Mathematik II für Informatiker Sommersemester 2017

Mittwoch, 1. Februar 2017 19:55

19.04.2017

Inhalte der Veranstaltung

1. Etwas Wiederholung und komplexe Zahlen
2. Reelle Funktionen
3. Folgen
4. Reihen
5. Reelle Analysis in einer Dimension: Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit
6. Differentialrechnung
7. Integralrechnung

Georg Cantor: Unter einer Menge verstehen wir
jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten
M unserer Anschauung oder unseres Denkens.

24.04.2017 Wiederholung

Wir haben kennen gelernt

- Menge und Kardinalität von Mengen
- Gruppe: Menge G, binäre Operation +: G x G -> G, neutrales Element 0
  (G, + 0)
  mit "vernünftigen" Rechenregeln: Assoziativgesetz
- abelsche Gruppe: ist zusätzlich kommutativ
- Körper: Menge K, zwei binäre Operationen +, *
  (K, +, 0) ist abelsche Gruppe
  (K\{0}, *, 1) ist abelsche Gruppe
  weitere Rechenregel: Distributivgesetze

- die natürlichen Zahlen N und N_0
- abzählbar unendlich

  Hilberts Hotel

- die ganzen Zahlen Z
  Z ist abelsche Gruppe

  Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk. (Leopold Kronecker)

- die rationalen Zahlen Q
  Q ist Körper

26.04.2017 Zusammenfassung

- Die reellen Zahlen
  Wurzel 2 ist nicht rational
- die komplexen Zahlen
  z = x + iy
  "Grundrechenregeln"
  Darstellung in komplexer Ebene
- Quarternionen und Oktaven
  Divisionsalgebren haben Dimension 2^n

Divisionsalgebren haben Dimension 2^n

- C ist der "allgemeinste Körper"

- Funktionen: Definition
    - Definitionsbereich, Wertebereich, Graph
- Verknüpfung von Funktionen
- surjektiv, injektiv, bijektiv

- **Definition 2.3** ***Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv*** *Sei* $f : A \to B$ *reell*
    - f *ist surjektiv, wenn* $\forall y \in B \ \exists x \in A \ : \ f(x) = y$
    - f *ist injektiv, wenn* $\forall x_1, x_2 \in A \ : \ f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$
    - f *ist bijektiv (eineindeutig), wenn injektiv und surjektiv*

- Komposition von Funktionen: g nach f: g o f (x) = g(f(x))

03.05.2017 Zusammenfassung

- Funktionsbegriff
- Monotonie
- Symmetrie
- Umkehrfunktion
  - grafisch

- Elementare Funktionen
  - Konstante
  - Identität
  - Absolutbetrag
  - Monome
  - Wurzelfunktion
  - Polynome
    - Nullstellen
    - Fundamentalsatz der Algebra

Satz 2.2 ***Fundamentalsatz der Algebra*** *Sei* $P_n(z)$ *Polynom vom Grad* $n \geq 1$ *und* $z \in \mathbb{C}$. *Dann besitzt* P *mindestens eine Nullstelle* $z_0 \in \mathbb{C}$ *mit*

$$P(z_0) = 0$$

08.05.2017 Zusammenfassung

Reelle Funktionen

- rationale Funktionen

  f(x) = p(x) / q(x), p,q Polynome

- Exponentialfunktionen

- Exponentialfunktionen

  f(x) = e^x

- Logarithmus

- Trigonometrische Funktionen
  sin, cos, tan, cot

15.05.2017 Zusammenfassung

nochmal Logarithmus: die Bedeutung von ...

log (x*y) = log x + log y

Umkehrfunktionen von trigonometrischen Funktionen
- arcsin, arccos

Hyperbolische Funktionen
- sinh, cosh

Definition von Folgen
Beispiele und Darstellung
Monotonie von Folgen
Beschränkte Folgen
Alternierende Folgen

Konvergenz von Folgen

Definition 3.6 ***Konvergenz*** *Sei* (a_n) *reelle Folge; diese ist konvergent g*
wenn

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \epsilon$$

Beispiele

$$
\begin{aligned}
a_n &= C \\
b_n &= (-1)^n \\
c_n &= n \\
d_n &= \frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n} \\
e_n &= q^n \; mit \; q \in \mathbb{R} \; (geometrische\ Folge) \\
f_n &= \frac{x^n}{n!} \; mit \; x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

20.05.2017 Zusammenfassung

Folgen

- Teilfolge
- Konvergenz, Grenzwert
- Eindeutigkeit des Grenzwertes
- Beschränktheit konvergenter Folgen
    - geometrische Folge
- Rechenregeln für Grenzwerte
    - Beispiele

Häufungspunkt

Ein Häufungspunkt, welchselb'ger zwar
In herrlicher Umgebung war

In herrlicher Umgebung war,
Der aber dennoch unzufrieden
Mit seinem Schicksal war hienieden,
Bedachte seine Lage neulich
Und sprach betrübt: „Es ist abscheulich!

Mir sagt wohl jeder, der mich kennt,
Ich hätt zum Einsiedler Talent.
Wie gern möcht ich zurück mich ziehn,
Die lästige Umgebung fliehn;
Allein in jedem Kreis mit Rho
Sind immer noch Begleiter do!“

Des Punktes Standpunkt leuchtet ein;
Auch ich möcht solch ein Punkt nicht sein!
Ging ich mal in mein Badezimmer,
In jeder Nähe hätt ich immer
Unendlich viel Bekannte
Und liebe Anverwandte.

Dies aber wäre mir furchtbar peinlich.

Hubert Cremer: Carmina mathematica, Aachen 1962.

22.05.2017 Zusammenfassung

Konvergenz
- Beispiel f = x^n/n!
- Monotonie-Kriterium
- Intervallschachtelungsprinzip

- **Satz 3.6** ***Intervallschachtelungsprinzip*** *Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen, (a_n) wachsend, (b_n) monoton fallend mit*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ a_n \leq b_n$$

und

$$b_n - a_n \to 0$$

Dann sind beide Folgen konvergent und besitzen den gleichen Grenzwert.

-

- "schwache" Konvergenz
    - Bolzano-Weiterstraß

Satz 3.7 ***Bolzano-Weierstraß*** *Sei* (a_n) *reelle Folge, dann*

$$(a_n) \text{ ist beschränkt} \quad \Rightarrow \quad (a_n) \text{ besitzt konvergente Teilfolg}$$

- Häufungspunkt

Definition 3.8 ***Häufungspunkt*** *Sei* (a_n) *reelle Folge;* $a \in \mathbb{R}$ *ist Häufungspunkt, wer*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N \text{ und } |a_n - a| < \epsilon$$

22.05.2017 Zusammenfassung

- Häufungspunkt
  - jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunk
  - jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt: den Grenzwert
  - hat (a_n) einen Häufungspunkt a, dann hat diese eine Teilfolge, die gegen a konvergiert
- Landau-Notation
  - O(a_n)
  - o(a_n)

Definition 3.9 *Sei (a_n) reelle Folge mit $a_n > 0$. Dann ist*

$$O(a_n) = \left\{ (b_n) \text{ mit } \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ ist beschränk}\right.$$

- *($(a_n$ verhält sich wie (b_n), wächst nicht wesentlich schneller) u*

$$o(a_n) = \left\{ (b_n) \text{ mit } \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ ist Nullfolge}\right.$$

((b_n) wird von (a_n) dominiert, wächst langsamer)

- Cauchy-Folge

Definition 3.10 ***Cauchy-Folge*** *Eine reelle Folge (a_n) ist Cauchy-Folge,*

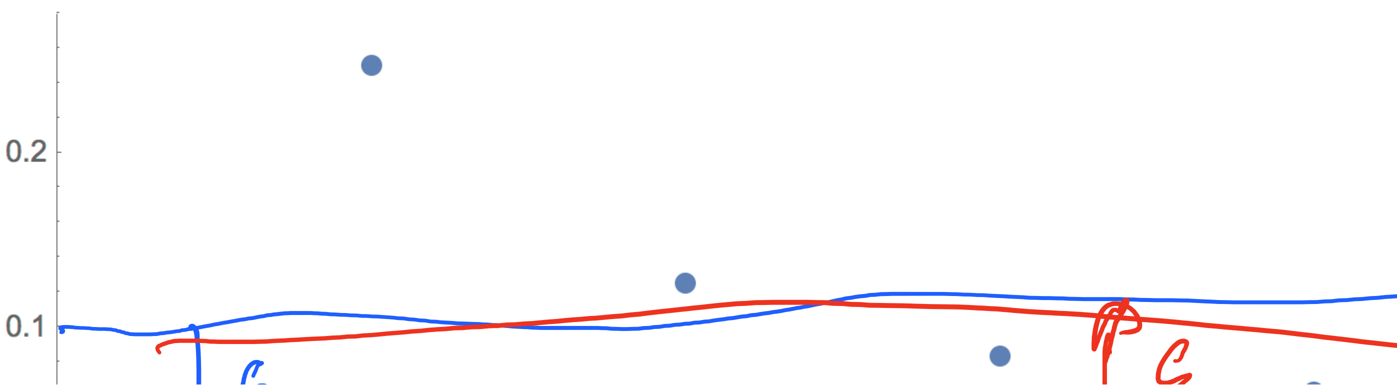
$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_m| <$$

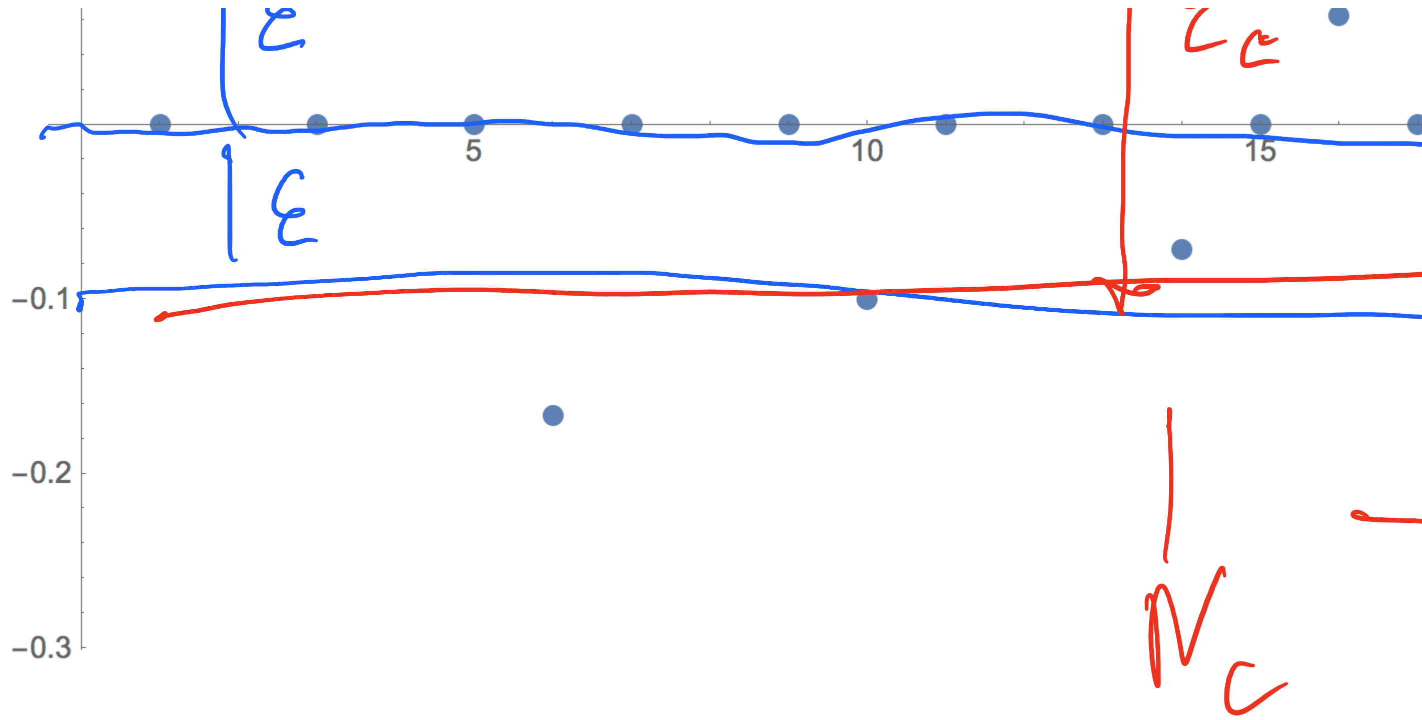
- **Satz 3.10** ***Cauchy-Kriterium*** *Eine Folge konvergiert genau dann, wenn*
  Folge ist

- Vollständige Mengen
  - jede Cauchy-Folge hat Grenzwert in der Menge

```
ListPlot[Table[d[n], {n, 1, 20}]]
```

listenbezo··· Tabelle





Zusammenfassung Folgen

Definition 3.1: Folge
Definition 3.2: Monotone Folgen
Definition 3.3: Beschränktheit
Definition 3.4: Alternierend
Definition 3.5: Teilfolge
Definition 3.6: Konvergenz
Definition 3.7: Grenzwert
Satz 3.1 Folge konvergiert, dann konvergiert auch jede
Satz 3.2: Grenzwert ist eindeutig
Satz 3.3: Konvergente Folgen sind beschränkt
Satz 3.4: Rechenregeln für Grenzwerte

Satz 3.4: Rechenregeln für Grenzwerte
Satz 3.5: Monotoniekriterium: beschränkte und monoto
konvergieren
Satz 3.6: Intervallschachtelungsprinzip
Satz 3-7: Bolano-Weierstraß: beschränkte Folge besitzt
Teilfolge
Definition 3.8: Häufungspunkt
Satz 3.8: Grenzwert ist eindeutiger Häufungspunkt
Satz 3.9: Beschränkte Folge besitzt mindestens einen H
Definition 3.9: Landau-symbole O und o
Definition 3.10: Cauchy-Folge
Satz 3.10: Folge konvergent genau dann wenn Cauchy-F
Satz 3.11: Banachscher Fixpunktsatz

24.05.2017 Zusammenfassung

- Banachscher Fixpunktsatz
- komplexe Folgen

- Reihen: Definition
- Reihen: Beispiele
- Geometrische Reihe
- Satz 4.3: (S_n) beschränkt und $a_i >= 0$ dann konverg

29.05.2017 Zusammenfassung

Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Reihen
Divergenzkriterium: (a_n) keine Nullfolge => Reihe d

Majorantenkriterium
Leibniz-Kriterium
Einschub: lim sup und lim inf
Absolute Konvergenz
Wurzelkriterium
Quotientenkriterium

Satz 4.8 ***Leibnizkriterium*** *Sei* (a_n) *reelle, monoton fallende Nullfolg*
Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot a_i$$

Satz 4.9 ***Wurzelkriterium*** *Sei* (a_n) *reelle Folge und (für fast all*

$$\exists C \in \mathbb{R} \ \textit{mit} \ C < 1 : \ \sqrt[n]{|a_n|} \leq C$$

dann konvergiert die Reihe (S_n) *absolut:*

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

Gilt für unendlich viele Indices n

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

dann ist (S_n) *divergent (Folgeglieder bilden keine Nullfolge).*

Alternativ:
Wenn

$$\lim\sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

konvergiert die Reihe absolut, falls

$$\lim\sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

divergiert sie, für

$$\lim\sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

ist keine Aussage möglich.

Satz 4.10 ***Quotientenkriterium*** *Sei* (a_n) *reelle Folge mit* $a_n \neq 0$ *und*

$$\exists q < 1 \; : \; \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

dann konvergiert die Reihe (S_n) *absolut:*

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

Gilt für fast alle n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

dann ist (S_n) *divergent.*

Wichtige Potenzreihen

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \\
\sin x &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\
\cos x &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \\
\sinh x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\
\cosh x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}
\end{aligned}
$$

Definition 4.5 ***Formel von Cauchy-Hadamard*** *Sei* $P(X)$ *Po*

4.4. Dann ist

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\mathit{lim\ sup}\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

(dabei ist formal $\frac{1}{0} = +\infty$ *und* $\frac{1}{+\infty} = 0$ *).*

Satz 4.11 *Sei* $P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot x^i$ *Potenzreihe. Dann existiert eindeuti*
$\rho \in \mathbb{R}_0^+$ *nach Definition 4.5 mit: Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < \rho$ *konve*
alle $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| > \rho$ *divergiert* $P(x)$.

Zusammenfassung Reihen

- Definition 4.1: Partialsumme, unendliche Reih
- harmonische Reihe
- geometrische Reihe konvergiert für |q| < 1
- Satz 4.3: (S_n) beschränkt und a_ >= 0 dann: (S
- Satz 4.4: Cauchy-Kriterium für Reihen
- Satz 4.5: (S_n) konvergent dann a_n Nullfolge
- Satz 4.6: Divergenzkriterium
- Satz 4.7: Majorantenkriterium
- Satz 4.8: Leibniz-Kriterium
- lim sup un d lim inf
- Satz 4.9: Wurzelkriterium

- Satz 4.9: Wurzelkriterium
- Satz 4.10 Quotientenkriterium
- Umordnen von Reihen

- Potenzreihen: Definition
- Definition 4.5: Formel von Cauchy-Hadamard
- Satz 4.11: Konzergenzradius von Potenzreihen
- Definition 4.6: Exponentialreihe
- gängige Potenzreihen: exp, sin, cos, sinh, cosh
- komplexe Potenzreihen: wie reelle
    - $\exp i\phi \;=\; e^{i\phi} = \cos\phi + i\,\mathrm{si}$

Zusammenfassung 12.06.2017

- Funktionsgrenzwerte

Definition 5.1 *Sei* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:* f *konvergiert gegen* a *bei*
(x_n) *mit* $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ *gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Entsprechend sind die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ *definiert:*

- f *konvergiert für* $x \to \pm\infty$ *gegen* a, *wenn für alle reellen Folgen*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Dies bedeutet (für $+\infty$*):*

$$(\forall K \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n > K) \quad \Rightarrow \quad f(x$$

- Schreibweise!
- l-lim (x_i < x_0) und r-lim (x_i > x_0)
- **Stetigkeit**

- **Definition 5.4** ***Stetigkeit*** *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *reelle Funktion.* $x_0 \in D$, *wenn*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

gilt. f *ist stetig in* D, *wenn* f *in jedem Punkt* $x_0 \in D$ *stetig ist.*

- **Definition 5.5** $\epsilon - \delta$**-*Stetigkeit*** f *ist stetig bei* $x_0 \in$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \quad =$$

Zusammenfassung 14.06.2017

Stetigkeit

Definition 5.6 *Sei* $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = r$$

dann ist x_0 *eine stetig hebbare Definitionslücke von* f, *die Funk*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} f(x) \text{ für } x \neq x_0 \\ r \text{ für } x = x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist die stetige Fortsetzung von f *auf* $\mathbb{R}$

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ist stetig hebbar durch $f(0) = 0$.

Satz 5.5 ***Zwischenwertsatz von Bolzano*** $f : [a, b] \to R$ *stetig*
0; *dann existiert* $c \in]a, b[$ *mit* $f(c) = 0$
(f hat Nullstelle in $[a, b]$)

Zusammenfassung 19.06.2017

Stetigkeit

- Definition über Folgen
- Definition über Epsilon-Delta
- Anschauung
- Satz 5.2: $|f(x) - f(x0)| < K |x - x0|$ dann ist f steti
- Satz 5.3: Rechenregeln für stetige Funktionen
- Satz 5.4: Stetigkeit der Umkehrfunktion stetiger monotoner Funktionen
- hebbar stetig
- Satz 5.5: Zwischenwertsatz von Bolzano
- Satz 5.6: allgemeiner Zwischenwertsatz
- Satz 5.7: Minimum/Maximum stetiger Funktion abgeschlossenem Intervall
- gleichmäßige Stetigkeit

Zusammenfassung 21.06.2017

- Differenzenquotient
- Definition der Differenzierbarkeit
  - Ableitung als Steigung
  - Steigungswinkel

Definition 6.1 ***Differenzierbare Funktion*** $f : I \to \mathbb{R}$ *ist bei* x_0 *differenzierbar, wenn*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \qquad f(x - x_0) - f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert ist die erste Ableitung von f *bei* x_0 *und wird*

$$f'(x_0) \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0)$$

bezeichnet.

Ist f *im gesamten Definitionsgebiet* I *differenzierbar, so ist* f *differenzierbar auf* I *und* f' *ist die (erste) Ableitung von* f*:*

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

- Beispiele für Ableitungen
  - f(x) = x^2
  - f(x) = c
  - f(x) = x^n
  - f(x) = 1/x
  - f(x) = sin x
  - f(x) = cos x

Satz 6.1 *Differenzierbare Funktionen sind stetig.*

Satz 6.2 *Für* $f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ *sind äquivalent:*

1. f *ist in* x_0 *differenzierbar.*
2. $\exists R : I \to \mathbb{R}$, *stetig in* x_0 *mit* $R(x_0) = 0$ *und*

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ so dass gilt: } f(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) + R(x) \cdot (x - x_0)$$

und es gilt $f'(x_0) = m$.

Dies bedeutet anschaulich, dass $f(x_0)$ *durch eine Gerade mit Steigung* m *approximier den kann.*

$$\infty \quad x^i$$

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{i=0} \frac{x^i}{i!} \\
\sin x &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\
\cos x &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \\
\sinh x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\
\cosh x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung 26.06.2017

- Ableitungsregeln
  - (cf)'
  - (f +- g)'
  - (fg)'
  - (1/f)'
  - (f/g)'
- Ableitung der Exponentialfunktion
- Kettenregel (f(g(x)))'
- Ableitung der Umkehrfunktion (f^-1)' = 1/f'(f^-1(x))
  - (ln x)' = 1/x

f	f'
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{Q}$

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$ mit $a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$ mit $a \neq 1$ und $a > 0$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Zusammenfassung 28.06.2017

- Tabelle Ableitungen wichtiger Funktionen
- Kurvendiskussion
- lokales Maximum/Minimum
- globales Maximum/Minimum
- Satz 6.7: x0 lokales Max/Min => f'(x0) = 0
- höhere Ableitungen: f'', f''', ...
- Satz 6.8
  - erster Mittelwertsatz
  - Satz von Rolle
  - zweiter Mittelwertsatz

Satz 6.8 ***Mittelwertsätze, Satz von Rolle*** *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig sow*
renzierbar auf $]a, b[$ *und* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in]a, b[$. *Dann*

1. *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*

$$\exists \xi \in (a, b) \mathit{mit}\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. *Satz von Rolle*

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists \xi \in (a, b) \text{ } mit \text{ } f'(\xi) = 0$$

3. *Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung*

$$\exists \xi \in (a, b) mit \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Zusammenfassung 03.07.2017

- Monotoniekriterium

Satz 6.9 ***Monotoniekriterium*** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* $]a, b[$
Dann:

1.
$$\forall x \in]a, b[f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ } monoton \text{ } steigend \text{ } auf \text{ } [a, b$$

- 2.
$$\forall x \in]a, b[f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ } streng \text{ } monoton \text{ } steigend \text{ } auf \text{ } [$$

3.
$$\forall x \in]a, b[f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ } konstant \text{ } auf \text{ } [a, b]$$

(für (streng) monoton fallend analog)

- Satz 6.10: wenn f'(x) < 0 für x < x0 und f'(x) > 0 für x > x0 dann ist x0
- Satz 6.11: f'(x0) = 0 und f''(x0) > 0 => x0 lokales Minimum
- Satz 6.12: bei x0 sind die ersten n-1 Ableitungen 0, die n-te ungleic
Ist n ungerade kein lokales Extremum, ist n gerade Minimum, wen
wenn < 0

Satz 6.2 *Für* $f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ *sind äquivalent:*

1. f *ist in* x_0 *differenzierbar.*

2. $\exists R : I \to \mathbb{R}$, *stetig in* x_0 *mit* $R(x_0) = 0$ *und*

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ so dass gilt: } f(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) + R(x) \cdot ($$

und es gilt $f'(x_0) = m$.

Dies bedeutet anschaulich, dass $f(x_0)$ *durch eine Gerade mit Steigung* m *a* *den kann.*

Zusammenfassung 05.07.2017

- Regeln von d'Hospital
- Die Klassen C^k: k-fach stetig differenzierbare Funktionen
- Taylor-Reihe

Definition 6.8 ***Holomorphie*** *Eine komplexe Funktion* f*, die eine offe* $\mathbb{C}$ *abbildet, ist holomorph (komplex-differenzierbar), wenn der (komplexe)*

$$f'(a) = \lim_{w \to 0} \frac{f(a+w) - f(a)}{w}$$

(für $a, w \in \mathbb{C}$*) existiert.*

Zusammenfassung Kapitel 6: Differentialrechnun

- Intuition: Die Tangente an die Kurve

- Der Differenzenquotient
- Def. 6.1: Differenzierbare Funktionen
- Satz 6.1: f differenzierbar ==> f stetig
- Satz 6.2: die lineare Näherung einer differenzierbaren Funktion
- Satz 6.3: Ableitungsregeln
- Satz 6.4: Ableitung der Exponentialfunktion
- Satz 6.5: Kettenregel
- Satz 6.6: Ableitung der Umkehrfunktion
- Tabelle der wichtigsten Ableitungen
- Kurvendiskussion einfach
- Def. 6.3 lokales Min/Max
- Def. 6.4 globales Min/Max
- Satz 6.7 lokales Extremum ==> f' = 0
- höhere Ableitungen
- Satz 6.8: erster/zweiter Mittelwertsatz, Satz von Rolle
- Satz 6.9: Monotoniekriterium
- Kurvendiskussion erweitert
- Satz 6.10: x < x0: f' < 0 und x > x0: f' > 0 ==> f Minimum
- Satz 6.11: f'(x0) = 0 und f''(x0) < 0 ==> x0 lokales Minimum
- Satz 6.12: f(x0) = f'(x0) = f''(x0) = ... = 0 und die n-te Ableitung ungleich 0 ==> ungerade kein lokales Extremum, n gerade lokales Extremum
- Satz 6.13: Regeln von d'Hospital
- Def. 6.5: Klasse der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen
- Def. 6.6: Taylor-Polynom vom Grad n
- Satz 6.14: Satz von Taylor
- Def. 6.7: Taylor-Reihe
- Differenzierbare komplexe Funktionen: Holomorphie und die Bedeutung da
- Satz 6.20: Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Erinnerungen

Satz 5.6 ***allgemeiner Zwischenwertsatz*** *Sei*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

stetig und

$$y \in [f(a), f(b)]$$

Dann

$$\exists c \in [a,b] \textit{ mit } y = f(c)$$

Satz 5.7 ***Minimum/Maximum-Theorem von Weierstraß*** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig, dann ist* f *beschränkt und besitzt Minimum und Maximum:*

$$\begin{aligned} \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in [a,b] &: |f(x)| \leq K \\ \exists c, d \in [a,b] \forall x \in [a,b] &: f(c) \leq f(x) \leq f(d) \end{aligned}$$

Satz 6.9 ***Monotoniekriterium*** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann:*

1. $$\forall x \in]a,b[f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \textit{ monoton steigend auf } [a,b]$$
2. $$\forall x \in]a,b[f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f \textit{ streng monoton steigend auf } [a,b]$$
3. $$\forall x \in]a,b[f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \textit{ konstant auf } [a,b]$$

(für (streng) monoton fallend analog)

Zusammenfassung 12.07.2017

- Definition Riemann-Integral

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ O_n &= \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

Definition 7.1 ***Riemann-Integral*** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. f *ist Riemann-integrierbar, wenn* *für alle Folgen von Zerlegungen* Z_n *mit* $\mu(Z_n) \to 0$ *die Grenzwerte von* U_n *und* O_n *existieren und den gleichen Wert haben.*

Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$$

- Satz 7.1: jede stetige und jede monotone Funktion ist integrierbar

Satz 7.2 ***Rechenregeln der Integralrechnung***

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx &= \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx \\
\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \\
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
f(x) \le g(x) &\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \\
m \le f(x) \le M &\Rightarrow (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

Satz 7.3 ***Mittelwertsatz der Integralrechnung*** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann:*

$$\boxed{\exists \xi \in [a, b] \text{ mit } \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a)}$$

Übersicht wichtige Stammfunktionen

f	F

f	F
c	$c \cdot x$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}, a \in \mathbb{Q}, a \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$ mit $a > 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\ln x$	$x \cdot \ln x - x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Zusammenfassung 17.07.2017

- Stammfunktion

Definition 7.2 ***Stammfunktion*** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar. Dann heißt jede differenzierbare Funktion* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion zu* f*, wenn gilt*

$$F'(x) = f(x)$$

(zu den Rändern: Sei $[a, b] \subset I$)

- Satz 7.4

Satz 7.4 *Seien* F, G *Stammfunktionen zu bf auf* $[a, b]$*; dann*

$$\exists C \in \mathbb{R} : F - G = C$$

- Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Satz 7.5 ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

eine Stammfunktion von f *und es gilt für* $c, d \in [a, b]$ *:*

$$\int_c^d g(x)\,dx = F(d) - F(c) = [F(x)]_c^d$$

Beispiele

$$\int_0^3 2\,dx = [2x]_0^3 = 6$$

$$\int_1^2 x^2 + x + 1\,dx = [\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x]_1^2 = \frac{29}{6}$$

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx = [-\frac{1}{2}e^{-2x}]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

Zusammenfassung 19.07.2017

- partielle Integration

Satz 7.6 *Seien* $f, g \in C^1$*; dann:*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

oder genauer:

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$$

- Substitutionsregel

Satz 7.7 *Sei* $f \in C^0$ *und* $g \in C^1$*; dann:*

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

- uneigentliche Integrale

Definition 7.3 ***uneigentliches Integral*** *Sei* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *(auch* $a = \infty$ *möglich). Dann heißt* f *uneigentlich integrierbar, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{T \to a} \int_T^b f(x)\,dx$$

exisitiert.

- Reihen und uneigentliche Integrale

Satz 7.8 *Sei* $f : [z, \infty[\to \mathbb{R}$ *mit* $z \in \mathbb{Z}$ *monoton fallend, wobei für alle Argumente gilt* $f(x) \geq 0$*. Dann:*

$$\text{es existiert} \int_z^\infty f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \text{es existiert} \sum_{i=z}^\infty f(i)$$

- Integration im Komplexen

Satz 7.9 ***Integralsatz von Cauchy*** *Sei* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorph und* γ *eine geschlossene Kurve in* $\mathbb{C}$*; dann*

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\, dz = 0}$$