Mathematische Logik I

— Foliensatz 8 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Motivation

Im zweiten Teil der Vorlesung wird die Quantorenlogik behandelt.

Gleichbedeutend zum Begriff *Quantorenlogik* sind die Begriffe *Prädikatenlogik* und *Logik erster Stufe*.

Die Quantorenlogik erweitert die Aussagenlogik, indem sie nicht mehr nur Aussagen als Ganzes analysiert, sondern auch deren innere Struktur betrachtet.

Die Quantorenlogik analog zur Aussagenlogik eingeführt:
Definition der formalen Sprache, der Semantik und schließlich eines syntaktischen Kalküls.

Im Anschluss wird wie schon in der Aussagenlogik die semantische Vollsändigkeit des Kalküls gezeigt.

Motivation

Die Quantorenlogik unterscheidet sich in folgenden Punkten wesentlich von der Aussagenlogik:

1. Betrachtung von Individuen, Funktionen und Relationen

   Wir werden in einer formalen Sprache reden über:

   - Individuen eines Gegenstandsbereiches
   - Funktionen auf diesem Bereich
   - Relationen über diesen Bereich

   Der Bereich zusammen mit den ausgezeichneten Individuen, Funktionen und Relationen wird *Struktur* genannt.

Motivation

2. Verwendung neuer Zeichen im Alphabet der formalen Sprache:

   Logische Zeichen:
   - Quantoren: $\forall$, $\exists$
   - Gleichheitsrelation: $=$
   - Individuenvariablen: x_0, x_1, $\ldots$

   Nicht-logische Zeichen:
   - Individuenkonstanten, z.B. $\dot{c}, \dot{d}, \ldots$
   - Funktionszeichen, z.B. $\dot{f}, \dot{g}, \ldots$ oder $\dot{+}$
   - Relationszeichen, z.B. $\dot{P}, \dot{Q}, \ldots$ oder $\dot{\leq}$

Motivation

3. Verwendung von *Termen*:

   Man benutzt Terme, um in der formalen Sprache über die Individuen des Grundbereiches zu sprechen. Dazu dienen Variablen, Individuenkonstanten und Funktionszeichen.

   Beispiele: $\dot{f}(x_0, \dot{a}, \dot{b})$, $(\dot{a} \dot{+} x_1)$, $\dot{g}(\dot{a}, x_0, \dot{f}(x_1, \ldots b, x_0))$

4. Verwendung von *Formeln*:

   Durch Formeln werden Aussagen aufgestellt. Diese können (im Gegensatz zu Termen) wahr oder falsch sein.

   Beispiele: $\exists x_0\,(x_0 \dot{\leq} \dot{f}(x_0 \dot{+} x_0))$, $\forall x_0 \forall x_1\,((x_0 \dot{\leq} x_1) \vee (x_1 \dot{\leq} x_0))$

Die Sprache der Prädikatenlogik

In diesem Abschnit werden formale Sprachen eingeführt. Diese Sprachen werden mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet.

Die einzelnen Sprachen, die hier definiert werden sollen, unterscheiden sich darin, welche nicht-logischen Zeichen zur Verfügung stehen.

Deshalb werden zur Definition einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ drei (möglicherweise leere) Index-Mengen I, K, L benötigt, die paarweise disjunkt sind.

Diese Mengen legen fest, wieviele und welche Individuenkonstanten, Funktions- und Relationszeichen in der Sprache vorkommen.

Alphabet

Definition 1 (Alphabet)

Das Alphabet einer formalen Sprache der Prädikatenlogik $\mathfrak{L}$ besteht aus den folgenden Zeichen:

Logische Zeichen:

1. Junktoren: $\rightarrow$, $\bot$ weiterhin: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$
2. Quantoren: $\forall$ (*Allquantor*) weiterhin: $\exists$ (*Existenzquantor*)
3. Individuenvariablen: x_n für jedes $n \in \mathbb{N}$
4. Gleichheitszeichen: $\doteq$

Alphabet

Definition 2 (Alphabet (Forts.))

Nicht-logische Zeichen (in Klammern metasprachliche Variablen):

5. Individuenkonstanten: $\dot{c}_i$ für jedes $i \in I$ $\quad (\dot{a}, \dot{b}, \ldots)$
6. Funktionszeichen: $\dot{f}_k$ für jedes $k \in K$ $\quad (\dot{f}, \dot{g}, \ldots)$
7. Relationszeichen: $\dot{R}_l$ für jedes $l \in L$ $\quad (\dot{P}, \dot{Q}, \ldots)$

Hilfszeichen:

8. Klammern: (und)
9. Komma: ,

Alphabet

Bemerkungen:

1. Später wird gezeigt, dass der Existenquantor durch den Allquantor ausgedrückt werden kann. Entsprechend würde zu einer vollständigen Sprachdefinition der Allquantor $\forall$ zusammen mit den Junktoren $\perp$ und $\rightarrow$ genügen.
2. $\mathsf{VAR} =_{\mathrm{def}} \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der Individuenvariablen.
3. Die nicht-logischen Zeichen wurden mit einem kleinen Punkt notiert. Dies dient zur Unterscheidung der nicht-logischen Zeichen von den Objekten, auf die diese Zeichen später verweisen werden.

Stelligkeit und Signatur

Definition 3 (Stelligkeit und Signatur)

Die beiden Abbildungen $\sigma : K \to \mathbb{N}$ und $\tau : L \to \mathbb{N}$ legen die *Stelligkeit* der Funktions- bzw. der Relationszeichen fest.

Das Tupel $\langle I, \sigma, \tau \rangle$ ist die *Signatur* von $\mathfrak{L}$.

Bemerkung:

Das Funktionszeichen $\dot{f}_k$ hat die Stelligkeit $\sigma(k)$.
Das Relationszeichen $\dot{R}_l$ hat die Stelligkeit $\tau(l)$.

Stelligkeit und Signatur

Bemerkungen:

1. Sind die Stelligkeiten der Funktions- und Relationszeichen aus dem Kontext klar, kann man die Signatur auch einfach durch Auflistung der Zeichenmengen angeben.
2. In Abhängigkeit der Mengen I, K, L und der beiden Funktionen σ und τ wurde eine ganze Klasse von formalen Sprachen eingeführt.

   Die Klassen können einfach durch ihre Signatur unterschieden werden, in der alle wesentlichen strukturellen Informationen über eine Sprache $\mathfrak{L}$ zusammengefaßt sind.

Stelligkeit und Signatur

Beispiel: Sprache der Gruppentheorie.

Eine Gruppe besteht aus einer Grundmenge G, einer zweistelligen Verknüpfung (üblich: Addition), und einem ausgezeichneten Element (üblich: Null).

Um über Gruppen reden zu können, wird in der Sprache $\mathfrak{L}_G$ der Gruppentheorie ein zweistelliges Funktionszeichen sowie eine Individuenkonstante benötigt.

Relationszeichen werden keine benötigt.

Stelligkeit und Signatur

Wir definieren also:

$$I =_{\mathrm{def}} \{0\}, \quad K =_{\mathrm{def}} \{+\} \quad L =_{\mathrm{def}} \varnothing$$

Offensichtlich sind I, K und L sind paarweise disjunkt.

Damit stehen $\dot{c}_0$ und $\dot{f}_+$ als nicht-logische Zeichen im Alphabet von $\mathfrak{L}_G$ zur Verfügung. Durch die Festlegung $\sigma(+) =_{\mathrm{def}} 2$ ist σ definiert.

Da $L = \varnothing$ gilt, ist τ trivial gegeben.

Damit ist $\dot{f}_+$ ein zweistelliges Funktionszeichen, und die Signatur von $\mathfrak{L}_G$ ist durch $\langle I, \sigma, \tau \rangle$ bestimmt.

Stelligkeit und Signatur

Wir erweitern die Sprache $\mathfrak{L}_G$ zu einer reicheren Sprache $\mathfrak{L}_{G'}$ für geordnete Gruppen mit Inversen.

$$I' =_{\mathrm{def}} I, \quad K' =_{\mathrm{def}} \{+, -\}, \quad L' =_{\mathrm{def}} \{\leq\}$$

Weiterhin soll gelten:

$$\sigma'(+) =_{\mathrm{def}} 2, \quad \sigma'(-) =_{\mathrm{def}} 1, \quad \tau'(\leq) =_{\mathrm{def}} 2$$

In der Sprache $\mathfrak{L}_{G'}$ stehen zusätzlich ein einstelliges Funktionszeichen $\dot{f}_-$ und ein zweistelliges Relationszeichen $\dot{R}_\leq$ zur Verfügung. Die Signatur von $\mathfrak{L}_{G'}$ ist durch $\langle I', \sigma', \tau' \rangle$ bestimmt.

Terme und Formeln

Bemerkung:

Im Folgenden gehen wir stets davon aus, dass die Signatur für eine Sprache $\mathfrak{L}$ fest vorgegeben ist.

Wir definieren in Abhängigkeit von der Signatur rekursiv die Terme und Formeln von $\mathfrak{L}$.

Ziel ist es, mit den Termen über Individuen einer Struktur sprechen zu können, mit Fomeln über Wahrheit oder Falschheit.

Terme und Formeln

Definition 4 (Terme)

Die Menge TERM aller Terme von $\mathfrak{L}$ ist durch folgende induktive Definition erklärt:

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \in \mathrm{TERM}$.
2. Für jedes $i \in I$ ist $\dot{c}_i \in \mathrm{TERM}$.
3. Wenn für $k \in K$ gilt, dass $t_1, \ldots, t_{\sigma(k)} \in \mathrm{TERM}$, dann ist $\dot{f}_k(t_1, \ldots, t_{\sigma(k)}) \in \mathrm{TERM}$.

Bemerkung:

Das Zeichen $\doteq$ wird von nun an auch für die syntaktische Gleichheit von Termen verwendet.

Terme und Formeln

Beispiel:

1. Folgende Terme gehören etwa zur Sprache $\mathfrak{L}_G$:

$$\dot{c}_0, \quad x_5, \quad \dot{f}_+(x_1, \dot{c}_0)$$

2. Wir erlauben zur Erleichterung eine informelle Notation der Terme. Wir schreiben $\dot{0}$ statt $\dot{c}_0$ und $\dot{+}$ für $\dot{f}_+$ und notieren zusätzlich Funktionsausdrücke infix.
Also sind auch folgende Zeichenreihen Terme:

$$\dot{0}, \quad (\dot{0} \dot{+} x_4) \dot{+} x_3$$

3. Das einstellige Funktionszeichen $\dot{f}_-$ von $\mathfrak{L}_{G'}$ wird zur Erleichterung durch einen Strich über dem Argument notiert.
Damit gibt es in der Sprache $\mathfrak{L}_{G'}$ etwa folgende Terme:

$$\overline{\overline{\dot{0}}}, \quad \overline{(x_1 \dot{+} \overline{x_2}) \dot{+} \dot{0}}$$

Terme und Formeln

Definition 5 (Formeln)

Die Menge $\mathfrak{L}$ aller Formeln der Sprache $\mathfrak{L}$ ist durch folgende induktive Definition erklärt:

1. Wenn für $l \in L$ gilt, dass $t_1, \ldots, t_{\tau(l)} \in$ TERM, dann $\dot{R}_l(t_1, \ldots\ t_{\tau(l)}) \in \mathfrak{L}$.
2. Wenn $t, s \in$ TERM, dann $(t \doteq s) \in \mathfrak{L}$.
3. $\bot \in \mathfrak{L}$.
4. Wenn $\phi \in \mathfrak{L}$, dann auch $\neg\phi \in \mathfrak{L}$.
5. Wenn $\phi \in \mathfrak{L}$ und $\psi \in \mathfrak{L}$, dann auch $(\phi \circ \psi) \in \mathfrak{L}$.
6. Wenn $x \in$ VAR und $\phi \in \mathfrak{L}$, dann auch $(\forall x\, \phi) \in \mathfrak{L}$ und $(\exists x\, \phi) \in \mathfrak{L}$.

Terme und Formeln

Bemerkungen:

1. Möchte man hervorheben, zu welcher Sprache Formeln gehören, spricht man auch von $\mathfrak{L}$-Formeln.
2. Formeln, die aufgrund der Regeln (1) bis (3) zu $\mathfrak{L}$ gehören, werden *atomare Formeln* oder auch *Atome* genannt.

   Mit $\mathrm{ATM}_{\mathfrak{L}}$ wird die Menge aller atomaren Formeln der Sprache $\mathfrak{L}$ bezeichnet.

Konvention zur Klammerersparnis

1. Analog zur Aussagenlogik verwenden wir auch in der Quantorenlogik Konventionen zur Klammerersparnis.

   Neu hinzu kommt, dass Quantoren stärker binden als Junktoren.

2. Wie schon bei den Funktionszeichen werden wir auch gebräuchliche Relationszeichen (etwa $\leq$) verwenden und, falls diese zweistellig sind, sie auch infix notieren.

   Etwa: $(\dot{0} \mathrel{\dot{\leq}} x_0)$ für $\dot{\leq}(\dot{0}, x_0)$.

   Dabei gilt, dass Relationszeichen stärker binden als Junktoren und Quantoren.

Konvention zur Klammerersparnis

3. Zuletzt wird üblicherweise darauf verzichtet, Konstanten-, Funktions-, und Relationssymbole ausdrücklich mit einem Punkt zu markieren.

   Mit dieser Konvention wird die eingangs eigens eingeführte ausdrückliche Unterscheidung von Symbolen der Objektsprache und Gegenständen der Metasprache für Terme und auch für Atomformeln gleich wieder abgeschafft.

   HINWEIS: Dies ist im Grunde eine äußerst fragwürdige Konvention. In der Praxis ergibt sich das Weglassen der Punkte aber leider schnell von selbst.

Konvention zur Klammerersparnis

Beispiele:

Einige Formeln der (erweiterten) Gruppentheorie:

- Schreibe $\forall x_0(x_0 + 0 = x_0)$ für $(\forall x_0\,(\dot{+}(x_0, \dot{0}) \doteq x_0))$.
- Schreibe $\forall x_1 \forall x_2(x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$ für
  $(\forall x_1(\forall x_2(\dot{+}(x_1, x_2) \doteq \dot{+}(x_2, x_1))))$.
- Schreibe $\forall x_0(\overline{x_0 + 0} \leq \overline{x_0} + \overline{0})$ für
  $\forall x_0 \,\dot{\leq}(\dot{-}(\dot{+}(x_0, \dot{0})), \dot{+}(\dot{-}(x_0), \dot{-}(\dot{0})))$.

Weiterführende Bemerkungen

Bemerkungen

1. Wie schon in der Aussagenlogik können Begriffe wie *Gliederungsbaum* und *Rang einer Formel* für die Quantorenlogik rekursiv definiert werden.
2. Analog zur Induktion in der Aussagenlogik werden in der Prädikatenlogik Behauptungen über Formeln durch Induktion über den Formelaufbau gezeigt.

   Oft ist es aufgrund der komplexeren Definition der Sprache notwendig, zunächst eine Induktion über die Terme und dann erst eine Induktion über die Formeln durchzuführen.
3. Rekursive Definitionen über dem Bereich der Terme und dem Bereich der Formeln sind analog zur Aussagenlogik möglich.

Freie Variablen

Definition 6 (Freie Variablen eines Terms)

Die Menge $\mathrm{FV}(t)$ der *freien Variablen eines Terms* $t \in \mathrm{TERM}$ ist wie folgt rekursiv definiert:

1. Wenn $t \doteq x$ für $x \in \mathrm{VAR}$, dann $\mathrm{FV}(t) =_{\mathrm{def}} \{x\}$.
2. Wenn $t \doteq \dot{c}_i$ für $i \in I$, dann $\mathrm{FV}(t) =_{\mathrm{def}} \varnothing$.
3. Wenn $t \doteq \dot{f}(t_1, \ldots, t_n)$ mit $t_1, \ldots t_n \in \mathrm{TERM}$, dann $\mathrm{FV}(t) =_{\mathrm{def}} \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{FV}(t_k)$.

Eine Variable x *kommt frei in einem Term t vor*, falls $x \in \mathrm{FV}(t)$.

Freie Variablen

Definition 7 (Freie Variablen einer Formel)

Die Menge $\mathsf{FV}(\phi)$ der *freien Variablen einer Formel* $\phi \in \mathfrak{L}$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von Formeln definiert:

1. Wenn $\phi \doteqdot \dot{P}(t_1, \ldots, t_n)$ für Terme $t_1, \ldots, t_n$, dann
   $\mathsf{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \bigcup_{k=1}^{n} \mathsf{FV}(t_k)$.
2. Wenn $\phi \doteqdot (t \doteq s)$ für Terme t, s, dann
   $\mathsf{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathsf{FV}(t) \cup \mathsf{FV}(s)$.
3. Wenn $\phi \doteqdot \bot$, dann $\mathsf{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \varnothing$.

Freie Variablen

Definition 8 (Freie Variablen einer Formel (Forts.))

1. Wenn $\phi \doteq \neg\psi$, dann $\mathsf{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathsf{FV}(\psi)$.
2. Wenn $\phi \doteq (\psi \circ \chi)$ für Formeln ψ, χ, dann $\mathsf{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathsf{FV}(\psi) \cup \mathsf{FV}(\chi)$.
3. Wenn $\phi \doteq \forall x \psi$ oder $\phi \doteq \exists x \psi$ für eine Variable x und eine Formel ψ, dann $\mathsf{FV}(\phi) =_{\mathrm{def}} \mathsf{FV}(\psi) \setminus \{x\}$.

Eine Variable x *kommt frei in einer Formel* ϕ *vor*, falls $x \in \mathsf{FV}(\phi)$.

Gebundene Variablen

Definition 9 (Gebundene Variablen einer Formel)

Die Menge $\mathsf{BV}(\phi)$ der *gebundenen Variablen einer Formel* $\phi \in \mathfrak{L}$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von Formeln definiert:

1. Wenn ϕ atomar, dann $\mathsf{BV}(\phi) =_{\text{def}} \varnothing$.
2. Wenn $\phi \doteq \neg\psi$, dann $\mathsf{BV}(\phi) =_{\text{def}} \mathsf{BV}(\psi)$.
3. Wenn $\phi \doteq \psi \circ \chi$ für Formeln ψ und χ, dann $\mathsf{BV}(\phi) =_{\text{def}} \mathsf{BV}(\psi) \cup \mathsf{BV}(\chi)$.
4. Wenn $\phi \doteq \forall x\psi$ oder $\phi \doteq \exists x\psi$ für eine Variable x und Formel ψ mit $x \in \mathsf{FV}(\psi)$, dann $\mathsf{BV}(\phi) =_{\text{def}} \mathsf{BV}(\psi) \cup \{x\}$.

Eine Variable x *kommt gebunden in einer Formel* ϕ *vor*, falls $x \in \mathsf{BV}(\phi)$.

geschlossen/offen

Definition 10 (geschlossen/offen)

1. Ein Term $t \in \mathrm{TERM}$ heißt *geschlossen*, falls keine freien Variablen darin vorkommen ($\mathrm{FV}(t) = \varnothing$).

   $\mathrm{TERM}_c =_{\mathrm{def}} \{t : t \text{ geschlossen}\} \subset \mathrm{TERM}$.

2. Eine Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ heißt *geschlossen*, falls keine freien Variablen darin vorkommen ($\mathrm{FV}(\phi) = \varnothing$).

   Eine geschlossene Formel heißt auch *Aussage*.

   $\mathrm{SENT} =_{\mathrm{def}} \{\phi : \phi \text{ geschlossen}\} \subset \mathfrak{L}$.

3. Terme oder Formeln, die nicht geschlossen sind (also freie Variablen enthalten), heißen *offen*.

Freie und gebundene Variablen

Beispiele:

- Für den Term $t \doteq \dot{c}_0$ ist $\mathrm{FV}(t) = \varnothing$.
- Für den Term $t \doteq x_1 + 0$ ist $\mathrm{FV}(t) = \{x_1\}$.
- Für die Formel $\phi \doteq \forall x(x + y = y + x)$
  ist $\mathrm{FV}(\phi) = \{y\}$ und $\mathrm{BV}(\phi) = \{x\}$.
- Für die Formel $\phi \doteq \forall x \forall y(x + y = y + x)$
  ist $\mathrm{FV}(\phi) = \varnothing$ und $\mathrm{BV}(\phi) = \{x, y\}$.
- Für die Formel $\phi \doteq \forall x(x + y = 0) \wedge \forall y(x + y = 0)$
  ist $\mathrm{FV}(\phi) = \{x, y\}$ und $\mathrm{BV}(\phi) = \{x, y\}$.