Mathematische Logik I – Übungsaufgaben

Blatt 13

Dr. Michael Arndt

WS 2014/15

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Es sei $\{T_i : i \in I\}$ eine nicht-leere Familie von $\mathcal{L}$-Theorien, welche durch Mengeninklusion linear geordnet ist, d.h. für jedes $i \in I$ ist $T_i \subset T_{i+1}$. Weiterhin sei $T =_{\text{def}} \bigcup_{i \in I} T_i$. Zeigen Sie:

a) T ist eine Theorie, die jede Theorie T_i erweitert.

b) Wenn jede Theorie T_i konsistent ist, dann ist auch T konsistent.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Es seien T_1 und T_2 Theorien. Zeigen Sie:

a) $T_1 \cap T_2$ ist ebenfalls eine Theorie.

b) $T_1 \cup T_2$ ist im allgemeinen Fall keine Theorie. (Hier reicht die Angabe eines Gegenbeispiels.)

Aufgabe 3 (1+3 Punkte)

Sei $\mathcal{L}$ eine formale Sprache, in der die Konstanten $\dot{c}$ und $\dot{d}$ die einzigen nichtlogischen Zeichen sind.

a) Geben Sie eine Formel $\phi \in \mathcal{L}$ an, die genau dann in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ gültig ist, wenn A genau zwei Elemente enthält. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei dann $\Gamma =_{\text{def}} \{\phi, \neg(\dot{c} \doteq \dot{d})\}$ und $T =_{\text{def}} \text{Ded}(\Gamma)$ die resultierende Theorie. Prüfen Sie, ob T eine Henkintheorie ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeigen Sie in $\text{NK}_{\doteq}$:

$$\forall x(x \doteq x), \forall x \forall y \forall z(x \doteq y \land y \doteq z \to x \doteq z) \vdash \forall x \forall y(x \doteq y \to y \doteq x)$$