

**Aufgabe 1** (1+3+3+3 Punkte)

Gegeben sei die Sprache der Signatur  $\langle \{1\}, \{+ \mapsto 2\}, \{\leq \mapsto 2\} \rangle$  zur Struktur  $\mathfrak{A} =_{\text{def}} \langle \mathbb{N}, 1, +, \leq \rangle$ . Wir schreiben  $\dot{+}$ ,  $\dot{\leq}$ ,  $\dot{1}$  für  $\overset{\cdot}{+}$ ,  $\overset{\cdot}{\leq}$ ,  $\overset{\cdot}{1}$  und verwenden Infix-Notation. Sei  $v$  eine Belegung mit  $x_0 \mapsto 2, x_1 \mapsto 5$ . Bestimmen Sie durch schrittweises Auswerten die folgenden Werte:

- $\llbracket (x_0 \dot{+} \dot{1}) \dot{+} (\dot{1} \dot{+} x_1) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$
- $\llbracket ((x_0 \dot{+} x_1) \dot{\leq} (x_1 \dot{+} x_1)) \vee (\dot{1} \dot{\leq} x_0) \rightarrow \neg(\dot{1} \dot{\leq} x_0) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$
- $\llbracket \exists x_1 (x_1 \dot{\leq} x_0 \rightarrow \neg((x_1 \dot{+} \dot{1}) \dot{\leq} x_0)) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$
- $\llbracket \exists x_0 (\forall x_1 (x_0 \dot{\leq} x_1)) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$

Für welche der ausgewerteten Formeln gilt  $\mathfrak{A} \models \phi$ ?

**Aufgabe 2** (2 + 2 + 1 Punkte)

Seien  $\phi, \psi \in \mathcal{L}$  beliebige Formeln, und sei  $\mathfrak{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur.

- Zeigen Sie: *Wenn  $\mathfrak{A} \models \phi \rightarrow \psi$ , dann folgt aus  $\mathfrak{A} \models \phi$  stets auch  $\mathfrak{A} \models \psi$ .*
- Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels (mit dem Nachweis, dass es ein Gegenbeispiel ist), dass die Umkehrung von (a) im Allgemeinen nicht gilt.
- Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (a) gilt, sofern  $\phi$  und  $\psi$  Aussagen sind.

Da der nächste Termin für die Tutorien der 12. Januar 2015 ist, sind die Ausarbeitungen zu diesen Aufgaben erst zum darauf folgenden Mittwoch abzugeben. Zwar wird es zur Vorlesung am 7. Januar ein weiteres Blatt mit Übungsaufgaben geben, die allerdings recht ähnlich zu denen auf diesem Blatt sein werden, so dass ein Tutorium zur Vorbereitung beider Blätter ausreichen sollte.

Ich wünsche Ihnen schöne Feiertage und einen guten Rutsch ins kommende Jahr!