Mathematische Logik I – Übungsaufgaben **Blatt 3**

Dr. Michael Arndt **WS 2014/15**

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Welche der folgenden Behauptungen trifft zu, welche nicht?

- *Eine Aussage* ϕ *ist kontradiktorisch genau dann, wenn* $\phi \models \bot$.
- *Eine Aussage* ϕ *ist tautologisch genau dann, wenn* $\bot \models \phi$.

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte)

Es seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ und $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$. Beweisen Sie:

a) *Wenn* $\Gamma \models \phi$ *und* $\Delta, \phi \models \psi$, *dann* $\Gamma, \Delta \models \psi$.

b) *Wenn* $\Gamma \models \phi$ *und* $\phi \mathrel{=}\!\mathrel{|}\!\models \psi$, *dann* $\Gamma \models \psi$.

c) *Es ist* $\Gamma \models \phi$ *genau dann, wenn für alle Belegungen* v *gilt:* $\prod_{\chi \in \Gamma} [\![\chi]\!]_v \leq [\![\phi]\!]_v$.

Hinweis: $\prod_{\chi \in \Gamma} [\![\chi]\!]_v$ ist das Produkt der Wahrheitswerte aller Formeln in Γ unter der Belegung v.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

In einer logischen Folgerungsrelation $\Gamma \models \phi$ heißt die Formel ϕ *logische Konsequenz* der Annahmen Γ. Für eine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ sei die *Menge aller logischen Konsequenzen* aus Γ definiert als:

$$\mathfrak{K}(\Gamma) =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathrm{PROP} : \Gamma \models \phi\}$$

Zeigen Sie, dass die Mengenoperation $\mathfrak{K}$ die folgenden Eigenschaften hat:

a) $\mathfrak{K}\big(\{\bot\}\big) = \mathrm{PROP}$

b) $\mathfrak{K}\big(\{\neg p_0 \vee p_0\}\big) = \mathrm{TAUT}$

c) Wenn $\Gamma \subseteq \Delta$, dann $\mathfrak{K}(\Gamma) \subseteq \mathfrak{K}(\Delta)$.

d) $\mathfrak{K}(\Gamma) = \mathfrak{K}\big(\mathfrak{K}(\Gamma)\big)$

Hierbei sei $\mathrm{TAUT} =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathrm{PROP} : \models \phi\}$ die Menge aller tautologischen Aussagen.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

Geben Sie zu der Formel $(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow p_1)$ äquivalente Formeln an, in denen keine anderen als die folgend genannten Junktoren vorkommen:

a) $\{\wedge, \vee, \neg\}$

b) $\{\rightarrow, \bot\}$