Illustration des Banachschen Fixpunktsatzes anhand von Landkarten

©[1] Dr. Carla Cederbaum[2]

Ziel Ihres einleitenden Vortrags und der von Ihnen angeleiteten praktischen Übung ist es, den Banachschen Fixpunktsatz „hands on“ zu demonstrieren. Dadurch sollen alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer üben, sich und anderen mathematische Überlegungen und Resultate zu veranschaulichen und begreifbar zu machen. Diese Fähigkeit benötigen Mathematikerinnen und Mathematiker in der Praxis, wenn sie mit Menschen zusammenarbeiten, die nicht Mathematik studiert haben. Ebenso nützlich ist diese Fähigkeit für Studierende, die tutorieren oder später sogar Vorlesungen halten, sowie natürlich für Lehrerinnen und Lehrer. Sie haben für Ihren einleitenden Vortrag und die Übungen ca. 60min Zeit.

Wichtig!

Wir werden zum Blockseminar (und zur Vorbesprechung) die folgenden Dinge mitbringen.

- einen Stadtplan einer beliebigen Stadt (nicht Freudenstadt)
- eine Wanderkarte von Freudenstadt
- eine Weltkarte
- einen Globus
- eine Dose Stecknadeln.

Banachscher Fixpunktsatz und Stadtpläne

Bitte wiederholen Sie zuerst den Banachschen Fixpunktsatz in seiner allgemeinen Formulierung (auf vollständigen metrischen Räumen) in einem kurzen Vortrag, siehe [Heu80] aus der Literaturliste bzw. Vortrag 5. Erinnern Sie Ihre Zuhörerinnen und Zuhörer bitte auch an den Algorithmus, mit dem im Banachschen Fixpunktsatz der Fixpunkt gefunden und seine Existenz bewiesen wird. Nutzen Sie anschließend die Karten bzw. den Globus und ein paar Stecknadeln, um das Resultat und den Algorithmus zu veranschaulichen. Sie können dazu Ihre Kommilitoninnen und Kommilitonen in Gruppen aufteilen und die Gruppen abwechselnd betreuen oder eine Diskussion in der Gesamtgruppe moderieren. Wichtig ist, dass möglichst alle an den Überlegungen beteiligt sind.

Dabei können Sie sich beispielsweise an folgenden Fragen orientieren: Wie kann man eine Landkarte oder einen Globus als (mathematische) Abbildung von dem abgebildeten (geographischen) Gebiet auf die in Freudenstadt ausgebreitete Karte[1] verstehen? Was sind Definitions- und Wertebereich dieser Abbildungen? Bei welchen zu den mitgebrachten Karten gehörigen Abbildungen handelt es sich um eine Selbstabbildung? Welche sind Kontraktionen? Welche Aussage macht der Banachsche Fixpunktsatz in Bezug auf die Karten und den Globus?

[2]cederbaum@math.uni-tuebingen.de
[1]Für eine Karte von Tübingen sollte man sich das etwa so vorstellen: Der C-Bau wird abgebildet auf einen kleinen Punkt auf dem Stadtplan von Tübingen; dieser Stadtplan ist in Freudenstadt ausgebreitet, daher ist der Bildpunkt also an einem ganz bestimmten Ort in Freudenstadt. Dieser Ort in Freudenstadt ist der Bildpunkt des C-Baus unter der Abbildung.

Hier zur Erläuterung ein Beispiel: Der Stadtplan einer beliebigen Stadt, z. B. Tübingen, kann auf folgende Weise als Abbildung von Tübingen nach Freudenstadt interpretiert werden: Man breitet den Stadtplan auf dem Boden in Freudenstadt aus und definiert dann

$$f : \text{Tübingen} \to \text{Freudenstadt} : \text{Ort } x \mapsto \text{Stelle } f(x) \text{ in Freudenstadt, an dem } x \text{ auf dem Stadtplan abgebildet ist.}$$

Als Distanzfunktion (Metrik) verwendet man dabei sowohl in Freudenstadt als auch in Tübingen beispielsweise die Euklidische Metrik (Luftlinienabstand); mit dieser Metrik werden beide Städte zu vollständigen metrischen Räumen (warum?). Die Abbildung ist eine Kontraktion; der Maßstab des Stadtplans gibt die Kontraktionskonstante an (warum?). Dennoch sind nicht alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, da nämlich die Abbildung keine Selbstabbildung ist (warum?). Und es gibt tatsächlich auch keinen Fixpunkt (warum?).

Der Wanderkarte von Freudenstadt entspricht auf ähnliche Weise einer Abbildung von Freudenstadt nach Freudenstadt, also insbesondere einer kontrahierenden Selbstabbildung zwischen vollständigen metrischen Räumen (warum?). Auf diese kann man den Banachschen Fixpunktsatz anwenden, sie hat also genau einen Fixpunkt. Benutzen Sie die Stecknadeln, um den Algorithmus des Banachschen Fixpunktsatzes nachzuvollziehen, etwa so: Suchen Sie sich einen beliebigen Startpunkt x_0 in Freudenstadt, z. B. den Punkt auf dem Boden genau unter der Spitze des Kirchturms am Marktplatz.

Welcher Punkt in Freudenstadt ist dann $x_1 = f(x_0)$? Genau der Punkt auf der Karte (in Freudenstadt), wo x_0 abgebildet ist (auf den x_0 durch die Abbildung f abgebildet wird). Stechen Sie nun die Stecknadel genau an diesem Punkt durch die Karte. Die Spitze der Nadel zeigt dann auf den Punkt x_1 in Freudenstadt. Wie geht es weiter?

Bitte gehen Sie alle genannten Karten und den Globus auf diese Weise durch, gerne können Sie natürlich auch eigene Ideen hinzufügen. Bitte sprechen Sie sich dazu bis zum 9. Januar 2015 mit den Dozentinnen ab.

Ziel dieser Übungen ist es, den Banachschen Fixpunktsatz und die dahinter stehenden Ideen und Konzepte anschaulich zu machen. Dazu ist es sehr wichtig, dass Sie am Ende Ihrer Einheit zusammentragen und -fassen, was die Gruppe bei den verschiedenen Beispielen gelernt hat. Hat vielleicht jemand im Raum noch eine eigene Idee für ein Beispiel, an dem man Laien (wie etwa Schülerinnen und Schülern) die wesentlichen Knackpunkte des Banachschen Fixpunktsatzes erklären kann?

Handout

Ihr Handout sollte es den anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern ermöglichen, im Anschluss an das Seminar nachzuvollziehen, welche Fragen in der praktischen Übung besprochen wurden und wie die korrekten Antworten darauf lauten. Bitte wiederholen Sie auf Ihrem Handout auch die Formulierung des Banachschen Fixpunktsatzes sowie den zugehörigen Algorithmus.