeben sich ganz analog zur einatomigen linearen Kette die Bewegungsgleichungen:

$$M_1 \ddot{u}_n = D \cdot (v_n + v_{n-1} - 2u_n) \quad (7.83a)$$

$$M_2 \ddot{v}_n = D \cdot (u_{n+1} + u_n - 2v_n) \quad (7.83b)$$

Abbildung 7.25: Eindimensionale zweiatomige Kette

Mit dem Ansatz $u_n = u \cdot e^{i(nka - \omega t)}$; $v_n = v \cdot e^{i(nka - \omega t)}$ findet man das Gleichungssystem:

$$-\omega^2 M_1 u = Dv[1 + e^{-ika}] - 2Du \quad (7.84a)$$

$$-\omega^2 M_2 v = Du[1 + e^{ika}] - 2Dv \quad (7.84b)$$

Diese beiden Gleichungen stellen wiederum ein Eigenwertproblem für die Größen u und v dar. Kombiniert man (u, v) zu einem Vektor so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2D - M_1 \omega^2 & -D \cdot [1 + e^{-ika}] \\ -D \cdot [1 + e^{ika}] & 2D - M_2 \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (7.85)$$

Die Determinante der 2×2 -Matrix muss verschwinden, um eine nichttriviale Lösung zu erhalten. Dies liefert:

$$M_1 M_2 \omega^4 - 2C \cdot (M_1 + M_2) \omega^2 + 2C^2 (1 - \cos ka) = 0 \quad (7.86)$$

was eine quadratische Gleichung für ω^2 darstellt, also elementar gelöst werden kann. Wir betrachten aber nur zwei Grenzfälle:

- Lösung für $ka \ll 1$:

$$\omega^2 = 2D \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \quad (\text{"optischer Zweig"}) \quad (7.87)$$

oder

$$\omega^2 = \frac{C}{2(M_1 + M_2)} k^2 a^2 \quad (\text{"akustischer Zweig"}) \quad (7.88)$$

- Lösung an der Zonengrenze bei $k = \pm\pi/a$:
$$\omega^2 = \frac{2D}{M_1} \quad (7.89)$$

oder
$$\omega^2 = \frac{2D}{M_2} \quad (7.90)$$

Die kompletten Lösungen $\omega(k)$ sind in Abb. 7.26 aufgetragen.

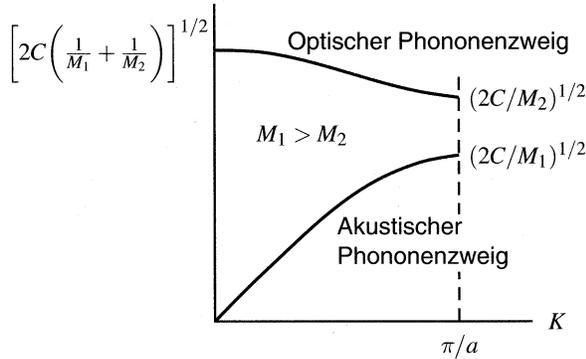


Abbildung 7.26: *Optischer und akustischer Zweig der linearen zweiatomigen Kette. Die Wellenzahl ist in der Abbildung mit K bezeichnet, die Federkonstante mit D . (aus Ch. Kittel, Festkörperphysik, Abb. 4.7)*

Für $ka \ll 1$ schwingen auf dem akustischen Zweig die beiden Atomsorten im wesentlichen miteinander. Auf dem optischen Zweig dagegen gegeneinander. An der Zonengrenze erhält man wiederum eine Stehwelle, wobei bei der ersten Lösung die Atome der Sorte 1 gegeneinander schwingen und die Atome der Sorte 2 in Ruhe sind. Bei der zweiten Lösung sind die Atome der Sorte 1 in Ruhe, die Atome der Sorte 2 schwingen gegeneinander. In Abb. 7.27 sind die Schwingungsmoden für $ka \ll 1$ skizziert.

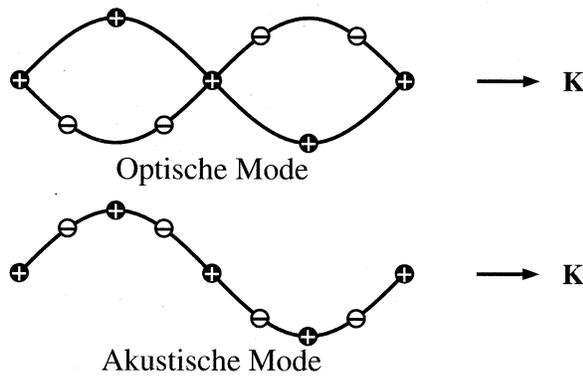


Abbildung 7.27: *Optische und akustische Mode der zweiatomigen linearen Kette für $ka \ll 1$. Die Verschiebungen der Atome sind in transversaler Richtung aufgetragen. (aus Ch. Kittel, Festkörperphysik, Abb. 4.10)*

Durch die beiden Zweige erhält man $2N$ Werte für die Wellenzahl k . Dies entspricht wiederum der Zahl der Freiheitsgrade der $2N$ Atome. Betrachtet man allgemein \tilde{m} unterschiedliche Atome, so erhält man insgesamt \tilde{m} Zweige, von denen einer für $k = 0$ bei $\omega = 0$ beginnt (akustischer Zweig). Alle anderen Zweige beginnen bei endlichen Werten von ω (optische Zweige).

7.5.3 Gekoppelte Schwingungen in drei Dimensionen

Lässt man bei der linearen Kette weiter die Bewegung der Atome in alle drei Raumrichtungen zu, so verdreifacht sich die Zahl der Lösungen. Jeder Zweig spaltet in zwei

transversale Moden und eine longitudinale Mode auf. Hierbei sind die transversalen Moden oft entartet, d. h. sie haben für festes k die gleiche Frequenz.

Auch in diesem allgemeineren Fall liegen alle verfügbaren Schwingungsfreiheitsgrade innerhalb der ersten Brillouin-Zone.

Geht man weiter zu dreidimensionalen Atomanordnungen über, so vergrößert sich die Zahl der Freiheitsgrade bzw. die Zahl der Zweige nicht mehr. Die Wellen können sich aber in verschiedene Kristallrichtungen ausbreiten, man muss von der Wellenzahl k zum Wellenvektor \vec{k} übergehen. Graphisch wird dann $\omega(\vec{k})$ entlang besonders symmetrischer Kristallrichtungen aufgetragen. Die Abb. 7.28 zeigt dies am Beispiel von Germanium. Hier wurde $\omega(\vec{k})$ entlang der Raumdiagonalen [”(111)-Richtung“].

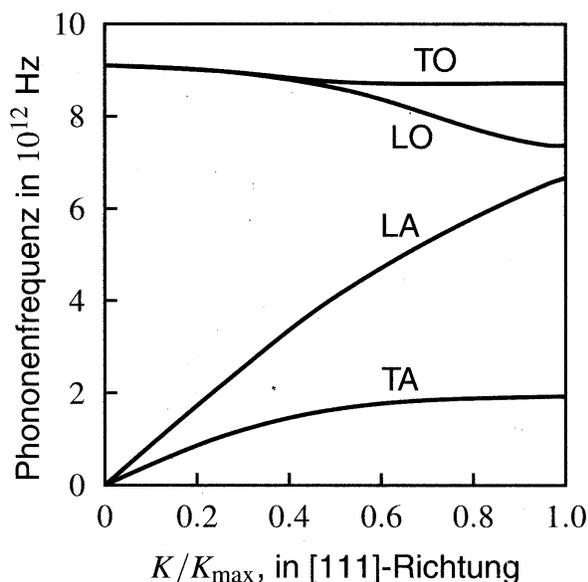


Abbildung 7.28: *Dispersionsrelation entlang der Raumdiagonalen [”(111)-Richtung“]. TO: Transversal-optischer Zweig; LO: Longitudinal-optischer Zweig; LA: Longitudinal akustischer Zweig; LO: Longitudinal-optischer Zweig.* (aus Ch. Kittel, *Festkörperphysik*, Abb. 4.8a)

Abb. 7.29 zeigt die mit Hilfe von Neutronen-Streuexperimenten gemessene Dispersionsrelation von GaAs entlang verschiedener Kristallrichtungen. Das Symbol Γ entspricht dem Ursprung, d. h. $k = 0$.

Die Abb. 7.30 zeigt schließlich die berechneten Eigenmoden der supraleitenden Verbindung $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$, die 15 Atome in der Einheitszelle enthält. Entsprechend komplex ist die Zahl der Phononzweige. Man sieht aber sehr schön, dass am Γ -Punkt ($k = 0$) jeweils drei akustische Zweige beginnen. Die optischen Zweige sind z. T. entartet. Es sind aber insgesamt 42 optische Zweige zu jedem k -Wert vorhanden.

7.5.4 Nichtlineare Effekte

Abschließend wollen wir noch kurz erwähnen, dass eine Vielzahl neuer Effekte auftreten, wenn Schwingungen nichtlinear werden, d. h. die Rückstellkräfte nicht mehr proportional zur Auslenkung sind (Beim Fadenpendel war die Rückstellkraft ja eigentlich proportional zum Sinus aus dem Aulenkwinkel).

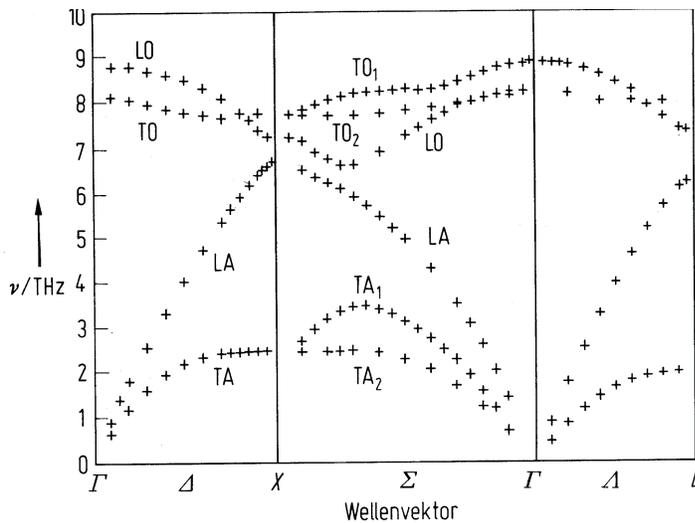


Abbildung 7.29: Mit Hilfe von Neutronen-Streuexperimenten gemessene Dispersionsrelation von GaAs entlang verschiedener Kristallrichtungen. (aus Bergmann-Schaefer, Festkörperphysik, Abb. 1.30)

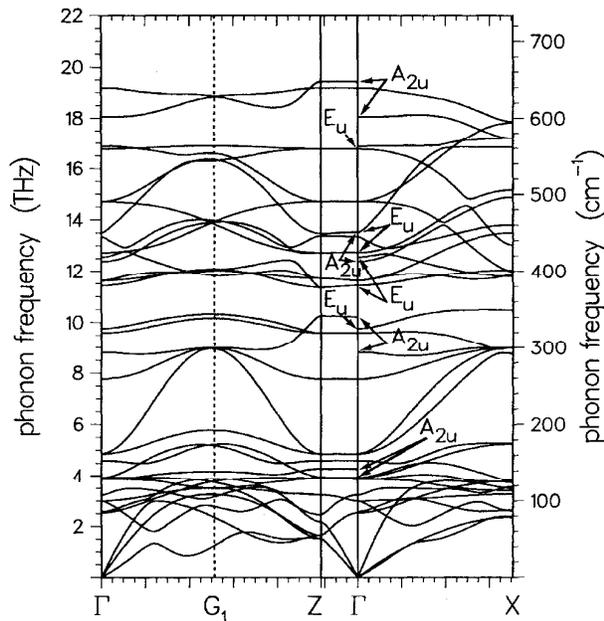


Abbildung 7.30: Berechnete Eigenmoden der Verbindung $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$ (aus: Kulkarni et al., *Physical Review B* 43, S. 5451).

In vielen Fällen werden die **Schwingungen chaotisch**. Der Auslenkwinkel φ eines chaotischen Pendels beispielsweise verläuft dann unperiodisch und vor allem auch unvorhersagbar. Jede kleinste Störung ändert den zeitlichen Verlauf völlig. Dieses Verhalten kann beispielsweise bei Pendeln auftreten, deren Aufhängepunkt selbst durch ein Pendel gegeben ist.

Eine weitere Eigenschaft nichtlinearer Pendel ist die Möglichkeit der **Phasensynchronisation**. So beobachtete Hughens im 19. Jh. dass, zwei an einer Wand befestigte, ursprünglich mit leicht unterschiedlicher Frequenz schwingende Pendeluhr nach einiger Zeit mit gleicher Frequenz synchron schwingen. Dieser Effekt der Phasensynchronisation nichtlinearer Oszillatoren wird in der Physik häufig ausgenutzt.

Ein letztes Beispiel ist eine Kette von Pendeln, die durch Gummibänder verbunden sind. Auch hier ist die durch die Gravitation hervorgerufene Rückstellkraft proportional zum

Sinus des Auslenkwinkels⁷. Verdreht man ein Ende der **Pendelkette** um 360° , so kann sich diese Verdrillung inkl. der daran hängenden Pendel wie ein Teilchen bewegen. Diese Anregungsform heisst "Soliton". Die Bewegung gehorcht den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie. Die Abb. 7.31 bis 7.33 zeigen abschließend einige Bewegungsformen einer solchen Pendelkette.

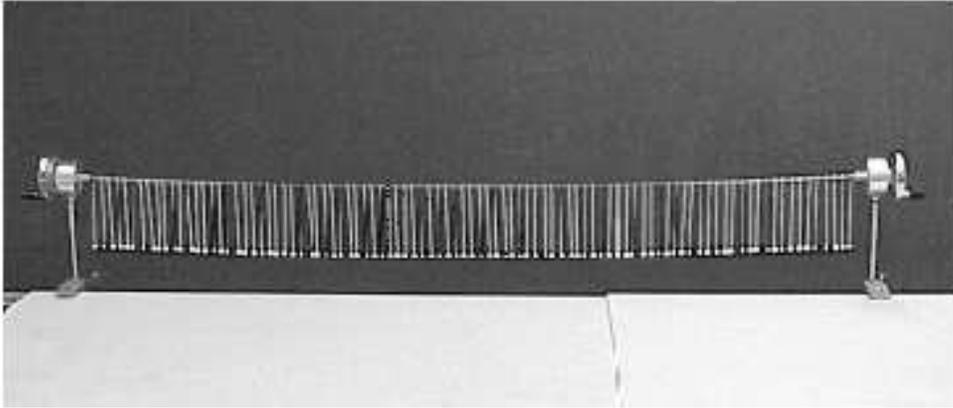


Abbildung 7.31: *Durch ein Gummiband verbundene Kette von Pendeln. (aus: "Wellenmaschine zur Demonstration harmonischer und anharmonischer Wellenphänomene (Solitonen)", M. Dietrich, H. J. Patt, <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).*

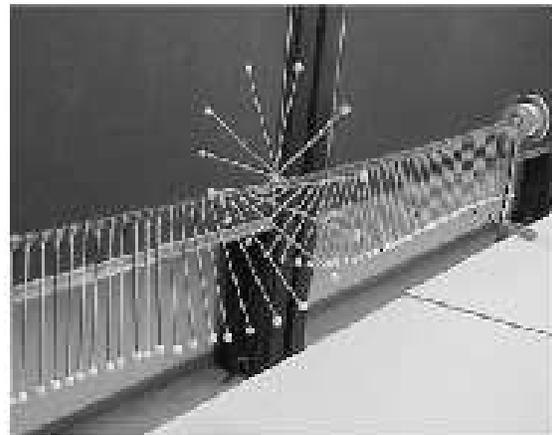


Abbildung 7.32: *links: Wellen kleiner Amplitude auf der Pendelkette; rechts: um 360° verdrehte Pendelkette. Die Verdrehung wird auch als "Soliton" bezeichnet. (aus: "Wellenmaschine zur Demonstration harmonischer und anharmonischer Wellenphänomene (Solitonen)", M. Dietrich, H. J. Patt, <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).*

⁷Die Bewegungsgleichung der Kette, eine nichtlineare Wellengleichung, heisst "Sinus-Gordon-Gleichung".

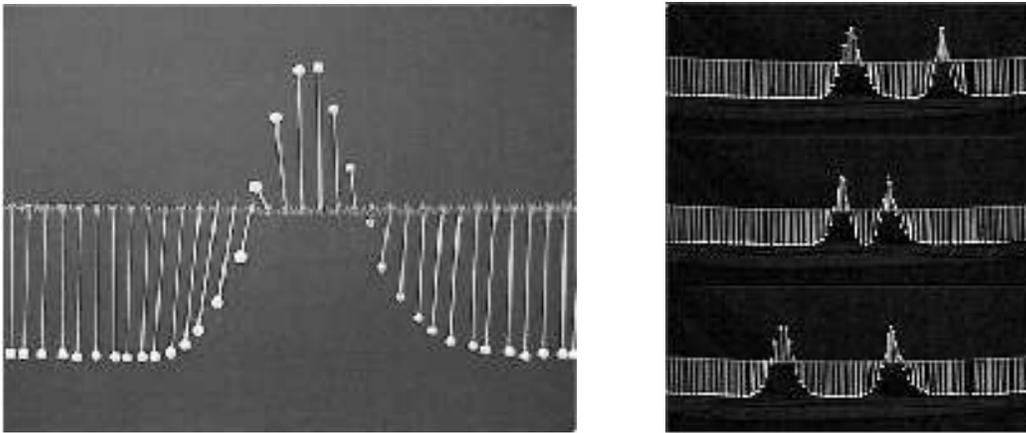


Abbildung 7.33: links: ruhendes Soliton von der Seite betrachtet; rechts: Stoß eines sich von links nach rechts bewegenden Solitons mit einem gegenläufigen "Antisoliton" mit umgekehrten Drehsinn der Verdrillung des Bandes (aus: "Wellenmaschine zur Demonstration harmonischer und anharmonischer Wellenphänomene (Solitonen)", M. Dietrich, H. J. Patt, <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).