Mathematische Logik I – Übungsaufgaben **Blatt 11**

Dr. Michael Arndt **WS 2014/15**

Aufgabe 1 (4 Zusatzpunkte)

Beweisen Sie das Überführungslemma (Lemma 10.10):

> *Sei $\phi(x) \in \mathcal{L}$ eine beliebige Formel und t ein Term, der in ϕ für die Variable x frei einsetzbar ist. Dann gilt für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ und jede Belegung v: $[\![\phi(t)]\!]^{\mathfrak{A}}_v = [\![\phi(x)]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto [\![t]\!]^{\mathfrak{A}}_v]}$.*

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Formen Sie die folgende Formel schrittweise in eine pränexe Normalform um:

$$\big(\forall x \phi(x) \to \forall y \big(\psi(y) \to \exists x \phi(x)\big)\big) \to \forall x \exists y \big(\chi(x,y) \to \big(\forall y \psi(y) \to \bot\big)\big)$$

Dabei seien ϕ, ψ und χ quantorenfrei.

Aufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie im Kalkül NK$'$:

a) $\vdash \forall x \big(\phi(x) \to \psi(x)\big) \to \big(\forall x \phi(x) \to \forall x \psi(x)\big)$

b) $\vdash \forall x \big(\phi(x) \land \psi(x)\big) \to \forall x \phi(x) \land \forall x \psi(x)$

c) $\vdash \forall x \forall y \phi(x,y) \to \forall x \phi(x,x)$ – wobei x frei einsetzbar für y in $\phi(x,y)$ sei

d) $\vdash \forall x \big(\phi \to \psi(x)\big) \to \big(\phi \to \forall x \psi(x)\big)$ – wobei $x \notin \mathrm{FV}(\phi)$ sei